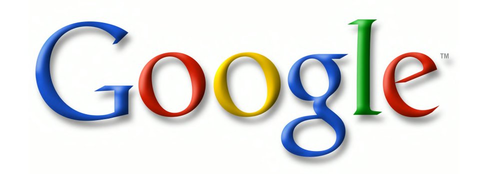


Lehrbuch

der

niederen Sphärik.

Von

Dr. Chr. Gudermann,

Professor der Mathematik an der Königlichen Akademie zu Münster.

en meist vergeblich oder
nicht fußten auf der
ı sich die Planimetrie

Mit 20 Steindrucktafeln.

Münster, 1835.

Druck und Verlag der Coppenrathschen Buch- und Kunsthandlung.

Lehrbuch

der

niederen Sphärik.

Von

Dr. Chr. Gudermann,
Professor der Mathematik an der Königlichen Akademie zu Münster.

en meist vergeblich oder
nicht fußten auf der
t sich die Planimetrie

Mit 20 Steindrucktafeln.

Münster, 1835.
Druck und Verlag der Coppenrathschen Buch- und Kunsthandlung.

Vorrede.

Während der Verfassung meines so sehr günstig aufgenommenen Grundrisses der analytischen Sphärik, und mehr noch nach dem Erscheinen desselben bei Gelegenheit zahlreicher weiterer sphärisch-analytischer Ausführungen, wurde der Gedanke in mir lebhaft, daß das Studium dieses neuen Zweiges der Mathematik am meisten gefördert werden könnte durch ein Werk, welches den elementaren Theil dieser Wissenschaft geometrisch behandelte, damit dem neuen analytischen Gebäude der sichere Grund und Boden nicht fehlte. Diejenigen, welche sich mit analytischen Untersuchungen in der Planimetrie beschäftigen, werden alle eingestehen, daß ihr Bemühen meist vergeblich oder sogar unmöglich sein würde, wenn sie nicht fußten auf der breiten geometrischen Grundlage, deren sich die Planimetrie schon von Euklides Zeiten her erfreuet.

Nur eine, soweit als möglich getriebene, wirklich geometrische Behandlung ist im Stande, die analytische Sphärik gehörig zu begründen und zu tragen; nicht weil etwa die durch die Hülfe der Analysis gefundenen Resultate dem Zweifel ausgesetzt wären, sondern weil es im Wesen der analytischen Methode liegt, daß sie zwar mit der geometrischen Anschauung anhebt, aber im Allgemeinen ohne fernere Begleitung von ihr bloß durch arithmetische Entwickelungen und Verbindungen zur

Beantwortung aller, den in Rede stehenden Gegenstand betreffenden, Fragen führt. Bei der geometrischen Behandlung entsteht durch die Anschauung der Construction ein Interesse unmittelbar an der Construction selbst, bei der analytischen Behandlung entsteht zunächst kein Interesse an dem Objecte, sondern an der Klarheit, Einfachheit und Kürze, überhaupt an der Eleganz der analytischen Herleitung; jene Behandlung führt zur unmittelbaren Kenntniß; diese, welche der Vermittelung bedarf, führt auch zunächst nur zur mittelbaren Kenntniß des eigentlichen Objectes.

Wie die niedere Planimetrie von den alten und neuen Geometern behandelt worden ist, so muß auch die elementare Sphärik geometrisch behandelt werden, wenn die Kenntniß derselben eine gründliche und umfassende werden soll. Überhaupt muß in der Behandlung der Sphärik die der Planimetrie das Vorbild sein, und eine Abweichung hiervon nur dann Statt finden, wenn die besondere Beschaffenheit der sphärischen Objecte, was nicht selten der Fall ist, eine eigenthümliche Behandlung gebietet, weil dadurch eine größere Einfachheit und Kürze, mithin auch eine leichtere Einsicht in den Zusammenhang erreicht wird.

Ähnliche Gedanken, und zum Theil dieselben, enthält die Sphärik von Dr. Schulz in der Vorrede, und der erste, aber im Vergleiche mit dem zweiten ungleich schwächere Theil dieses, wie es scheint, wenig gekannten, und durch den Tod seines Verfassers unvollendet gebliebenen Werkes: »Die Sphärik oder die Geometrie der Kugelfläche in drei Theilen von Karl Friedrich Schulz, Leipzig 1828 bei Karl Cnobloch«, — ist ein schon so rühmlicher Schritt zur Ausführung dieser Gedanken, daß er mich sehr wahrscheinlich von einer Bearbeitung der elementaren Sphärik würde abgehalten haben, wenn ich ihn

früher gekannt hätte; nun aber hat er mich in dem Vertrauen auf die Richtigkeit meiner Ansicht bestärkt, und zur Herausgabe des ihr gemäß verfaßten Werkes, als einer zeitgemäßen Erscheinung, nur noch ermuntert.

Ein anderes Buch, die Geometrie der Kugelfläche von G. F. Pohl 1819 sollte diesen Titel nicht führen; es enthält eine sphärische Trigonometrie, die von vielen überboten wird, und entspricht am allerwenigsten den großen Erwartungen, die in der Vorrede erregt werden.

Man wird hier die elementare Sphärik, wenn ich nicht irre, so ziemlich zu derselben Stufe geometrischer Ausbildung gebracht finden, auf welcher die elementare Planimetrie gegenwärtig steht. Auch die Formen des Zusammenhanges unter den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks sind, als ebensoviele Eigenschaften desselben, in gleicher Art behandelt worden. Nach einander gehen alle das Dreieck betreffende Formeln auf dem construirenden Wege in einfacher Weise hervor.

Die Situations-Geometrie auf der Kugel ist, so weit sie in den Bereich der Elemente gehört, sehr ausführlich entwickelt worden, und man wird sehr allgemeine Gesetze antreffen, welche völlig neu sind, weil auch die analogen Gesetze der Planimetrie vergebens in den von ihr handelnden Lehrbüchern gesucht werden dürften.

Die Lehre vom Kreise auf der Kugel bewirkt eine wichtige Vorkenntniß, und dient als eine nützliche Einleitung in das ausgedehntere Studium der Lehre von den sphärischen Kegelschnitten überhaupt; ihre ausführliche Behandlung und insbesondere die elementare Nachweisung der merkwürdigen Gesetze der sphärischen Pole und ihnen zugehörigen Polaren, deren genauere Kenntniß für das bessere Gedeihen des Stu-

diums der sph. Situations-Geometrie überhaupt sosehr wichtig ist, wird man nicht ungern bemerken.

Das durch die ganze Geometrie hindurch greifende Gesetz der Dualität stellt sich in der Sphärik wegen des einfachen Zusammenhanges zwischen einem sphärischen Hauptkreise und seinem Centrum viel einfacher und leichter heraus, als in der Planimetrie; dieses umfassende Gesetz würde unstreitig viel früher entdeckt worden sein, wenn man das Studium der Sphärik früher ernsthaft getrieben hätte. Wenn nach der Methode des Herrn Poncelet und Anderer dieses Gesetz nur auf die allgemeinen geometrischen Formen und auf die Übertragung allgemeiner oder eigentlich projectionsfähiger metrischer Relationen anwendbar ist, so kann im Gegentheile dieses Gesetz in Anwendung der Methode, welche der Sphärik zu Gebote steht, selbst auf die regulären Formen und auf die Übertragung der metrischen Relationen aller Art angewandt werden; selbst ein ganzer Calcul kann Schritt vor Schritt in den sich auf die reciproke Construction beziehenden umgesetzt werden.

Jedes erfolgreiche Bemühen im Gebiete der Sphärik ist doppelt fruchtbar; jedes Resultat in der Sphärik involvirt nämlich auch das correspondirende für die Planimetrie, welches augenblicklich darin erkannt, oder daraus leicht hergeleitet werden kann; aber nicht umgekehrt kann immer aus dem planimetrischen Ergebniß auf das entsprechende in der Sphärik mit derselben Sicherheit geschlossen werden.

Es ist daher auffallend, daß manche einsichtsvolle Geometer alle ihre Untersuchungen noch auf die Planimetrie beschränken, statt ihren ohnehin nicht für Anfänger mitgetheilten Resultaten sogleich die um eine Stufe höhere Allgemeinheit zu erwerben, wodurch Demjenigen, welcher die höhere Allgemeinheit sucht, die Mühe und Weitläufigkeit verursacht wird, daß er dieselben Untersuchungen noch einmal für die Sphärik anstellen muß.

Gegen das Ende des Werks sind die arithmetischen Entwickelungen nicht immer vermieden worden, und die beiden letzten Abschnitte erforderten ihrer Natur nach sogar eine ganz uneingeschränkte Anwendung der Arithmetik.

Auch der Verfasser muß nach dem durch seine frühere neunjährige Wirksamkeit, als Lehrer der Mathematik an einem Gymnasium, gewonnenen practischen Urtheile es nur zweckmäßig finden, daß der Unterricht in der eigentlichen sphärischen Trigonometrie in den Gymnasien Preußens einer höheren Bestimmung gemäß nicht mehr ertheilt wird; er hat seine Ansicht darüber auch schon mehrere Jahre vor dem Erlasse dieser höheren Anordmung ausgesprochen in dem Aufsatze: »Über die niedere Sphärik« im achten Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik von Crelle Seite **363**.

Ob aber eine geometrische Behandlung der Elemente der Sphärik etwa in der Art, wie sie in den ersten Abschnitten dieses Lehrbuchs vorkommt, vom Gymnasial-Unterrichte ausgeschlossen werden müsse, ist eine andere Frage; wenn darüber nicht bloß abgesprochen, sondern mit der nöthigen nicht nur pädagogischen, sondern auch mathematischen Kenntniß geurtheilt wird, so wird die Beantwortung zwar bedingt, aber doch von der Art sein, daß ich sie hier zurückhalten muß, um nicht in den Verdacht einer durch das Interesse an meinem Lehrbuche entstandenen Parteilichkeit zu gerathen.

Störungen und Unannehmlichkeiten mancher Art, wozu auch leider das Gefühl der getäuschten Erwartungen gehört, haben dem Verfasser nicht selten den Frohsinn und den Muth geraubt, welcher zur glücklichen Ausführung eines Werkes von größerem Umfange erforderlich ist; man wird leicht bemerken, daß in diesem Buche, welches schon im Jahre **1832** begonnen wurde, die anfängliche Idee nicht immer festgehalten werden konnte, und mit diesem Umstande die Mängel desselben,

der Kreis ein Nebenkreis. Der Kürze wegen mag ein Bogen eines Hauptkreises ein Hauptbogen und ein Stück von der Peripherie eines Nebenkreises ein Nebenbogen heißen. Der (geradlinige) Radius eines Hauptkreises stimmt mit dem Radius der Kugel überein, der Radius eines Nebenkreises ist kleiner als der Kugel-Radius, und zwar desto kleiner, je weiter der Mittelpunkt der Kugel von der Ebene des Kreises absteht.

Ein Perpendikel vom Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene eines Nebenkreises gefällt, trifft dieselbe immer im Mittelpunkte dieses Kreises. Wenn dieses Perpendikel $= d$, der Radius des Nebenkreises $= r$, und der Radius der Kugel $= R$ ist, so ist immer

$$R^2 = r^2 + d^2.$$

Die einzigen ebenen Linien auf der Oberfläche einer Kugel sind Kreise; alle andere krumme Linien auf einer Kugel sind unebene, oder auch doppelt gekrümmte Curven.

Die beiden Endpunkte eines Kugeldurchmessers heißen Gegenpunkte, und zwar der eine der Gegenpunkt des anderen.

Zu einem Punkte gehört also nur ein Gegenpunkt.

Jede zwei Hauptkreise schneiden sich in zwei Gegenpunkten, und werden von ihnen halbirt; denn da ihre Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, so haben sie einen Durchmesser der Kugel gemein, und die Endpunkte dieses Durchmessers sind die beiden Punkte, in welchen sich die Peripherien der beiden Hauptkreise schneiden.

Durch zwei Gegenpunkte können unzählige Hauptkreise gelegt werden.

Wird in einem Hauptkreise ein Punkt angenommen, so befindet sich sein Gegenpunllt in demselben Hauptkreise.

Ein Kreis auf der Kugelfläche, welcher durch zwei Gegenpunkte geht, ist ein Hauptkreis.

Durch zwei Punkte, welche nicht Gegenpunkte sind, kann nur ein Hauptkreis gezogen werden; denn könnten mehrere von einander verschiedene Hauptkreise durch die beiden Punkte gelegt werden, so würden sie sich in jenen Punkten schneiden, folglich wären diese Punkte Gegenpunkte, was der Annahme zuwider ist.

§. 3.

Da die einzigen ebenen Linien, welche auf einer Kugel gezogen werden können, Kreise sind, so sind sie also die für die Betrachtung einfachsten Linien auf der Kugel; da ferner ein Hauptbogen weniger gekrümmt ist, als ein gleichlanger Nebenbogen, so übernehmen die Hauptbogen in der Sphärik dieselbe Rolle, als die geraden Linien in der Planimetrie. Alle Linien auf der Kugelfläche müssen also zunächst mit Hauptbogen verglichen werden,

es mag auf ihre Krümmung oder auf ihre Länge ankommen; sie werden also auch gebraucht, um die Entfernung zweier Punkte der Kugelfläche von einander zu messen. Nimmt man aber in einem Hauptkreise zwei Punkte an, so gibt es zwei Hauptbogen, welche diese Punkte zu Endpunkten haben, und sie ergänzen sich zum Hauptkreise; jeder derselben kann als Ausdruck der Entfernung der beiden Punkte von einander dienen; sind die beiden Hauptbogen gleich, so ist jeder die Hälfte des Hauptkreises, und die beiden Punkte sind dann Gegenpunkte. Daher sind zwei Gegenpunkte immer 180° von einander entfernt.

Sind die beiden sich zu einem Hauptkreise ergänzenden Hauptbogen zwischen zwei Punkten ungleich, so wird in der Regel vorzugsweise der kürzere gewählt, um die Entfernung der beiden Punkte von einander dadurch auszudrücken.

Zusatz. Die Länge eines ganzen Hauptkreises ist $= 2\pi$, wenn der Kugel-Radius die Einheit ist, und unter π die Ludolphische Zahl verstanden wird. Daher ist die Länge eines Hauptkreises $= 6.28318531 \ldots$; die Länge eines Halbkreises ist also $= \pi = 3{,}14159265$; die Länge eines Quadraten ist $\frac{\pi}{2} = 1{,}57079633$; die Länge eines Grades ist $\frac{\pi}{180^0} = 0{,}01745829$; die Länge eines Minuten-Bogens ist 0,00029089; die Länge eines Sekunden-Bogens ist 0,00000485; u. s. w.

Ist also ein Hauptbogen gleich 3° 49′ 28″, so findet man seine Länge:

$$\begin{aligned} 3^0 &= 0{,}05235988 \\ 49' &= 0'01425352 \\ 28'' &= 0'00013575 \\ 0'',47 &= 0{,}00000228 \\ \hline \text{die Summe} &= 0{,}06675143, \end{aligned}$$

und mit der Zahl 0,0667514 muß der Kugel-Radius noch multiplicirt werden, wenn er nicht die Einheit selbst sein soll.

§. 4.

Zwei Hauptbogen, welche von einem Punkte ausgehen, machen einen Winkel mit einander, jener Punkt heißt der Scheitel des Winkels, und die beiden Hauptbogen selbst heißen seine Schenkel.

Auf die Länge der Schenkel eines Winkels kommt es nicht an.

Ein Winkel zweier Hauptkreise ist dem Flächenwinkel der Ebenen seiner Schenkel gleich.

Es seien in Fig. 1. CA und CB die Schenkel des Winkels ACB; um ihn zu messen, müssen vom Scheitel C aus die Tan-

genten $C\alpha$ und $C\beta$ gezogen werden, wovon die eine den Bogen CA und die andere den Bogen CB berührt: der Winkel $\alpha C\beta$ ist dann der Ausdruck für die Größe des Winkels ACB; da aber diese Tangenten sich in den Ebenen CDA und CDB befinden, und außerdem noch auf der Durchschnitts-Linie DC der beiden Ebenen senkrecht stehen, so ist der Winkel $\alpha C\beta$ auch gleichzeitig das Maaß des Flächen-Winkels ACDB der beiden Ebenen, worin sich die Schenkel CA und CB befinden.

§. 5.

Wenn sich ein Hauptbogen auf der Oberfläche der Kugel um seinen einen Endpunkt herum drehet, bis er in die anfängliche Lage zurück kommt, so beschreibt der andere Endpunkt des Hauptbogens einen Kreis. Der feste Endpunkt des Hauptbogens heißt der (sphärische) Mittelpunkt oder das Centrum des Kreises, und der Hauptbogen selbst heißt der Radius oder Halbmesser des Kreises.

Drehet sich z. B. in Fig. 2 der Halbkreis XABCY um die beiden Gegenpunkte X und Y, so beschreibt er offenbar die Oberfläche der Kugel, und die Punkte A, B und C beschreiben Kreise $A\alpha A'$, $B\beta B'$, $C\gamma C'$, deren planimetrische Mittelpunkte die Punkte a, b, e sind, in welchen der Durchmesser XY des Halbkreises von den auf ihn gefällten Perpendikeln Aa, Bb, Cc getroffen wird, und diese Perpendikel selbst sind die planimetrischen Radien der drei Kreise; die sphärischen Radien der drei Kreise sind aber die Hauptbogen XA, XB, XC, wenn X als der sphärische Mittelpunkt der drei Kreise angesehen wird; sieht man aber seinen Gegenpunkt Y als sphärisches Centrum an, so sind YA, YB und YC die Radien der drei Kreise. Daher hat jeder Kreis zwei Mittelpunkte, die aber Gegenpunkte sind, und auch zwei Radien, die sich zu 180° oder zu π ergänzen.

Sind die Radien eines Kreises gleich, so ist jeder ein Quadrant, und der Kreis ist dann ein Hauptkreis; sind die beiden Radien eines Kreises ungleich, so ist der eine kleiner, und der andere um ebensoviel größer als ein Quadrant, und der Kreis ist dann ein Neben-Kreis. Wenn von einem Radius eines Neben-Kreises die Rede ist, so versteht man in der Regel den kleineren.

Anmerkung. In einigen Lehrbüchern wird der sphärische Mittelpunkt eines Kreises sein Pol genannt; der Grund dieser Benennung ist unerheblich, und mit der Benennung Pol verbindet man ohnehin schon längst in der analytischen Geometrie einen ganz anderen Begriff.

§. 6.

Zwei Kreise, welche dieselben zwei Mittelpunkte haben, heißen **concentrisch**; die Ebenen concentrischer Kreise sind parallel, weil sie auf demselben Kugel-Durchmesser, welcher die beiden Mittelpunkte verbindet, senkrecht stehen, und insofern heißen concentrische Kreise auch wol **Parallel-Kreise**. Ein **Haupt-Kreis**, welcher mit einem Nebenkreise concentrisch ist, heißt sein **Mittelkreis** (Aequator) und ein Bogen desselben ein **Mittelbogen**, oder eine **Mittellinie**. Unter der (sphärischen) **Distanz** zweier concentrischen Kreise versteht man einen Hauptbogen zwischen den beiden Nebenkreisen, der (mit seinen Verlängerungen) durch die Mittelpunkte der beiden concentrischen Kreise geht. In Fig. 2 ist z. B. AB die Distanz der beiden Kreise $A\alpha A'$ und $B\beta B'$, da der Bogen AB durch die beiden Mittelpunkte X und Y der concentrischen Kreise geht.

Während der Radius XA sich um das Centrum X drehet, und mit seinem Endpunkte A den Kreis $A\alpha A'$ beschreibt, beschreibt der Gegenpunkt C' von A einen zweiten Kreis $C'\gamma C$ um das Centrum Y, und die Radien XA und YC' der beiden Kreise sind gleich; solche zwei Kreise heißen **Gegenkreise**, weil die Gegenpunkte von den Punkten des einen Kreises sich im anderen Kreise befinden. **Ein Hauptkreis ist der Gegenkreis von sich selbst.**

Der Mittelkreis zweier Gegenkreise hat überall gleiche Distanz von ihnen.

§. 7.

Ein Hauptbogen, welcher zwei Punkte eines Nebenkreises verbindet, heißt eine (sphärische) **Sehne** und wenn er durch den Mittelpunkt des Nebenkreises geht, so heißt er ein **Durchmesser** des Nebenkreises.

Ein Hauptkreis, welcher zwei Gegenkreise schneidet, schneidet dieselben in vier Punkten, aber zwei von diesen Punkten sind die Gegenpunkte der beiden anderen. Ein Hauptbogen, welcher kleiner als ein Halbkreis ist, und zwei Gegenkreise mit einander verbindet, verbindet offenbar keine zwei Gegenpunkte, und heißt eine **äußere Sehne** zweier Gegenkreise, oder auch bloß die äußere Sehne eines Kreises, wobei man sich die Hälfte des einen Kreises als mit der nächsten Hälfte seines Gegenkreises zu einem Kreise zusammen gehörig vorstellt.

In Fig. 2. halbirt z. B. der Hauptkreis XAYC' die beiden Gegenkreise, und man kann sich also die Hälfte $A\alpha A'$ des einen mit der Hälfte $C\gamma C'$ des anderen als zu einem Kreise zusammen gehörig vorstellen, weil diese beiden Halbkreise keine Gegenpunkte enthalten, mit Ausnahme der Endpunkte A und A', welche die

Gegenpunkte von C' und C sind; der Hauptbogen $\alpha\gamma$ ist nun eine äußere Sehne dieses Kreises.

Anmerkung. Die beiden Halbkreise AαA' und CγC' machen in einem ähnlichen Sinne einen Kreis aus, als die beiden ebenfalls völlig getrennten Zweige des Hyperbel in der Planimetrie zu einer Curve zusammen gehörig gedacht werden.

§. 8.

Man kann sich mit Vortheil eines Kreisbogens bedienen, um einen Winkel zweier Hauptbogen zu messen; beschreibt man nämlich aus dem Scheitel eines Winkels einen Kreisbogen zwischen seinen Schenkeln mit einem beliebigen Radius, so ist der Kreisbogen das Maaß jenes Winkels.

In Fig. 1. sei aus C der Bogen ab mit dem Radius Ca = Cb zwischen den Schenkeln des Winkels ABC beschrieben, so befindet er sich in einer auf CD senkrechten Ebene adb, und seine planimetrischen Radien sind da = db; da diese nun den Tangenten Cα und Cβ parallel sind, so sind die Winkel αCβ und adb gleich, und daher ist der Bogen ab das Maaß des Winkels αCβ oder ACB.

Besonders häufig ist der Gebrauch eines Hauptbogens, welcher ebenfalls aus dem Scheitel des Winkels zwischen seinen Schenkeln beschrieben wird, um damit den Winkel zu messen.

Sind z. B. die Schenkel CA und CB als Quadranten begränzt, und wird aus C mit dem Radius CA der Bogen AB beschrieben, so ist AB ebenfalls das Maaß des Winkels ACB.

Ist also AB ein Quadrant, so ist der Winkel ACB ein rechter, ist AB kleiner als ein Quadrant, so ist der Winkel ACB ein spitzer, und ist AB größer als ein Quadrant, aber kleiner als ein Halbkreis, so ist der Winkel ACB ein stumpfer; ist AB größer als ein Halbkreis, so ist der Winkel ACB ein überstumpfer. Man sagt auch wohl der Kürze wegen, der Bogen AB sei dem Winkel ACB gleich, weil er mit diesem Winkel in der Menge der Grade, Minuten und Secunden übereinstimmt; denn der Bogen AB verhält sich offenbar zu dem ganzen Hauptkreise, wie der Winkel ACB sich verhält zu einem Winkel der vollen Umdrehung oder 360°.

Ist z. B. der Bogen AB, wie im §. 3. gleich $3^\circ\ 49'\ 28'',47$, und ist also seine Länge in Theilen des Kugelradius = 0,06675143, so sagt man, daß auch der Winkel ACB = 0,06675143 sei; wäre der Winkel ACB ein rechter, so würde er in demselben Sinne $= \frac{\pi}{2} = 1,57079633$ sein. Diese zur Bestimmung der Größe eines Winkels ACB angegebenen unbenann-

ten Zahlen verhalten sich dann zur unbenannten Zahl $2\pi = 6{,}28328531\ldots$, wie der Bogen AB sich zu einem Hauptkreise verhält.

Zusatz. Hat ein Winkel n Grade, so ist die zur Bestimmung seiner Größe dienende unbekannte Zahl $= \frac{\pi n}{180}$, und sie heißt nicht selten selbst der Winkel oder auch der Arkus des Winkels.

§. 9.

Wenn ein Punkt C (Fig. 3.) von zwei Punkten A und B eines Hauptbogens AB um 90° entfernt ist, so ist jener Punkt das Centrum von AB. Denn nimmt man im Bogen AB einen beliebigen dritten Punkt D an, und zieht man vom Mittelpunkte M der Kugel die Geraden MA, MB, MC, MD, so sind sie Kugelhalbmesser, und die Winkel CMA und CMB sind rechte, weil die Bogen AC und BC Quadranten sind; daher steht CM auf der Ebene AMB und also auch auf MD senkrecht; wird also der Hauptbogen CD gezogen, so ist er ein Quadrant; weil aber C von jedem Punkte D im Bogen AB um 90° absteht, so ist C das Centrum des Bogens AB.

Zusatz. Beschreibt man also aus zwei Punkten A und B eines Hauptkreises zwei sich schneidende Hauptbogen, so ist ihr Durchschnittspunkt das Centrum jenes Hauptkreises.

§. 10.

Der Radius eines Hauptkreises steht auf ihm senkrecht.

Beweis. In Fig. 4. sei C das Centrum von AB, und CA ein Radius von AB; man mache AB = 90° und ziehe noch CB, so ist A das Centrum von BC nach §. 9, und da BC ein Quadrant ist, so ist der Winkel A ein rechter nach §. 8, und also CA senkrecht auf AB.

Zusatz 1. Stehen zwei Hauptkreise senkrecht auf einander, so geht der eine jedesmal durch die beiden Mittelpunkte des anderen.

Zusatz 2. Wird ein Quadrant mit seinem einen Endpunkte auf einen Hauptbogen unter einem rechten Winkel gestellt, so ist der andere Endpunkt das Centrum des Hauptbogens.

Zusatz 3. Wenn sich mehre Hauptkreise in einem Punkte schneiden, so liegen ihre Mittelpunkte in einem und demselben Hauptkreise, dessen Centrum jener Punkt ist.

Zusatz 4. Legt man durch die sphärischen Mittelpunkte zweier Hauptkreise einen dritten Haupt-

kreis, so steht dieser auf den beiden vorigen senkrecht.

Zusatz 5. Stehen zwei Hauptbogen senkrecht auf einem dritten, so ist der Durchschnittspunkt der beiden ersten das Centrum des dritten.

Zusatz 6. Wenn man aus einem Punkte im einen Schenkel eines rechten Winkels einen Hauptkreis beschreibt, so schneidet er den zweiten Schenkel in einem Punkte, welcher das Centrum des ersten Schenkels ist.

§. 11.

Ein Winkel zweier Hauptbogen ist gleich der Distanz ihrer homologen Mittelpunkte von einander, und ergänzt die Distanz ihrer nicht homologen Mittelpunkte von einander zu 180°.

Die Mittelpunkte zweier Hauptkreise heißen aber homolog, welche sich auf einerlei Seite der aus ihnen beschriebenen Hauptkreise befinden; nicht homologe Mittelpunkte zweier Hauptbogen haben eine solche Lage in dem durch sie gehenden Hauptkreise, daß man in ihm von den beiden Hauptkreisen nach ihren Mittelpunkten auf einander entgegengesetzten Wegen gelangt.

In Fig. 5. α seien a und b die homologen Mittelpunkte der beiden Hauptbogen AC und BC, und ihre Gegenpunkte seien a′ und b′, so sind auch a′ und b′ homologe Mittelpunkte von AC und BC, aber a und b′ oder auch b und a′ sind nicht homologe Mittelpunkte der Hauptbogen AC und BC.

Da nach §. 10. 4. CA und CB auf dem Hauptkreise aba′b′ in A und B senkrecht stehen, so ist C das Centrum dieses Hauptkreises nach §. 10. 3., und der Bogen AB ist nun das Maaß des Winkels ACB nach §. 8. Da aber $aA = 90°$ und $bB = 90°$ ist, so ist $aA = bB$ oder $ab + bA = bA + AB$, und also $ab = AB$.

Da ferner $ab = a'b'$ ist, so ist auch $a'b' = AB$; das Maaß des Winkels ACB ist also gleich dem Bogen ab oder a′b′.

Da ferner $bB = 90°$ und $a'A = 90°$ ist, so ist $bB + a'A = 180°$, oder $bB + AB + a'A = 180°$, oder $ba' + AB = 180°$ und da $b'a = a'b$ ist, so ist auch $a'b + AB = 180°$; der Winkel ACB ergänzt also den Bogen a′b oder ab′ zwischen den nicht homologen Mittelpunkten seiner Schenkel zu 180°.

Die Figur 5. β stellt den Fall dar, in welchem der Winkel $ACB > 90°$; dieser Winkel hat zum Maaße den Bogen Aba′B′ und intercipirt nun auf dem durch die Mittelpunkte seiner Schenkel gehenden Hauptkreise zwei nicht homologe Mittelpunkte dieser

Schenkel. Daß auch nun ab = a'b' = ACB und ba' + ACB oder auch ab' + ACB = 180° sei, wird wie vorhin bewiesen.

Wenn der Winkel ACB ein rechter ist, so geht jeder Schenkel durch einen Mittelpunkt des anderen Schenkels, und nun fällt alle Zweideutigkeit weg.

§. 12.

Die sphärische Entfernung zweier Punkte, welche nicht Gegenpunkte sind, von einander ist immer kleiner als die Summe ihrer Entfernungen von einem dritten Punkte außerhalb des durch sie gehenden Hauptkreises.

Sind A und B (Fig. 6) keine Gegenpunkte, so ist der Bogen AB, welcher ihre Entfernung von einander ausdrückt, kleiner als 180°, daher ist der Winkel AMB am Mittelpunkte M der Kugel ein hohler Winkel; die Entfernungen AC und BC von einem dritten Punkte C der Kugelfläche können einzeln schon so groß oder noch größer als AB sein, und in diesem Falle bedarf der Satz keines Beweises.

Wenn aber AC und BC einzeln kleiner als AB sind, so schneide man den Bogen AD = AC auf AB ab, und ziehe durch D eine Gerade aDb, welche die Kugelradien MA und MB in den Punkten a und b schneidet, was offenbar möglich ist, da der Winkel AMB < 180° ist; zieht man noch die Geraden Ca und Cb, dann sind die Dreiecke MaD und MaC offenbar congruent, weil MD = MC, Winkel aMD = aMC und Ma eine gemeinschaftliche Seite der beiden Dreiecke ist; daher ist Da = Ca und da Ca + Cb > ab ist, so ist auch Cb > Db; da aber die Dreiecke DMb und CMb in den beiden anderen Seiten übereinstimmen, so ist der Winkel CMb > DMb, und also auch der Bogen CB > DB, und da CA = DA ist, so ist CA + CB > AB.

Zusatz 1. **Wenn die Summe der Entfernungen zweier Punkte A und A, welche nicht Gegenpunkte sind, von einem dritten Punkte C gleich ist ihrer Entfernung AB von einander, so befinden sich die drei Punkte A, B, C in einem Hauptbogen.**

Denn befände sich der Punkt C nicht im Bogen AB, so wäre CA + CB > AB.

Zusatz 2. Die Summe der Entfernungen eines Punktes C von zwei Gegenpunkten A und B ist immer = 180°.

Denn legt man durch C und A einen Hauptkreis, so geht er auch durch den Gegenpunkt B von A, und es ist CA + CB = AB = 180°.

§. 13.

Da die Kreise die einfachsten Linien auf der Oberfläche einer Kugel sind, so wird die Sphärik in Bezug darauf sehr füglich eingetheilt in die niedere oder elementare, und in die höhere Sphärik. Die niedere oder elementare Sphärik handelt also zunächst von den Kreisen und den durch eine Verbindung von Kreisen entstehenden Figuren; die höhere Sphärik handelt von den übrigen krummen Linien auf der Kugel und von den in ihrer Fläche durch eine Verbindung solcher krummen Linien mit Kreisen und anderen krummen Linien entstehenden Figuren.

Die niedere Sphärik, welche in diesem Werke behandelt wird, wird also zunächst von solchen Figuren auf der Kugel handeln, welche vom Hauptbogen, die die Seiten der Figur heißen, begrenzt sind, und dann später zur Betrachtung der Nebenkreise und ihrer Verbindung mit anderen Kreisen (Haupt- und Nebenkreisen) übergehen.

In Hinsicht auf die Methode der Behandlung der elementaren Sphärik kann dieselbe ebenfalls eingetheilt werden. Man kann nämlich die Gesetze der Abhängigkeit in der Lage und Größe der Theile der Figuren bloß durch geometrische Constructionen finden, und in Formeln ausdrücken, wobei, wenn es nöthig ist, die goniometrischen oder auch cyklischen Functionen zur Anwendung kommen, oder man kann auch die Anwendung der Analysis oder allgemeinen Arithmetik, und insbesondere desjenigen Theiles derselben, welcher die Algebra heißt, so sehr vorherrschen lassen, daß man von einigen wenigen geometrischen Betrachtungen ausgehend, alle übrigen Formeln und Gleichungen, wodurch die Gesetze sphärischer Constructionen ausgedrückt werden, ohne Rückblick auf die Construction, bloß durch Rechnung findet.

Jene zuerst genannte Methode verdient offenbar in der elementaren Sphärik den Vorzug vor der anderen, sie ist die geometrische Methode, und führt zu einem höheren Grade der Einsicht in die Constructionen selbst, diese führt zu einer größeren Einsicht in den arithmetischen Zusammenhang unter den Formeln und Gleichungen, und ist auch als eine Vorübung zur eigentlichen analytischen Sphärik überhaupt wichtig.

Die Anwendung der ersten Methode giebt die construirende oder geometrische Sphärik, die Anwendung der zweiten Methode gibt die rechnende oder algebraische Sphärik, wovon die sphärische Trigonometrie ein Theil ist.

Werden ebene Figuren auf die Kugelfläche projicirt, so kann man aus den bekannten Eigenschaften dieser Figuren nicht selten auf eine sehr einfache Weise einen Schluß machen auf die Eigenschaften der durch die Projectionen erhaltenen spärischen Figuren, und dieses Projections-Verfahren, wovon später ausführlich gehandelt wird, ist offenbar ebenfalls eine geometrische

Methode, welche besonders insofern wichtig ist, als dadurch der Zusammenhang zwischen der Planimetrie und Sphärik aufgehellet wird. Viel einfacher ist aber noch das gerade entgegengesetzte Verfahren, wodurch man aus den Eigenschaften sphärischer Constructionen die Eigenschaften der analogen ebenen Constructionen herleitet; vergrößert man nämlich den Radius der Kugel, und geht man hiermit vollends zu den Grenzen über, so verwandelt sich die spärische Construction in eine ebene, und demgemäß erscheint die gesammte Planimetrie nur als ein besonderer Fall der Sphärik.

Alle diese Methoden ergänzen einander in ihren Leistungen, und bewirken eine vielseitige Kenntniß der Gegenstände, welche in der Sphärik behandelt werden.

Zweiter Abschnitt.

Von den sphärischen Vielecken, insbesondere von den Dreiecken.

§. 14.

Erklärung. Ein sphärisches Dreieck ist ein von drei Hauptbogen eingeschlossener Theil der Kugelfläche. Wird ein Theil der Kugelfläche von mehr als drei Hauptbogen eingeschlossen, so heißt er ein (sphärisches) Vieleck oder Polygon. Die genannten Hauptbogen, welche ein Dreieck oder Vieleck einschließen, machen zusammen den Umfang oder Perimeter der Figur aus, und heißen ihre Seiten. Unter den Winkeln einer Figur versteht man immer ihre inneren Winkel, und jede Seite der Figur schließt mit der nächsten Seite einen inneren Winkel ein, der seine Oeffnung dem Inneren der Figur zukehrt. Ein Winkel, den eine Seite einer Figur mit der Verlängerung der nächsten Seite einschließt, heißt ein äußerer Winkel der Figur.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks gleich, so heißt es gleichschenkelig, und die dritte Seite heißt die Basis oder Grundlinie des Dreiecks; sind die drei Seiten des Dreiecks gleich, so heißt es gleichseitig; sind unter den drei Seiten eines Dreiecks keine zwei einander gleich, so heißt es ungleichseitig.

Unter den Spitzen oder auch Ecken einer Figur versteht man die Scheitel ihrer inneren (und also auch äußeren) Winkel.

Zusatz 1. Obgleich Dreiecke, und überhaupt Figuren, mit Seiten, welche Halbkreise oder noch größer sind, und mit überstumpfen oder auswärts gehenden Winkeln mög-

lich sind, so darf gleichwohl als Grundsatz festgestellt werden, daß jede Seite und auch jeder Winkel $< 180^0$ sei, weil man jene Figuren leicht auf solche zurückbringen kann, in welchen jede Seite und auch jeder Winkel $< 180^0$ ist. Die Beachtung des genannten Grundsatzes aber vereinfacht die Lehre von den sphärischen Figuren sehr, indem man dadurch zahllosen Ausnahmen und Unterscheidungen ausweicht.

Zwei nächste Ecken einer Figur sind also nie Gegenpunkte, weil die Seite zwischen ihnen sonst ein Halbkreis wäre; ferner machen zwei benachbarte Seiten einer Figur nie einen Hauptbogen aus, weil sonst der von ihnen eingeschlossene Winkel $= 180^0$ wäre.

Zusatz 2. Zieht man Fig. 7. vom Mittelpunkte M der Kugel nach den Ecken eines Dreiecks ABC die Geraden MA, MB, MC, so sind sie Radien der Kugel, und die drei Ebenen (Seitenebenen) AMB, AMC, BMC schließen an M eine körperliche Ecke MABC ein, welche dreikantig heißt, und deren Kanten MA, MB, MC sind, der Punkt M heißt in Bezug auf die körperliche Ecke ihr Scheitel.

Die drei Winkel AMB, BMC, AMC heißen die Seiten-Winkel der körperlichen Ecke und die drei Seiten AB, BC, AC des sphärischen Dreiecks sind offenbar jede das Maaß für einen der drei Seiten-Winkel.

Ferner ist der Flächen-Winkel AMCB gleich dem Winkel ACB, der Flächen-Winkel CMBA gleich dem Winkel CBA, und der Flächen-Winkel BAMC gleich dem Winkel BAC des sphärischen Dreiecks (nach §. 4).

In ähnlicher Weise gehört überhaupt zu jedem sphärischen Polygone eine mehrkantige körperliche Ecke von der Beschaffenheit, daß jeder von ihren Seiten-Winkeln zum Maaße eine Seite des sphärischen Polygones, und jeder von ihren Flächen-Winkeln zum Maaße einen inneren Winkel der sphärischen Figur hat.

Die Lehre von den sphärischen Polygonen fällt also mit der Lehre von den mehrkantigen körperlichen Ecken zusammen, und da diese partielle Begrenzungen der eckigen Körper sind, so wird dadurch die Wichtigkeit der Lehre von den sphärischen Polygonen, und insbesondere von den sphärischen Dreiecken, beträchtlich gesteigert.

§. 15.

Erklärung. Wenn die Ecken eines Dreiecks die Gegenpunkte sind von den Ecken eines anderen, so heißen die beiden Dreiecke Gegendreiecke.

Lehrsatz. Zwei Gegendreiecke stimmen in ihren Seiten und Winkeln überein.

In Fig. 8. sei A' der Gegenpunkt von A, B' von B und C' von C, so sind die Dreiecke ABC und A'B'C' Gegendreiecke, und da, wenn M der Mittelpunkt der Kugel ist, der Winkel AMB seinem Vertikal-Winkel A'MB' gleich ist, so ist ist auch die Seite AB = A'B'. Aus gleichem Grunde ist BC = B'C' und AC = A'C'. Ferner ist der Flächen-Winkel BAMC gleich seinem Vertikal-Winkel B'A'MC' und also (nach §. 4) auch der Winkel BAC gleich B'A'C'; aus gleichem Grunde ist aber auch der Winkel ABC = A'B'C', und ACB = A'C'B'.

Zusatz 1. Zu zwei Gegendreiecken ABC und A'B'C' gehören also zwei körperliche Ecken MABC und MA'B'C', welche in den Seiten- und Flächen-Winkeln übereinstimmen und Gegenecken oder auch Vertikal-Ecken heißen können.

Zusatz 2. Sind zwei Dreiecke Gegendreiecke, so hat jeder Punkt im Umfange des einen seinen Gegenpunkt im Umfange des anderen.

Denn nimmt man z. B. einen Punkt im Bogen AB an, so befindet sich sein Gegenpunkt in demselben Hauptkreise, wozu AB gehört (nach §. 2), und zwar im Bogen A'B'.

Zusatz 3. Zu jedem Polygone gehört ein Gegenpolygon, und die beiden Figuren haben eine solche Lage und Beschaffenheit, daß jeder Punkt im Umfange der einen Figur seinen Gegenpunkt im Umfange der anderen Figur hat.

Zwei Gegenfiguren stimmen in allen Seiten und Winkeln überein.

§. 16.

Erklärung. Wenn man zwei Seiten eines Dreiecks über ihre Durchschnittspunkte mit der dritten Seite hinaus verlängert, bis sie sich zum zweiten Male schneiden, so entsteht ein zweites Dreieck, welches ein Nebendreieck des ersten heißt.

Lehrsatz. Zwei Nebendreiecke stimmen in einer Seite und ihrem Gegenwinkel überein, die beiden anderen Seiten und auch die beiden anderen Winkel des einen sind aber die Supplemente von den beiden anderen Seiten und Winkeln des andern Dreiecks.

Werden Fig. 9. die Seiten CA und CB über A und B hinaus verlängert, bis sie sich wieder in C' schneiden, so ist A'C'B' das Nebendreieck von ACB an der Seite AB, und es ist offenbar AB = A'B', C = C', A + A' = 180°, B + B' = 180°, AC + A'C' = 180°, BC + B'C' = 180°, denn die Punkte C' und C sind Gegenpunkte.

Zusatz 1. Ein sphärisches Dreieck hat drei Nebendreiecke, an jeder Seite eines.

In Fig. 10 sind ABC′, BCA′, ACB′ die drei Nebendreiecke des Dreiecks ABC an den Seiten AB, BC, AC desselben.

Zusatz 2. Wenn man zu einem Dreiecke seine drei Nebendreiecke construirt, so hat man vier Dreiecke, und da zu jedem dieser vier Dreiecke noch ein Gegendreieck gehört, so erhält man, wenn man auch noch diese vier Gegendreiecke construirt, im Ganzen acht Dreiecke, welche zusammen die Oberfläche der ganzen Kugel einnehmen. Drei durch einander gelegte Hauptkreise theilen also die Oberfläche der Kugel in acht Dreiecke. In Fig. 11. ist A′ der Gegenpunkt von A, B′ von B und C′ von C, und die acht Dreiecke sind ABC, ABC′, ACB′, BCA′, A′B′C′, A′B′C, A′C′B B′C′A.

Anmerkung. Wenn man einen Satz, welcher von den Seiten und Winkeln eines Dreiecks ABC gilt, auf eines seiner drei Nebendreiecke anwendet, so erhält man, da das Nebendreieck auf eine so einfache Weise vom Dreiecke ABC abhängt, in der Regel einen anderen Satz oder eine andere Form des Satzes von den Seiten und Winkeln des ursprünglichen Dreiecks ABC, wodurch eine große Vereinfachung in den Untersuchungen über die sphärischen Dreiecke gewonnen wird.

§. 17.

Lehrsatz. Zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammen größer, als die dritte Seite allein. Denn da unter den drei Ecken eines Dreiecks keine der Gegenpunkt einer anderen Ecke ist, so ist (nach §. 12.) die Entfernung zweier Ecken von einander kürzer als die Summe ihrer Entfernungen von der dritten Ecke; daher ist (in Fig. 10)

$$AC + AB > BC$$
$$AB + BC > AC$$
$$AC + BC > AB.$$

Zusatz. Nach dem Vorigen ist $AC > \pm (BC - AB)$, $AB > \pm (AC - BC)$ und $BC > \pm (AB - AC)$; daher kann der vorige Satz auch also ausgedrückt werden: der Unterschied zwischen zwei Seiten eines Dreiecks ist immer kleiner, als die dritte Seite selbst.

§. 18.

Lehrsatz. Der Umfang eines Dreiecks ist immer kleiner als ein Hauptkreis. Um zu beweisen, daß in Fig. 10 die Summe $AB + BC + AC < 360^0$ sei, wende man den vorhin bewiesenen Satz vom Dreiecke ABC auf eines seiner drei Nebendreiecke an, z. B. auf das Dreieck ABC′, und es ist also

$$AC' + BC' > AB.$$

Da nun aber $AC' = 180^0 - AC$ und $BC' = 180^0 - BC$, so ist $AC' + BC' = 360^0 - AC - BC$; es ist also offenbar $360^0 - AC - BC > AB$ oder $AB + AC + BC < 360^0$.

§. 19.

Lehrsatz. Wenn man aus den drei Ecken eines Dreiecks ABC (Fig. 12) Hauptkreise beschreibt, so wird durch diese drei Hauptkreise die Oberfläche der Kugel in acht Dreiecke getheilt, von denen jedes die Eigenschaft hat, daß seine drei Ecken hin wiederum die Mittelpunkte für die Seiten des Dreiecks ABC sind.

Denn die aus zwei Ecken, z. B. aus A und B beschriebenen Hauptkreise schneiden sich (nach §. 9. Zusatz) in zwei Punkten, welche die Mittelpunkte des Bogens AB sind; das Gleiche gilt von den beiden Durchschnittspunkten der aus A und C beschriebenen Kreise und auch von den zwei Durchschnittspunkten der aus B und C beschriebenen Hauptkreise; daher hat jedes von den acht neuen Dreiecken die Eigenschaft, daß seine Ecken die Mittelpunkte für die Seiten des Dreiecks ABC sind, so wie umgekehrt die Ecken des Dreiecks ABC die Mittelpunkte für die Seiten des ersten Dreiecks sind.

Zusatz. Unter den acht neuen Dreiecken giebt es eines von der Beschaffenheit, daß je zwei von seinen Ecken die nicht homologen Mittelpunkte für die Seiten des Dreiecks ABC sind; und dann sind auch umgekehrt je zwei von den Ecken des Dreiecks ABC die nicht homologen Mittelpunkte für die Seiten jenes Dreiecks.

In Fig. 12. sind ABC und A'B'C' zwei Dreiecke von der in Rede stehenden Beschaffenheit; die Ecken A' und C' sind nicht homologe Mittelpunkte der Seiten BC und BA, und so sind auch umgekehrt A und C nicht homologe Mittelpunkte der Seiten B'C' und B'A'; ein Gleiches gilt von den übrigen paarweise genommenen Ecken der beiden Dreiecke.

§. 20.

Erklärung. Zwei Dreiecke von der Beschaffenheit, daß je zwei von den Ecken des einen allemal nicht homologe Mittelpunkte für zwei Seiten des anderen Dreiecks sind, werden reciproke Dreiecke genannt.

Zusatz. Ist ein Dreieck gegeben, so ist das dazu gehörige reciproke Dreieck in Ansehung seiner Lage und Beschaffenheit völlig bestimmt. Man wird es auch leicht von seinem Gegendreiecke unterscheiden.

Anmerkung. Obgleich es in der Mathematik überhaupt und in der Sphärik insbesondere viele Wechsel-Beziehungen giebt,

so ist gleichwohl kein Mißverständniß zu befürchten, wenn die der vorstehenden Erklärung gemäß in einem Wechsel-Zusammenhange stehenden Dreiecke vorzugsweise reciproke genannt werden. Die Wichtigkeit dieser Reciprocität wird später erhellen.

§. 21.

Lehrsatz. Zwei reciproke Dreiecke stehen in einem solchen Zusammenhange, daß jede Seite des einen den Gegenwinkel des anderen Dreiecks zu 180° ergänzt.

Sind (Fig. 12.) ABC und A'B'C' zwei reciproke Dreiecke, so ist

$$AB + C' = 180°, \quad A'B' + C = 180°,$$
$$AC + B' = 180°, \quad \text{und} \quad A'C' + B = 180°,$$
$$BC + A' = 180°, \quad B'C' + A = 180°,$$

Da nämlich A und B zwei nicht homologe Mittelpunkte der Seiten A'C' und B'C' des reciproken Dreiecks A'B'C' sind, so ergänzt (nach §. 11.) der Winkel A'C'B' die Entfernung AB der beiden Mittelpunkte seiner Schenkel zu 180°, und ebenso erhellet die Wahrheit der fünf übrigen Behauptungen.

Zusatz 1. Stimmen zwei Dreiecke in allen Seiten und Winkeln überein, so stimmen auch ihre reciproken Dreiecke in allen Winkeln und Seiten überein.

Zusatz 2. Wenn ein Winkel eines Dreiecks ein rechter ist, so hat das reciproke Dreieck eine Seite, welche ein Quadrant ist.

§. 22.

Erklärung 1. Wenn ein Winkel eines Dreiecks ein rechter ist, so heißt es in Bezug auf ihn rechtwinkelig, die Gegenseite des rechten Winkels heißt die Hypotenuse, und die beiden anderen Seiten, welche also den rechten Winkel einschließen, heißen die Katheten des Dreiecks.

In Fig. 13. sei C der rechte Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks ABC, dann ist AB die Hypotenuse, die Seiten CA und CB sind die Katheten des Dreiecks.

Erklärung 2. Wenn eine Seite eines Dreiecks ein Quadrant ist, so heißt es in Bezug auf diese Seite rechtseitig, der Gegenwinkel des Quadranten heißt die Hypotenuse, und die beiden anderen Winkel heißen die Katheten des rechtseitigen Dreiecks.

Wenn in Fig. 14. die Seite AB des Dreiecks ACB ein Quadrant ist, so ist C die Hypotenuse, die Winkel A und B sind die Katheten des rechtseitigen Dreiecks ACB.

Anmerkung. Da die Eigenschaften der rechtwinkeligen Dreiecke mit denen der rechtseitigen in vielen Stücken übereinkommen, und diese Uebereinstimmung durch eine abweichende Termi-

nologie oder durch ihren völligen Mangel würde gestört werden, so sind die sonst nicht üblichen Benennungen der Winkel eines rechtseitigen Dreiecks, und selbst die Benennung »rechtseitig« von dem Verfasser in Vorschlag gebracht werden.

§. 23.

Lehrsatz. Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist größer als zwei rechte und kleiner als sechs rechte Winkel.

Beweis. Man construire (in Fig. 12.) zu ABC das reciproke Dreieck A'B'C', so ist

$$B'C' + A = 180^\circ,$$
$$A'C' + B = 180^\circ,$$
$$B'A' + C = 180^\circ,$$

also $A + B + C + A'B' + A'C' + B'C' = 540^\circ$ und daher $A + B + C < 540^\circ$, und da $A'B' + A'C' + B'C' < 360^\circ$ ist, so ist $A + B + C > 180^\circ$.

Zusatz. Der eine Satz kann auch so ausgedrückt werden: Wenn man die Summe zweier Winkel eines Dreiecks noch um den dritten Winkel vermehrt, so erhält man mehr als zwei rechte Winkel, und nun tritt er in einen Gegensatz mit dem folgenden.

§. 24.

Lehrsatz. Die Summe zweier Winkel eines Dreiecks ist kleiner, als der um 180° vermehrte dritte Winkel. In Fig. 12. ist

$$A + B < C + 180^\circ,$$
$$A + C < B + 180^\circ,$$
$$B + C < A + 180^\circ;$$

denn da $A + B'C' = 180^\circ$, $B + A'C' = 180^\circ$ und $C + A'B' = 180^\circ$ ist, so ist $A + B - C = 180^\circ - (B'C' + A'C' - A'B')$ oder auch $A + B + B'C' + A'C' - A'B' = 180^\circ + C$ und da $B'C' + A'C' > A'B'$ ist, so ist $A + B < 180^\circ + C$. Ebenso erhellet die Wahrheit der beiden anderen Behauptungen.

Zusatz. Wenn der Winkel $C < A + B$ ist, so hat man $A + B - C < 180^\circ$, d. h. die Summe zweier Winkel, vermindert um die Größe des dritten Winkels, ist kleiner als zwei rechte Winkel.

§. 25.

Lehrsatz. Ein äußerer Winkel an einem Dreiecke ist immer kleiner als die Summe der beiden ihm gegenüberstehenden inneren Winkel, und wenn man den äußeren Winkel um einen dieser beiden inneren Winkel vermehrt, so ist er größer, als der andere.

In Fig. 15. sei D der äußere Winkel; die beiden ihm gegenüberstehenden Winkel heißen A und B, und es ist

$$D < A + B,$$
$$D + A > B,$$
$$D + B > A.$$

Da nämlich $A + B + C > 180°$ und auch $C + D = 180°$ ist, so ist $A + B + C > C + D$, und also $A + B > D$.

Da ferner $B + C < 180° + A$ ist, so ist auch $B + C < C + D + A$ oder $B < D + A$; und da $A + C < 180° + B$, so ist auch $A + C < C + D + B$, oder $A < D + B$.

Zusatz. Man kann die beiden Sätze auf eine mehr übereinstimmende Weise also ausdrücken: Ein äußerer Winkel ist kleiner als die Summe der beiden ihm gegenüberstehenden inneren Winkel, und größer als ihr Unterschied.

§. 26.

Erklärung. Wenn zwei Dreiecke in allen Seiten und Winkeln und auch in der Reihefolge derselben übereinstimmen, so heißen die Dreiecke congruent.

Zusatz 1. Wenn die concave Seite eines Dreiecks so auf die convexe Seite eines anderen Dreiecks gelegt werden kann, daß die Ecken des einen mit den Ecken des anderen zusammen fallen, so fallen auch die Seiten des einen mit den Seiten des anderen Dreiecks zusammen (da vorausgesetzt wird, daß die Dreiecke Theile derselben Kugelfläche sind), und die Dreiecke decken sich, d. h. alle Grenzen und die zwischen ihnen enthaltene Fläche des einen Dreiecks identificiren sich mit den Grenzen und der zwischen ihnen enthaltenen Fläche des anderen Dreiecks.

Zusatz 2. Dreiecke, welche so übereinander gelegt werden können, daß sie sich decken, sind congruent.

Zusatz 3. Sind zwei Dreiecke congruent, so sind auch ihre reciproken Dreiecke congruent.

§. 27.

Erklärung. Wenn zwei Dreiecke in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen, aber die Reihefolge, in welcher diese Stücke beim einen Dreiecke mit einander verbunden sind, die umgekehrte oder entgegengesetzte von derjenigen ist, in welcher die gleich großen Stücke des anderen Dreiecks mit einander verbunden sind, so heißen die Dreiecke symmetrisch oder auch symmetrisch gleich.

Zusatz 1. Zwei symmetrische Dreiecke können im Allgemeinen nicht so übereinander gelegt werden, daß sie sich decken.

Zusatz 2. Zwei Gegendreiecke sind immer symmetrisch, aber nicht umgekehrt.

Zusatz 3. Um zu einem Dreiecke das symmetrische herzuleiten, braucht man nur sein Gegendreieck zu construiren.

Zusatz 4. Sind zwei Dreiecke symmetrisch im Bezug auf ein drittes Dreieck, so sind sie congruent.

Zusatz 5. Sind zwei Dreiecke symmetrisch, so sind auch ihre reciproken Dreiecke symmetrisch.

Anmerkung. Zwei symmetrische Dreiecke, und auch die ihnen zugehörigen körperlichen Ecken sind in ähnlicher Art von einander verschieden, wie die rechte Hand von der linken, oder wie die Form eines Gegenstandes von der seines Bildes in einem ebenen Spiegel.

§. 28.

Lehrsatz. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel überein, so stimmen sie auch in der dritten Seite und den beiden an ihr befindlichen Winkeln überein (und sind also entweder congruent oder symmetrisch).

Wenn in Fig. 16. die Seite $CA = C'A'$, $CB = C'B'$ und Winkel $C = C'$ ist, so sind die Dreiecke ACB und $A'B'C'$ offenbar congruent; denn legt man C auf C' und CA über CA', dann fällt A auf A', weil $CA = C'A'$ ist, und auch CB über $C'B'$, weil die Winkel C und C' gleich sind, und noch B auf B', weil $CB = C'B'$ ist. Daher ist $AB = A'B'$, $A = A'$ und $B = B'$.

Wenn ferner in den Dreiecken ABC und abc die Seite $CA = ca$, $CB = cb$ und $C = c$ ist, so construire man zu abc das symmetrische Dreieck $A'B'C'$, dann ist $ca = C'A' = CA$, $cb = C'B' = CB$, $c = C' = C$, $ab = A'B'$, $b = B'$ und $a = A'$ (nach §. 26); daher sind nun die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ nach dem vorigen Beweise congruent, und es ist also $AB = A'B' = ab$; $A = A' = a$ und $B = B' = b$.

Zusatz. Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden an ihr befindlichen Winkeln überein, so stimmen sie auch in dem dritten Winkel und den beiden ihn einschließenden Seiten überein (und sind entweder congruent oder symmetrisch.)

Der Beweis kann auf ähnliche Art geführt werden, wie im analogen Falle der Planimetrie; indessen führt die Reciprocität noch schneller zum Ziele. Da nämlich die beiden Dreiecke in einer Seite und den beiden an ihr liegenden Winkeln übereinstimmen, so stimmen die reciproken Dreiecke in einem Winkel und den beiden ihn einschließenden Seiten überein, und also nach dem vorigen Lehrsatze auch in der dritten Seite und den beiden an ihr befindlichen Winkeln; eben deswegen stimmen aber die ursprünglichen Dreiecke in dem dritten Winkel und den beiden ihn

einschließenden Seiten überein, weil diese Stücke die Supplemente von jenen sind.

§. 29.

Lehrsatz. Wenn ein Hauptbogen den Winkel am Scheitel in einem gleichschenkeligen Dreiecke halbirt, so wird das Dreieck dadurch in zwei rechtwinkelige Dreiecke getheilt, welche symmetrisch sind.

In Fig. 17. sei CA = CB und der Winkel ACD = BCD, dann sind, weil die Seite CD den beiden Dreiecken ACD und BCD gemeinschaftlich ist, diese beiden Dreiecke nach §. 28 symmetrisch, also ist AD = DB; ferner ist Winkel CDA = CDB, und da diese Winkel Nebenwinkel sind, so ist jeder ein rechter; endlich ist Winkel A = B.

Zusatz 1. Sind zwei Seiten eines Dreiecks gleich, so sind auch ihre Gegenwinkel gleich.

Zusatz 2. In einem gleichseitigen Dreiecke sind auch die drei Winkel gleich groß.

Zusatz 3. Sind zwei Winkel eines Dreiecks gleich, so sind auch ihre Gegenseiten gleich.

Denn sind in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so hat das reciproke Dreieck zwei gleiche Seiten, und also ihnen gegenüber gleiche Winkel; daher sind auch ihre Supplemente gleich, und also sind auch im ursprünglichen Dreiecke die beiden Seiten gleich, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen.

Zusatz 4. Sind in einem Dreiecke die drei Winkel gleich, so ist es auch gleichseitig.

Zusatz 5. Zwei symmetrische Dreiecke, welche gleichschenkelig sind, sind auch congruent.

§. 30.

Lehrsatz. Sind zwei Seiten eines Dreiecks zusammen = 180°, so ist auch die Summe ihrer Gegenwinkel = 180°; wenn ferner ein Hauptbogen den von jenen Seiten eingeschlossenen Winkel halbirt, so halbirt er auch seine Gegenseite, und das Dreieck wird dadurch in zwei rechtseitige Dreiecke getheilt.

In Fig. 18. sei AC + BC = 180°; man verlängere AC und AB, bis sie sich in F, dem Gegenpunkte von A schneiden, dann ist AB + BF = 180°, und auch AC + CF = 180°; da also AC + BC = AC + CF, mithin BC = CF ist, so ist das Dreieck BCF gleichschenkelig; wird in ihm CE gezogen so, daß der Winkel BCE = FCE ist, so sind die Dreiecke BCE und FCE symmetrisch, und CE steht senkrecht auf BF.

Da nun Winkel BCD die Hälfte von BCA, und BCE die Hälfte von BCF ist, so ist DCE = BCD + BCE = $\frac{BCA + BCF}{2}$ oder DCE = 90°. Da aber CD und ED auf CE senkrecht stehen, so ist D das Centrum von CE (nach §. 10. 5.) und also DC = DE = 90°; daher sind die Dreiecke ADC und BDC rechtseitig (nach §. 22.)

Da ferner DE = 90° und BE die Hälfte von BF ist, so ist DB die Hälfte von BA oder DB = DA.

Da endlich der Winkel CBF = F = A und CBF + B = 180° ist, so ist auch A + B = 180°.

Zusatz 1. Sind zwei Winkel eines Dreiecks zusammen = 180°, so sind auch ihre Gegenseiten zusammen = 180°.

Denn wenn A + B = 180° ist, so ist auch der Winkel CFB = CBF, und also CB = CF (nach §. 29. 3.) und da CA + CF = 180° ist, so ist auch CA + CB = 180°.

Zusatz 2. Sind zwei Seiten eines Dreiecks zusammen = 180°, so ist auch das reciproke Dreieck von der Art, daß sich zwei Seiten desselben zu 180° ergänzen.

Es sei in Fig. 12. CA + CB = 180° so ist auch A + B = 180° und da A + B′C′ = 180°, auch B + A′C′ = 180° und also A + B + A′C′ + B′C′ = 360° ist, so ist auch 180° + A′C′ + B′C′ = 360° oder einfacher A′C′ + B′C′ = 180°.

§. 31.

Lehrsatz. Stimmen zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, so stimmen sie auch in den drei Winkeln überein.

Man bringe das eine Dreieck abc in Fig. 19 so an das andere, daß die gleichen Seiten ab und AB sich decken, und die gleichen Seiten ac und AC von A aus und die gleichen Seiten bc und BC von B aus sich auf entgegengesetzten Seiten von AB befinden, wobei also die concaven Seiten der beiden Dreiecke nach einerlei Gegend, nämlich nach dem Mittelpunkte der Kugel gekehrt sind (wenn dieses nicht geht, so muß statt des einen von den beiden Dreiecken das symmetrische genommen werden), und ziehe noch den Hauptbogen Cc, welcher den Winkel C in x und p und den Winkel c in y und q theilt.

Da nun die Dreiecke CAc u. CBc gleichschenkelig sind, so ist x = y und p = q, und also x + p = y + q oder C = c.

Legt man die beiden Dreiecke mit den gleichen anderen Seiten an einander, so beweiset man ebenso, daß A = a und B = b ist.

Man gelangt nun aber auch unmittelbar nach §. 28. zum Schluße, daß die beiden Dreiecke ACB und acb symmetrisch sind.

Anmerkung. Eine leicht findende Aenderung im Beweise ist nöthig, wenn die Linie Cc sich außerhalb des Vierecks ACBc befindet.

Zusatz. Stimmen zwei Dreiecke in den drei Winkeln überein, so stimmen sie auch in den drei Seiten überein.

Denn da die beiden Dreiecke in den drei Winkeln übereinstimmen, so stimmen die reciproken Dreiecke in den drei Seiten, und daher auch in den drei Winkeln, mithin auch in ihren Supplementen überein, und da diese einerlei Maße mit den Seiten der ursprünglichen Dreiecke haben, so stimmen diese also in den Seiten überein.

§. 32.

Lehrsatz. Sind zwei Seiten eines Dreiecks gleich groß, und verbindet ein Hauptbogen den Scheitel ihres Winkels mit der Mitte der Gegenseite, so halbirt er jenen Winkel und steht auf der dritten Seite senkrecht; wenn sich aber zwei Seiten eines Dreiecks zu 180° ergänzen und ein Hauptbogen den Scheitel ihres Winkels mit der Mitte der Gegenseite verbindet, so halbirt er auch den Winkel und ist ein Quadrant.

In Fig. 17. sei CA = CB und DA = DB, so stimmen die Dreiecke CAD und CBD in den drei Seiten überein, daher sind sie nach §. 31. symmetrisch, also ist Winkel ACD = BCD, und ADC = BDC, daher steht CD senkrecht auf AB.

In Fig. 18. sei CA + CB = 180° und DA = DB, dann ist BCF ein gleichschenkeliges Dreieck, wie im §. 30, und wenn E die Mitte von BF ist, so sind die Dreiecke BCE und FCE symmetrisch nach dem Vorigen; da nun $BD = \frac{BA}{2}$ und $BE = \frac{BF}{2}$ ist, so ist $DE = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, und da der Winkel DEC ein rechter ist, so ist D das Centrum von CE (nach §. 10. 2) und also der Winkel DCE = 90° (nach §. 10.); da ferner BCE die Hälfte des Winkels BCF ist, so ist BCD die Hälfte des Winkels BCA oder BCD = ACD; da D das Centrum von CE ist, so ist endlich noch DC ein Quadrant.

§. 33.

Lehrsatz. Sind zwei Seiten eines Dreiecks ungleich, so sind auch ihre Gegenwinkel ungleich, und zwar ist der Gegenwinkel der größeren Seite größer als der Gegenwinkel der kleineren Seite.

Wenn in Fig. 20 die Seite AB > AC ist, so ist auch Winkel C > B. Man schneide auf AB den Bogen AD = AC ab,

und ziehe CD, so befindet sich CD im Inneren des Winkels C, und theilt ihn in zwei Theile y und z. Im gleichschenkeligen Dreiecke ACD ist nun Winkel $x = y$ (nach §. 29), und da x der äußere Winkel am Dreiecke CDB ist, so ist $x + z > B$ (nach §. 25), und also auch $y + z > B$, oder auch $C > B$.

Zusatz. Sind zwei Winkel eines Dreiecks ungleich, so sind auch ihre Gegenseiten ungleich und zwar ist die Gegenseite des größeren Winkels größer als die Gegenseite des kleineren Winkels.

Ist in Fig. 12. der Winkel $B > A$, so ist Seite $AC > BC$. Denn da $B > A$, und die Seite $A'C'$ des reciproken Dreiecks $A'C'B'$ das Supplement von B, und $B'C'$ das Supplement von A ist, so ist offenbar $A'C' < B'C'$, und also $B' < A'$, also auch $180^\circ - B' > 180^\circ - A'$, oder $AC > BC$.

§. 34.

Lehrsatz. Sind zwei Seiten eines Dreiecks zusammen größer oder kleiner als 180°, so ist auch die Summe ihrer Gegenwinkel im ersten Falle größer, und im zweiten Falle kleiner als 180°.

Es sei in Fig. 18 die Summe $AC + BC > 180^\circ$, so ist auch $A + B > 180$. Denn verlängert man AC und AB, bis sie sich im Gegenpunkte F von A schneiden, so ist $AC + CF = 180^\circ$, und also $AC + BC > AC + CF$ oder $BC > CF$; daher ist im Dreiecke BCF auch Winkel $CFB > CBF$ oder $A > 180^\circ - B$, d. h. $A + B > 180^\circ$.

Ganz ebenso wird gezeigt, daß $A + B < 180^\circ$ ist, wenn $AC + BC < 180^\circ$ ist.

Zusatz. Sind zwei Winkel eines Dreiecks zusammen größer oder auch kleiner als 180°, so ist auch die Summe ihrer Gegenseiten im ersten Falle größer, und im zweiten Falle kleiner als 180°.

§. 35.

Erklärung 1. Wenn zwei Bogen, oder zwei Winkel, oder ein Bogen und ein Winkel entweder beide $< 90^\circ$ oder beide $= 90^\circ$ oder beide $> 90^\circ$ und $< 180^\circ$ sind, so heißen solche zwei Größen **gleichartig**; **ungleichartig** heißen sie, wenn die eine $< 90^\circ$ ist, während die andere $= 90^\circ$ oder $> 90^\circ$ ist.

Erklärung 2. Wenn die Länge eines Hauptbogens von der eines Quadranten mehr verschieden ist als die Länge eines anderen Hauptbogens von der Länge eines Quadranten, so heißt jener Hauptbogen der **präcedirende** oder **vorangehende**, gleichviel, ob er der kürzere oder längere von beiden sei. Ist z. B. der eine Bogen $= 47^\circ$, und der andere $= 150^\circ$, so ist

$90^\circ - 47^\circ = 43^\circ$ und $150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$; daher präcedirt hier der längere Bogen; ist aber der erste Bogen wieder $= 47^\circ$ und der zweite $= 120^\circ$, so ist $90^\circ - 47^\circ = 43^\circ$ und $120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$; daher präcedirt nun der kleinere Bogen. Ist der eine Bogen $= 120^\circ$ und der andere $= 150^\circ$, so präcedirt der größere Bogen, weil $120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ und $150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ ist. Ist der eine Bogen $= 47^\circ$ und der andere $= 40^\circ$, so ist $90^\circ - 47^\circ = 43^\circ$ und $90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, daher präcedirt hier der kleinere Bogen.

Wenn ebenso von zwei Winkeln die Größe des einen von der des rechten Winkels mehr verschieden ist, als die Größe des anderen von der Größe des rechten Winkels, so heißt jener Winkel der präcedirende oder vorangehende, gleichviel, ob er der kleinere oder auch größere sei.

Zusatz 1. Wenn zwei Stücke (Hauptbogen oder Winkel) gleich groß sind, so präcedirt keines derselben.

Zusatz 2. Wenn sich zwei Stücke zu 180° ergänzen, so präcedirt keines der beiden Stücke. Denn ist das eine Stück $= 90^\circ - x$, so ist das andere $= 90 + x$.

Zusatz 3. Von zwei Stücken, deren jedes $< 90^\circ$ ist, präcedirt das kleinere, und von zwei Stücken, deren jedes $> 90^\circ$ ist, präcedirt das größere.

Zusatz 4. Von zwei Stücken, welche zusammen $< 180^\circ$ sind, präcedirt das kleinere Stück. Denn das kleinere Stück von beiden ist $< 90^\circ$ und also $90^\circ - x$, das größere Stück ist also $< 90^\circ + x$, und unterscheidet sich also von 90° nicht so sehr, als das Stück $90^\circ - x$.

Zusatz 5. Von zwei Stücken, welche zusammen $> 180^\circ$ sind, präcedirt das größere Stück. Denn das größere Stück ist größer als 90° und etwa $= 90^\circ + x$; das kleinere Stück ist also $> 90^\circ - x$ und unterscheidet sich also von 90° nicht so sehr, als das Stück $90^\circ + x$.

Anmerkung. Die Benennung »präcedirendes oder vorangehendes Stück« findet sich in den früheren Schriften über die Sphärik nicht, und wird hier in Vorschlag gebracht. Der Vortheil, den diese Benennung gewährt, wird sich weiter unten zeigen.

§. 36.

Lehrsatz. In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist jede Kathete mit ihrem Gegenwinkel gleichartig; und in einem rechtseitigen Dreiecke ist jede Kathete mit ihrer Gegenseite gleichartig.

Beweis. Wenn Fig. 13. in dem an C rechtwinkeligen Dreiecke ACB auch der Winkel A ein rechter ist, so ist B das Centrum von AC (nach §. 9. 5) und also $BC = 90^\circ$, daher ist BC dann gleichartig mit dem Winkel A. Wenn $A < 90^\circ$ ist, so ist $A + C < 180^\circ$, also auch $BC + BA < 180^\circ$, und da

$A < C$, also auch $BC < BA$ ist, so ist $BC < 90°$, und also gleichartig mit A. Wenn $A > 90°$ ist, so ist $A + C > 180°$, also auch $BC + BA > 180°$, und da $A > C$, also auch $BC > AB$ ist, so ist $BC > 90°$, und also gleichartig mit A.

Was von der Kathete *B*C in Ansehung ihres Gegenwinkels A bewiesen ist, kann ebenso von der Kathete CA und ihrem Gegenwinkel *B* bewiesen werden.

Wenn ferner das Dreieck ABC (Fig. 14) rechtseitig, und die Seite BA der Quadrant ist, so ist die Kathete A gleichartig mit der Gegenseite BC. Denn ist auch BC ein Quadrant, so ist B das Centrum von AC, und also die Kathete $A = 90°$; daher ist BC gleichartig mit A.

Wenn $BC < 90°$, also $AB + BC < 180°$, so ist $A + C < 180°$ und da $BC < BA$ ist, also auch $A < C$, so ist $A < 90°$, also A gleichartig mit BC.

Wenn endlich $BC > 90°$, also $AB + BC > 180°$ ist, so ist $A + C > 180°$ und da $BC > BA$, also auch $A > C$ ist, so ist auch $A > 90°$ und also gleichartig mit BC.

Ebenso kann der Beweis von der Kathete B und ihrer Gegenseite AC geführt werden.

§. 37.

Lehrsatz. Es giebt immer zwei verschiedene rechtwinkelige Dreiecke, welche in einer Kathete und ihrem Gegen-Winkel übereinstimmen; ihre anderen Katheten, die Gegenwinkel derselben und auch die Hypotenusen ergänzen sich zu 180°.

In Fig. 21 sei ACB ein an C rechtwinkeliges Dreieck; verlängert man AC und AB, bis sie sich noch einmal in D schneiden, so ist der Winkel $D = A$ und die beiden Dreiecke ABC und BCD stimmen also in der Kathete BC und in den Winkeln $A = D$ überein.

Macht man ferner $CA' = CD$, und zieht BA', so sind die Dreiecke BCD und BCA' symmetrisch, und daher stimmen auch die Dreiecke ACB und $A'CB$ in der Kathete BC und dem Winkel $A = A'$ überein; ihre anderen Katheten sind CA und CA', und es ist $CA + CA' = CA + CD = 180°$; die Gegenwinkel dieser Katheten sind CBA und CBA', und es ist $CBA + CBA' = CBA + CBD = 180°$; ihre Hypotenusen sind BA und BA', und es ist $BA + BA' = BA + BD = 180°$.

Zusatz. Ist die gemeinschaftliche Kathete ein Quadrant, so ist auch ihr Gegenwinkel ein Quadrant, und es giebt dann unzählige rechtwinkelige Dreiecke, welche in diesen beiden Stücken übereinstimmen; denn nun ist B das Centrum von CA, u. s. w.

§. 38.

Lehrsatz. Es giebt immer zwei verschiedene rechtseitige Dreiecke, welche in einer Kathete und ihrer Gegenseite übereinstimmen; ihre anderen Katheten, die Gegenseiten derselben und auch ihre Hypotenusen ergänzen sich zu 180°.

In Fig. 22 sei AB = 90° der Quadrant des rechtseitigen Dreiecks ABC, verlängert man AB und AC, bis sie sich wieder in D schneiden, so ist der Winkel D = A und BD = 90°; daher stimmen die beiden rechtseitigen Dreiecke ABC und CBD in der gemeinschaftlichen Seite BC und in der ihr gegenüberliegenden Kathete D = A überein.

Macht man ferner AC′ = DC und zieht man BC′, so sind die Dreiecke BCD und ABC′ offenbar symmetrisch, daher stimmen auch die Dreiecke ABC und ABC′ in der Kathete A und ihrer Gegenseite BC = BC′ überein. Ihre anderen Katheten sind die Winkel ABC und ABC′, und es ist ABC + ABC′ = ABC + CBD = 180°; die Gegenseiten dieser Katheten sind AC und AC′ und es ist AC + AC′ = AC + CD = 180°; die Hypotenusen sind die Winkel ACB und AC′B, und es ist ACB + AC′B = ACB + DCB = 180°.

Zusatz. Ist die gemeinschaftliche Kathete A = 90°, so ist auch ihre Gegenseite = 90°, und nun giebt es unzählige Dreiecke, welche in jener Kathete und ihrer Gegenseite übereinstimmen, denn nun ist B das Centrum von AC, u. s. w.

§. 39.

Die Hypotenuse und auch ihr Supplement ist größer als jede Kathete, welche < 90°, aber kleiner als jede Kathete, welche > 90° ist, und so groß als jede Kathete, welche = 90° ist, das Dreieck mag rechtwinkelig oder auch rechtseitig sein.

Beweis. Ist in Fig. 13 in dem an C rechtwinkeligen Dreiecke BCA die Kathete BC = 90°, so ist BC gleichartig mit A, also ist A = C = 90° und also AB = BC.

Ist BC < 90°, so ist auch A < 90° (nach §. 36), also A < C und also BA > BC; ist BC > 90°, so ist auch A > 90°, also A > C und daher auch BA < BC.

Da ferner nach §. 37 mit einem rechtwinkeligen Dreiecke immer ein zweites verbunden ist, welches dieselbe Kathete hat, dessen Hypotenuse aber das Supplement der vorigen ist, so gilt das so eben Bewiesene auch vom Supplemente der Hypotenuse.

Ist in Fig. 14 die Seite AB = 90° der Quadrant des rechtseitigen Dreiecks ABC, und die Kathete A = 90°, so ist auch die Gegenseite BC = 90°, daher ist BC = AB und also auch die Hypotenuse C = A = 90°.

Ist $A < 90^0$, so ist auch $BC < 90^0$ (§. 36) und also $BC < AB$, daher ist auch $C > A$; ist endlich $A > 90^0$, so ist auch $BC > 90^0$ und also $BC > AB$, daher ist auch $C < A$.

Da ferner nach §. 38 mit einem rechtseitigen Dreiecke immer ein zweites verbunden ist, welches dieselbe Kathete hat, deren Hypotenuse aber das Supplement der vorigen ist, so gilt das von der Hypotenuse so eben Bewiesene auch von ihrem Supplemente.

Zusatz. Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen und auch rechtseitigen Dreiecks präcedirt nie vor einer Kathete. Denn ist in Fig. 13. $A < 90^0$, so ist $BA + BC < 180^0$, also präcedirt die Kathete BC; ist $A > 90^0$ so ist $BA + BC > 180^0$, also präcedirt das größere Stück, d. h. die Kathete AC. Ist $BA + BC = 180^0$, so präcedirt weder BA noch BC. Auf ähnliche Art wird der Beweis für das rechtseitige Dreieck geführt.

§. 40.

Ist keine von zwei Seiten eines Dreiecks präcedent, so sind sie mit ihren Gegenwinkeln gleichartig.

Beweis. Wenn von zwei Seiten a und b, deren Gegenwinkel A und B sein mögen, keine präcedirt, so sind sich die beiden Seiten entweder gleich, oder sie ergänzen sich zu 180^0. Ist $a = b$, also auch $A = B$, so ist $a + b$ entweder $=$ oder $<$ oder $> 180^0$; im ersten Falle ist auch $A + B = 180^0$, im zweiten $< 180^0$ und im dritten Falle $> 180^0$; daher ist im ersten Falle $a = b = A = B$; im zweiten Falle ist jede von den Seiten a und $b < 90^0$ und auch jeder von den Winkeln A und B; im dritten Falle ist jede von den Seiten a und $b > 90^0$ und auch jeder von den Winkeln A und $B > 90^0$.

Ist $a + b = 180^0$ und sind die Seiten a und b ungleich, etwa $a > b$, so ist auch $A > B$, und da $A + B = 180^0$ ist, so ist $A > 90^0$ und $B < 90^0$, und da offenbar auch $a > 90^0$ und $b < 90^0$ ist, so ist a gleichartig mit A und b gleichartig mit B.

Zusatz. Wenn von zwei Winkeln eines Dreiecks keiner präcedirt, so sind sie mit ihren Gegenseiten gleichartig.

§. 41.

Wenn von zwei Seiten a und b eines Dreiecks die eine a präcedirt, so ist diese Seite mit ihrem Gegenwinkel A gleichartig.

Beweis. Da von den Seiten a und b die eine a präcedirt, so ist entweder $a + b < 180^0$ oder $a + b > 180^0$.

Wenn $a + b < 180^0$ ist, so präcedirt nach §. 35 das kleinere Stück, und es ist also $a < b$, also auch $A < B$ (nach

§. 33) und da auch $A + B < 180^\circ$ ist, so ist $A < 90^\circ$, und da offenbar $a < 90^\circ$ ist, so ist a gleichartig mit dem Gegenwinkel A.

Wenn $a + b > 180^\circ$ ist, so pråcedirt nach §. 35 das größere Stück, und es ist also $a > b$; daher ist $a > 90^\circ$. Da nun aber auch $A > B$ und $A + B > 180^\circ$ ist, so ist auch $A > 90^\circ$, und daher a gleichartig mit A.

Zusatz 1. Wenn von zwei Winkeln A und B eines Dreiecks der eine A pråcedirt, so ist dieser Winkel mit seiner Gegenseite a gleichartig.

Zusatz 2. Im Vergleiche mit einem Quadranten pråcedirt jeder Bogen, der kein Quadrant ist, und im Vergleiche mit einem rechten Winkel pråcedirt jeder Winkel, der kein rechter ist, daher sind die im §. 36 bewiesenen Såtze nur specielle Formen des gegenwårtigen Satzes.

Zusatz 3. Zwei Seiten eines Dreiecks sind immer mit ihren Gegenwinkeln gleichartig.

§. 42.

Lehrsatz. Wird ein Punkt mit einem Hauptbogen durch ein Perpendikel und noch andere Hauptbogen verbunden, und ist das Loth $< 90^\circ$, so sind diese Verbindungslinien desto größer, je weiter sie vom Lothe (gleichviel auf welcher Seite) abweichen; ist das Loth $> 90^\circ$, so sind sie desto kleiner, je weiter sie vom Lothe abweichen; ist das Loth $= 90^\circ$, so sind sie ihm såmmtlich gleich.

Beweis. Es sey in Fig. 23 das Loth $PQ < 90^\circ$, und $QA < QB < QC < QD$, so ist auch $PQ < PA < PB < PC < PD$. Es ist $PA > PQ$ nach §. 39; ferner sind die Winkel PAQ, PBQ, PCQ, PDQ spitze (nach §. 36), also ist Winkel $PAB > 90^\circ$ und also auch größer als der Winkel B; daher ist auch die Seite $PB > PA$ (nach §. 33). Wenn aber $PQ > 90^\circ$ ist, so sind die eben genannten Winkel PAQ, PBQ, u. s. w. stumpfe, und es ist $PA < PQ$ nach §. 39; und da $PAB < 90^\circ$ und also $< PBA$ ist, so ist $PA > PB$.

Was aber von PA und PB bewiesen ist, kann ebenso von je zwei aufeinander folgenden Verbindungslinien bewiesen werden.

Zwei Verbindungslinien auf entgegengesetzten Seiten des Lothes PQ sind gleichgroß, wenn sie gleich weit vom Lothe abweichen. Denn ist $QA = QA'$, so sind die Dreiecke PQA und PQA' (nach §. 28) symmetrisch und es ist also $PA = PA'$.

Wenn $QC = 90^\circ$ ist, so ist auch $PC = 90^\circ$. Ist $QD > 90^\circ$, so ist auch $PD > 90^\circ$, wenn $PQ < 90^\circ$ ist, und PD ist $< 90^\circ$, wenn $PQ > 90^\circ$ ist. Wenn ferner $QB < 90^\circ$ ist, so ist für $PQ < 90^\circ$ auch $PB < 90^\circ$, und für $PQ > 90^\circ$ auch $PB > 90^\circ$.

Zusatz 1. Sind also die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks $< 90^\circ$ oder $> 90^\circ$, so ist die Hypotenuse kleiner als ein Quadrant; ist die eine Kathete $< 90^\circ$ und

die andere $> 90^\circ$, so ist die Hypotenuse größer als ein Quadrant.

Zusatz 2. Ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ein Quadrant, so ist nothwendig eine von den beiden Katheten ein Quadrant.

Denn wenn keine Kathete ein Quadrant ist, so ist auch die Hypotenuse kein Quadrant.

Zusatz 3. Wenn die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks kleiner als ein Quadrant ist, so sind die beiden Katheten gleichartig; ist die Hypotenuse größer als ein Quadrant, so sind die beiden Katheten ungleichartig. In keinem dieser beiden Fälle ist eine Kathete $= 90^\circ$.

§. 43.

Lehrsatz. Wird ein Punkt mit einem Hauptkreise durch einen Quadranten und noch andere Hauptbogen verbunden, und ist der Winkel, welchen der Quadrant mit dem Hauptkreise macht $< 90^\circ$, so ist er der kleinste unter den Winkeln, welche die gezogenen Hauptbogen mit dem Hauptkreise machen, und die Winkel der übrigen Hauptbogen sind desto größer, je weiter ein solcher Hauptbogen vom Quadranten abweicht, wobei es sich von selbst versteht, daß die Winkel im gleichen Sinne genommen werden müssen. Von den Nebenwinkeln gilt das umgekehrte, und ist der Winkel des Quadranten $= 90^\circ$, so sind alle Winkel ihm gleich.

In Fig. 23. sei PC der Quadrant und $C < 90^\circ$, dann ist im rechtseitigen Dreiecke PCB das Supplement der Hypotenuse CBP, nämlich der Winkel B nach §. 39 größer, als die Kathete C. Da ferner die Kathete C mit ihren Gegenseiten PB und PA gleichartig ist, so ist $PB < 90^\circ$ und $PA < 90^\circ$, also $PB + PA < 180^\circ$, daher ist $PBA + PAB < 180^\circ$, oder $B < A$. Daher ist überhaupt $C < B < A < Q < A''$ etc.

Weichen in Fig. 18. die beiden Verbindungslinien CA und CB gleich weit vom Quadranten CD ab, so sind die Winkel CAD und CBF gleich. Denn zieht man CE nach der Mitte von BF, so ist $DE = 90^\circ$ und da auch $CD = 90^\circ$ ist, so ist D das Centrum von CE, und also $E = 90^\circ$; daher sind die Dreiecke BCE und CEF symmetrisch nach §. 28, und also $CB = CF$ oder $CA + CB = 180^\circ$; daher ist auch $CAD + CBD = 180^\circ$ oder $CAD = CBF$. Wenn in Fig. 23. $CQ = 90^\circ$ ist, so ist, weil auch $CP = 90^\circ$ ist, C das Centrum von PQ, also ist nun $CQP = CPQ = 90^\circ$.

Wenn nun weiter im rechtseitigen Dreiecke CAP die beiden Katheten C und $CPA < 90^\circ$ sind, so ist das Supplement der Hypotenuse (nämlich A) $< 90^\circ$; wenn die Kathete $C < 90^\circ$ und die Kathete $CPA' > 90^\circ$ ist, so ist das Supplement der Hypotenuse (nämlich A'') $> 90^\circ$; wenn beide Katheten $> 90^\circ$ sind, so ist das Supplement der Hypotenuse $< 90^\circ$.

Zusatz 1. Sind die beiden Katheten eines rechtseitigen Dreiecks $< 90^\circ$ oder $> 90^\circ$, so ist das Supplement der Hypotenuse $< 90^\circ$ (sie selbst also $> 90^\circ$); ist die eine Kathete $< 90^\circ$ und die andere größer als 90°, so ist das Supplement der Hypotenuse $> 90^\circ$ (sie selbst also $< 90^\circ$).

Zusatz 2. Ist in einem rechtseitigen Dreiecke die Hypotenuse $= 90^\circ$, so ist auch immer eine von den beiden Katheten $= 90^\circ$.

Zusatz 3. Ist in einem rechtseitigen Dreiecke das Supplement der Hypotenuse $< 90^\circ$, so sind seine beiden Katheten gleichartig, und ist das Supplement der Hypotenuse $> 90^\circ$, so sind die beiden Katheten ungleichartig. In keinem dieser beiden Fälle ist eine Kathete $= 90^\circ$.

§. 44.

Lehrsatz. Stimmen zwei rechtwinkelige Dreiecke in einer Kathete a überein, und präcedirt von ihren anderen Katheten b und b′ keine, so sind auch die an ihnen befindlichen Winkel A und A′ (welche der Kathete a gegenüber liegen) gleich groß.

Wenn aber von den Katheten b und b′ die eine b′ präcedirt, so ist auch $A' > A$, wenn die Kathete $a < 90^\circ$ ist, und es ist $A' < A$ für $a > 90^\circ$.

Beweis. Wenn von den Katheten b und b′ keine präcedirt, so ist entweder $b = b'$ oder $b + b' = 180^\circ$. Ist $b = b'$, so sind die beiden Dreiecke symmetrisch und also $A = A'$, ist aber $b + b' = 180^\circ$, so erhellet die Behauptung unmittelbar aus §. 37.

Wenn aber in Fig. 21. von den Katheten $CA = b$ und $CA' = b'$ die eine präcedirt, so ist entweder $b + b' < 180^\circ$ oder $b + b' > 180^\circ$. Im ersten Falle präcedirt die kleinere Kathete und es ist also $b' < b$, also ist $b' < 90^\circ$ und daher nach §. 43 $A' > A$, wenn BC oder $a < 90^\circ$ ist; im zweiten Falle präcedirt die größere Kathete und es ist also $b' > b$, also $b' > 90^\circ$ und daher ist nach §. 45 ebenfalls $A' > A$. Wenn $BC > 90^\circ$ ist, so erfolgt offenbar das umgekehrte.

Zusatz. Stimmen zwei rechtseitige Dreiecke in einer Kathete überein, und präcedirt von ihren anderen Katheten keine, so sind auch die der ersten Kathete gegenüber liegenden Seiten gleich groß; präcedirt aber von ihren andern Katheten eine, so liegt in dem zugehörigen Dreiecke der gemeinschaftlichen Kathete die größere Gegenseite gegenüber, wenn diese Kathete $< 90^\circ$ ist; ist sie aber $> 90^\circ$, so liegt ihr der kleinere Winkel gegenüber.

§. 45.

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein und ist der von ihnen eingeschlossene Winkel in den beiden Dreiecken verschie-

den, so liegt dem größeren Winkel im einen Dreiecke eine größere Seite als dem kleineren Winkel im anderen Dreiecke gegenüber.

In Fig. 24. α sei CA = CA und CD = CB, aber Winkel ACD < ACB, so ist auch AD < AB.

Wenn der Punkt D sich im Inneren des Dreiecks ACB befindet, so wird AB von CD in einem Punkte d geschnitten, weil sich der Annahme gemäß CD zwischen CA und CB befindet und es ist also

$CB + Bd > Cd$ oder $> CD + Dd$ (nach §. 17), und auch
$Dd + dA > AD$;

daher ist $CB + Bd + dA + Dd > AD + CD + Du$, oder einfacher
$CB + AB > CD + AD$, und da
$CB = CD$

ist, so ist $AB > AD$.

Befindet sich der Punkt D in D′, und also in der Seite AB selbst, so ist offenbar $AD' < AB$; befindet sich D in D″, und also außerhalb des Dreiecks ACB, so wird AB von CD″ wieder nothwendig in einem Punkte d″ zwischen A und B geschnitten, weil der Winkel ACD″ < ACB ist, und es ist nun nach §. 17

$Cd'' + d''B > CB$, und
$Ad'' + D''d'' > AD''$;

also $Cd'' + D''d'' + Ad'' + Bd'' > CB + AD''$, oder einfacher
$CD'' + AB > CB + AD''$, und da der Annahme gemäß
$CD'' = CB$

ist, so ist offenbar $AB > AD''$.

Zusatz. Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten übereinstimmen, in der dritten Seite aber verschieden sind, so ist auch der Gegenwinkel dieser Seite in dem Dreiecke größer, als im anderen, in welchem diese Seite selbst größer ist.

§. 46.

Wendet man die beiden vorigen Sätze auf die reciproken Dreiecke an, so erhält man zwei neue Sätze. Der erste heißt:

Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, in der von ihnen eingeschlossenen Seite aber verschieden sind, so ist der Gegenwinkel der größeren Seite im einen Dreiecke größer als der Gegenwinkel der kleineren Seite im anderen Dreiecke.

Wenn in Fig. 24. β Winkel A = A und B = B′, aber AB′ > AB ist, so ist auch der Winkel C′ = C.

Der zweite Satz heißt: Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, aber der dritte Winkel im ersten Dreiecke größer als im anderen ist, so ist auch die Gegenseite dieses Winkels im ersten Dreiecke größer als im anderen.

Ist A = A, B = B und C′ > C, so ist auch AB′ > AB.

§. 47.

Wenn zwei sphärische Dreiecke in zwei Seiten und einem Winkel, welcher der nicht präcedirenden Seite gegenüber liegt, übereinstimmen, so sind die Dreiecke entweder symmetrisch oder congruent; nur darf nicht jedes der drei Stücke = 90° sein.

In Fig. 25. sei die Seite BA = ba, CB = cb und C = c, ferner präcedire ba nicht vor bc und also auch BA nicht vor BC, dann sind die beiden Dreiecke auch in den übrigen Stücken übereinstimmend.

Beweis. Man lege das Dreieck acb (oder das symmetrische) so auf ACB, daß c auf C und cb über CB falle, dann fällt auch b auf B, weil cb = CB ist, und ca über CA, weil der Winkel c = C ist; fiele nun a nicht auf A, so würde a entweder zwischen C und A auf einen Punkt D, oder in der Verlängerung von CA auf einen Punkt E fallen.

Wenn nun a auf D fiele, so würde BD = ba = BA und also auch Winkel BAC + BDC = 180° sein; daher wären diese beiden Winkel ungleichartig. Weil nun aber BA der Seite BC nicht präcedirt, so wird umgekehrt die Seite BC entweder der Seite BA präcediren, oder keine von den beiden Seiten präcedirt.

Wenn BC der Seite BA und also auch der Seite BD präcedirte, so würde in den Dreiecken ABC und DBC die Seite BC ihren Gegenwinkeln BAC und BDC gleichartig sein nach §. 41, und folglich würden diese Winkel selbst gleichartig sein, was nicht möglich ist.

Wenn keine von den beiden Seiten BC und BA präcedirt, so würden beide Seiten BC und BA (nach §. 40) mit ihren Gegenwinkeln gleichartig sein, und also insbesondere BC wiederum mit den Winkeln BAC und BDC gleichartig sein; daher würden diese Winkel selbst gleichartig sein, was nicht möglich ist, da sie sich zu 180° ergänzen.

Wenn endlich a auf E fiele, so könnte man auf ähnliche Art zeigen, daß die Winkel BEC und BAC gleichartig wären, und dieses würde wieder ungereimt sein, da die Winkel BEC und BAC sich zu 180° ergänzen, weil BAE ein gleichschenkeliges Dreieck wäre.

Wenn man endlich, um den Widerspruch zu heben, annehmen wollte, daß der Winkel A und also auch die Winkel BDC und BEC rechte wären, so würde B das Centrum von CA und also BA = BC = C = 90° sein.

In allen übrigen Fällen aber fällt a auf A, und es sind daher die Dreiecke abc und ABC congruent.

Zusatz 1. Wenn die Winkel C und c rechte sind, so präcediren die Hypotenusen BA und ba nie vor den Katheten BC und bc (nach §. 39. Zusatz), daher sind zwei rechtwinkelige sphärische Dreiecke immer entweder

congruent oder symmetrisch, wenn sie in der Hypotenuse und einer Kathete übereinstimmen.

Zusatz 2. Wenn AB = ab = 90° ist, so pråcedirt AB nicht vor BC; daher sind zwei rechtseitige Dreiecke entweder congruent oder symmetrisch, wenn sie in der Hypotenuse und einer Seite an ihr übereinstimmen.

Zusatz 3. Wenn C < 90° und BA > BC ist, oder wenn C > 90° und BA < BC ist, so ist im ersten Falle A < C, und also A + C < 180, also auch BA + BC < 180; daher pråcedirt nun die kleinere Seite BC, und es pråcedirt also BA nicht.

Im zweiten Falle ist A > C, also A + C > 180°, also auch AB + BC > 180°; daher pråcedirt nun die größere Seite BC, und es pråcedirt also BA nicht.

Wenn daher zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem Gegenwinkel von einer dieser Seiten übereinstimmen, so sind die Dreiecke auch in den übrigen Stücken übereinstimmend, wenn der Winkel ein spitzer und seine Gegenseite die größere, oder der Winkel ein stumpfer und seine Gegenseite die kleinere ist.

Zusatz 4. Wenn zwei Dreiecke ACB und AC′B in Fig. 22. in zwei Seiten AB = AB, BC = BC′ und einem Gegenwinkel A = A der Seite BC oder BC′ übereinstimmen, und dennoch verschieden sind, so ergänzen sich die beiden Gegenwinkel C und C′ der andern Seite zu 180°.

Denn da BC′ = BC ist, so ist BC′C = BCA oder C + C′ = 180°.

§. 48.

Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und zwei Winkeln, wovon der nicht pråcedirende jener Seite gegenüber liegt, übereinstimmen, so stimmen sie auch in den übrigen Stücken überein, nur darf nicht jedes der drei Stücke = 90° sein.

In Fig. 25. sei cb = CB, c = C und a = A, ferner mögen die Winkel a und A nicht vor c und C pråcediren und nicht cb = CB = c = C = a = A = 90° sein, dann ist auch b = B, ca = CA und ab = AB.

Beweis. Man lege das Dreieck acb (oder das mit acb symmetrische) so auf ACB, daß c auf C und cb auf CB falle, dann fällt auch b auf B und ca auf CA; fiele nun a nicht auf A, sondern auf D zwischen A und C, so wäre der Winkel BDC = a = A, also BA + BD = 180°.

Da nun A nicht vor C pråcedirt, so pråcedirt entweder C vor A oder keins dieser Stücke pråcedirt. Im ersten Falle ist

C gleichartig mit BA und daher auch mit BD, nach §. 41; daher sind BA und BD gleichartig, was mit der Gleichung BA + BD = 180° streitet.

Wenn A nicht vor C prácedirt, so prácedirt also keiner von diesen Winkeln vor dem andern, und daher sind nun beide mit ihren Gegenseiten gleichartig; der Schluß ist daher wie vorhin.

Es kann also a nicht zwischen A und C fallen. Ebenso wird bewiesen, daß a nicht in die Verlängerung von CA fällt; daher fällt a auf A, oder man müßte, um die Widersprüche zu heben, annehmen, daß BA = BD = 90° sei; dann wäre aber B das Centrum von CA und also A = a = C = c = BC = bc = 90°, was der Annahme zuwider ist.

Zusatz 1. Wenn die Seiten BC und bc Quadranten sind, so sind die Winkel A und a die Hypotenusen der rechtseitigen Dreiecke ABC und abc, und da die Hypotenuse A nie vor der Kathete C prácedirt, so sind also zwei rechtseitige Dreiecke immer congruent oder symmetrisch, wenn sie in der Hypotenuse und einer Kathete übereinstimmen.

Zusatz 2. Wenn der Winkel A = a = 90°, so prácedirt er dem Winkel C oder c nie, daher sind zwei rechtwinkelige Dreiecke congruent oder symmetrisch, wenn sie in der Hypotenuse und einem Winkel an ihr übereinstimmen.

Zusatz 3. Wenn die Seite BC < 90° und A > C, also auch BC > BA ist, so ist BA + BA < 180°, daher auch A + C < 180° und es prácedirt also der kleinere Winkel C; wenn die Seite BC > 90° und A < C, also auch BC < BA ist, so ist BA + BC > 180°, also auch A + C > 180°, und es prácedirt also nun der größere Winkel C; in keinem der beiden Fälle prácedirt also der Winkel A, und daher sind zwei Dreiecke, welche in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen, congruent oder symmetrisch, wenn die Seite kleiner als ein Quadrant und ihr Gegenwinkel der größere, oder die Seite größer als ein Quadrant und ihr Gegenwinkel der kleinere von den beiden Winkeln ist.

Zusatz 4. Wenn zwei Dreiecke BAC und BA'C in Fig. 21. in einer Seite BC und in zwei Winkeln C = C und A = A' übereinstimmen, wovon der eine A oder A' der Seite BC gegenüber liegt, und die Dreiecke dennoch verschieden sind, so ergänzen sich die Gegenseiten des andern Winkels C, nämlich BA und BA' zu einem Halbkreise. Denn da BAA' + BA'A = 180° ist, so ist auch BA + BA' = 180°.

§. 49.

Wenn man in einem Dreiecke vom Scheitel eines seiner Winkel ein Perpendikel auf die Gegenseite fällt und das Perpendikel im Inneren des Dreiecks enthalten ist, so sind die beiden Winkel an dieser Seite gleichartig; befindet sich das Perpendikel außerhalb des Dreiecks, so sind die beiden Winkel ungleichartig.

In Fig. 26. stehe CD senkrecht auf AB, dann sind in Fig. 26. α die Winkel A und B nach §. 36 gleichartig mit CD, daher sind sie selbst gleichartig; in Fig. 26. β sind die Winkel CAD und CBD mit CD gleichartig, daher sind sie selbst gleichartig; die Winkel A und B aber sind eben deswegen ungleichartig.

Zusatz. Fällt man von einer Ecke eines Dreiecks ein Perpendikel auf die Gegenseite und sind die Winkel an ihr gleichartig, so fällt das Perpendikel ins Innere des Dreiecks; sind die beiden Winkel ungleichartig, so fällt es außerhalb des Dreiecks. Wenn die beiden Winkel jeder $= 90^\circ$ sind, so ist die Richtung des Perpendikels unbestimmt.

§. 50.

Wenn man eine Ecke eines Dreiecks mit der Gegenseite durch einen Quadranten verbindet, und dieser sich außerhalb des Dreiecks befindet, so sind die beiden anderen Seiten gleichartig; befindet sich der Quadrant im Inneren des Dreiecks, so sind die beiden anderen Seiten ungleichartig.

In Fig. 26. γ sei CD der Quadrant; dann ist in den rechtseitigen Dreiecken DAC und DBC die Kathete D gleichartig mit den Gegenseiten CA und CB, daher sind diese selbst gleichartig; in Fig. 26. δ sei wieder CD der Quadrant; dann ist die Kathete CDA gleichartig mit CA und die Kathete CDB gleichartig mit CB, und da $CDA + CDB = 180^\circ$ ist, so sind CA und CB ungleichartig.

Zusatz. Verbindet man eine Ecke eines Dreiecks mit ihrer Gegenseite durch einen Quadranten, und sind die beiden anderen Seiten gleichartig, so fällt der Quadrant außerhalb des Dreiecks; sind die beiden anderen Seiten ungleichartig, so fällt der Quadrant in das Dreieck.

§. 51.

Sind die drei Winkel eines Dreiecks spitze, so ist jede Seite desselben kleiner als ein Quadrant.

In Fig. 27. sei ACB das Dreieck, und das Loth AD auf CB gefällt; da die Winkel C und B gleichartig sind, so befindet sich AD im Inneren des Dreiecks CAB, und theilt also den Winkel CAB in zwei Theile.

Sind nun E und F die Mittelpunkte von AD, so ist der Winkel DAF = 90° und also CAF > 90°, daher ist CAF > CAB und es befindet sich also AB zwischen AD und AF; da nun AD gleichartig mit C und also < 90° ist, so ist AB < AF oder AB < 90° (nach §. 42.) Von den anderen Seiten kann der Beweis ebenso geführt werden.

Zusatz 1. Wenn der größte Winkel D im Dreiecke ADB = 90° ist, so ist DAB < DAF, und also AB < AF oder AB < 90°; daher kann man den Satz auch also aussprechen: Ist der größte Winkel in einem Dreiecke nicht größer als ein rechter, so ist jede der drei Seiten kleiner als ein Quadrant.

Zusatz 2. Ist die kleinste Seite eines Dreiecks nicht kleiner als ein Quadrant, so sind alle Winkel des Dreiecks stumpfe.

Denn wenn in Fig. 12 die kleinste Seite des Dreiecks ABC nicht kleiner als ein Quadrant ist, so ist der größte Winkel im reciproken Dreiecke A'C'B' nicht > 90°, daher ist jede Seite dieses Dreiecks kleiner als ein Quadrant und eben deswegen ist jeder Winkel im Dreiecke ABC > 90°.

Dritter Abschnitt.

Auflösung von Aufgaben mittelst der Construction; einige merkwürdige Punkte in einem sphärischen Dreiecke.

§. 52.

Mehre Aufgaben der Sphärik sind von der Art, daß ihre Auflösung durch Construction auf eine ähnliche Art Statt findet, als in der Planimetrie; ein Anfänger thut daher wohl, diese Constructionen durchzugehen, und auch sinnlich zur Ausführung zu bringen. Man bedient sich dazu einer Kugel, welche hohl ist, damit sie nicht durch ihr Gewicht lästig falle, und deren Oberfläche also eingerichtet ist, daß man nicht nur darauf zeichnen, sondern auch die Zeichnung ohne Schwierigkeit auslöschen kann. Auf einer solchen Kugelfläche lassen sich nun mittelst eines Zirkels Haupt- und Neben-Kreise mit Bequemlichkeit beschreiben, wenn der eine Fuß des Zirkels eine Hülse trägt, in welcher der schreibende Stift befestigt ist. Da die Beschreibung der Hauptkreise ungleich öfter nöthig ist, als die Beschreibung von Nebenkreisen, so kann man sich zur Ziehung von Hauptbogen auch eines sphärischen Li-

neales ABCD Fig. 28. bedienen, welches von zwei Halbkreisen ACB und ADB begrenzt und also gekrümmt ist, daß seine Concavität mit der Krümmung der Kugel übereinstimmt; dadurch wird der allzu häufige Gebrauch des Zirkels vermieden, dessen Aufsetzen auf die Kugelfläche mit seiner scharfen Spitze diese Fläche beschädigen würde.

Ein solches Lineal kann auch aus zwei in A und B drehbaren Halbkreisen ADB und ACB bestehen, durch welche ein Bogen CD gelassen ist, der im Halbkreise ADB befestigt ist, während der andere Halbkreis ACB in C eine Schraube trägt, mittelst welcher der Bogen CD im Durchlasse durch ACB festgeschroben werden kann.

Ist der Bogen CD in Grade und Minuten eingetheilt, so kann das also zusammengesetzte Lineal auch zum Messen und Auftragen sphärischer Winkel benutzt werden, da der Bogen CD das Maaß des Winkels CAD oder CBD ist, wenn AC = BC und AD = BD ist.

Will man die Hülfsmittel der sphärischen Graphik vervollständigen, so wird man einen halben Hauptkreis (etwa aus Messing), in 180 Grade abtheilen, und sich seiner zur Messung der Hauptbogen bedienen. Auch ein sphärischer Transporteur und ein sphärischer Winkelhaken zur Messung und zum Auftragen der Winkel können nach dem Bedürfnisse eingerichtet und mit Nutzen gebraucht werden.

Versehen mit einem solchen Apparate wird man selbst sehr zusammengesetzte sphärische Constructionen ausführen, und, was noch wichtiger ist, bequem übersehen können. Die im Auffassen der sphärischen Constructionen geübte Phantasie wird endlich aller vorhin bezeichneten Hülfsmittel zur Versinnlichung nicht mehr bedürfen, und es wird der genannte Apparat dann nur noch lediglich die graphische Darstellung, nicht aber mehr die Erleichterung des Vorstellens bezwecken.*)

§. 53.

Soll ein Dreieck aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, oder aus einer Seite und den beiden Winkeln an ihr, oder aus zwei Seiten und einem Winkel, welcher einer der beiden Seiten gegenüber liegt, oder endlich aus drei gegebenen Seiten construirt werden, so ist die Ausführung dieser Constructionen auf der Kugel ebenso, wie in der Ebene, und es bedarf offenbar keines Wortes zur Erläuterung mehr.

Soll also ein Winkel oder ein Hauptbogen halbirt werden, soll man ferner durch einen gegebenen Punkt einen Hauptbogen

*) Auf Veranlassung des Verfassers sind solche sphärographische Apparate angefertigt und in der Verlagshandlung von Johann Valentin Albert in Frankfurt a. M. zu haben.

ziehen, welcher auf einem gegebenen Hauptbogen senkrecht steht, so können diese Aufgaben, da sie zum Theil von den vorigen abhängen, die nächsten Uebungen abgeben.

Soll ein Dreieck aus drei gegebenen Winkeln construirt werden, so nehme man die Supplemente der drei Winkel, betrachte sie als Seiten, und construire daraus ein Dreieck, und zu diesem Dreiecke das reciproke, so ist es das gesuchte Dreieck.

Soll endlich ein Dreieck aus zwei Winkeln A und B und der Gegenseite a des Winkels A construirt werden, so bestimme man zwei Seiten a' und b' und einen Winkel A' so, daß a' = 180° — A, b' = 180° — B und A' = 180° — a ist, construire aus diesen drei Stücken ein Dreieck so, daß in ihm der Winkel A' der Seite a' gegenüber liegt. Wird zu diesem Dreiecke das reciproke hergeleitet, so ist es das gesuchte.

§. 54.

Im Bezug auf die rechtwinkeligen Dreiecke giebt es einen Zusammenhang, durch dessen Benutzung ihre Construction nicht selten erleichtert wird.

Es sei in Fig. 29. ACB ein an C rechtwinkeliges Dreieck; aus der Ecke A oder ihrem Gegenpunkte D beschreibe man einen Hauptkreis FE, wovon die Hypotenuse in F und die Kathete CB, welche der Ecke A gegenüber liegt in E geschnitten werden mag; dadurch entsteht ein neues an F rechtwinkeliges Dreieck BFE, welches mit dem Dreiecke ACB auf eine einfache Weise zusammen hängt. Da nämlich A das Centrum von GFE ist, so geht FE durch die Mittelpunkte der Halbkreise DBA und DCA, und da CB senkrecht auf DCA ist, so geht auch CE durch das Centrum von DCA, und es ist also der Durchschnittspunkt E das Centrum von DCA selbst.

Daher ist EC = EA = EG = 90° und also

BE + BC = 90°.

Ferner ist FB + BA = 90°; weiter ist FE das Maaß des Winkels FAE und da dieser das Complement des Winkels A ist, so ist FE + A = 90°; da ebenso der Winkel FEB den Bogen GC zum Maaße hat und dieser das Complement der Kathete CA ist, so ist FEB + CA = 90°; endlich ist der Winkel FBE im einen Dreiecke seinem Vertikal-Winkel B im anderen Dreiecke gleich.

Wird statt des rechtwinkeligen Dreiecks ACB sein Nebendreieck DCB genommen, so ist BC + BF = 90°, DB — FB = 90°, DC — FEB = 90°, D + FE = 90°, DBC + FBE = 180°.

Ist also das rechtwinkelige Dreieck BFE bestimmt, so sind auch die Dreiecke ACB und DCB bestimmt und umgekehrt, da man aus den Seiten und Winkeln des einen Dreiecks auf die Seiten und

Winkel des anderen Dreiecks, und umgekehrt von diesen auf jene schließen kann.

Sind die beiden Dreiecke, wie FBE und CBA so beschaffen, daß jede Seite kleiner als ein Quadrant ist, so kann man den Zusammenhang unter ihnen also ausdrücken: Stimmen zwei rechtwinkelige Dreiecke in noch einem Winkel überein, während die an ihm liegende Kathete des einen Dreiecks jedesmal die Hypotenuse des anderen Dreiecks zu 90° ergänzt, so ergänzt auch die zweite Kathete eines jeden Dreiecks den dritten Winkel des anderen Dreiecks jedesmal zu 90°.

§. 55.

Es gibt einen ähnlichen Zusammenhang unter den Seiten und Winkeln von zwei rechtseitigen Dreiecken. In Fig. 30. sei ACB ein rechtseitiges Dreieck und die Seite AB der Quadrant; in C errichte man auf AC das Loth CD, mache es gleich einem Quadranten und ziehe BD, so ist CBD das gesuchte andere rechtseitige Dreieck, und verlängert man AC und BD, bis sie sich in E schneiden, so ist, weil D das Centrum von AE ist, der Winkel E = 90° und da auch AB = 90° ist, so ist A das Centrum von BE und also AB senkrecht auf ED. Die beiden Dreiecke haben nun die Seiten CB gemein, AB = CD = 90°; der Winkel A hat zum Maaße den Bogen EB und da dieser das Complement von BD ist, so ist A + BD = 90°, ebenso ist D + AC = 90°, ACB — BCD = 90° und CBD — CBA = 90°.

Sind also die Hypotenusen der rechtseitigen Dreiecke, wie in der Figur, > 90°, so kann man das Bewiesene also ausdrücken: Stimmen zwei rechtseitige Dreiecke in noch einer Seite überein, und ist die Hypotenuse jedes Dreiecks um 90° größer als die an der Seite liegende Kathete des anderen Dreiecks, so ergänzt die zweite Kathete eines jeden Dreiecks die dritte Seite des anderen Dreiecks jedesmal zu 90°.

Wenn die Hypotenuse des einen rechtseitigen Dreiecks kleiner als 90° ist, so kann die Betrachtung leicht auf die vorige zurückgeführt werden.

§. 56.

Für jedes Dreieck ACB (Fig. 31. *a*) giebt es einen Punkt, welcher von den drei Ecken desselben gleichen Abstand hat.

Man halbire zwei Seiten des Dreiecks und errichte in den Mitten D und E der Seiten AB und AC die Perpendikel DM und EM, ihr Durchschnitts-Punkt M ist der gesuchte Punkt. Denn da die Dreiecke MDA und MDB in zwei Seiten und dem einge-

schlossenen Winkel übereinstimmen, so ist MA = MB; aus ähnlichem Grunde ist MA = MC, und also MA = MB = MC.

Zusatz. Errichtet man auf den drei Seiten eines Dreiecks in ihren Mitten Perpendikel, so schneiden sich diese in Einem Punkte.

§. 57.

Zieht man von dem Punkte, welcher von den drei Ecken eines Dreiecks gleichen Abstand hat, nach zwei Ecken des Dreiecks Hauptbogen, so machen diese mit der Zwischenseite gleiche Winkel, und die Grösse eines solchen Winkels wird gefunden, wenn man die halbe Summe der beiden Winkel an dieser Seite um die Hälfte des dritten Winkels vermindert, wenn der Punkt der gleichen Entfernungen von den drei Ecken im Inneren des Dreiecks enthalten ist; im entgegengesetzten Falle muß man die halbe Summe der beiden Winkel an der Zwischenseite von der Hälfte des dritten Winkels subtrahiren, wenn jene kleiner ist, als diese.

In Fig. 31. α seien A, B, C die Winkel des Dreiecks, und MA = MB = MC, also Winkel MAB = MBA = γ, MAC = MCA = β, MBC = MCB = α, dann ist $\alpha + \beta = C$, $\alpha + \gamma = B$, $\beta + \gamma = A$, also $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = A + B + C$, oder $\alpha + \beta + \gamma = \frac{A + B + C}{2}$, und weil $\beta + \alpha = C$ ist, so hat man

$$\gamma = \frac{A + B - C}{2}, \text{ ebenso ist}$$

$$\beta = \frac{A + C - B}{2},$$

$$\alpha = \frac{B + C - A}{2}.$$

In Fig. 31. β sei wieder MA = MB = MC, dann ist $\alpha + \beta = C$, $\beta - \gamma = A$, und $\alpha - \gamma = B$, also $2\alpha + 2\beta - 2\gamma = A + B + C$ oder $\alpha + \beta - \gamma = \frac{A + B + C}{2}$, und da $\alpha + \beta = C$ ist, so hat man $\gamma = \frac{C - A - B}{2}$.

Wenn in Fig. 31. γ wieder MA = MB = MC ist, so ist $\beta = A$ und $\alpha = B$, also ist nun $A + B = C$.

Zusatz 1. Wenn ein Winkel eines Dreiecks so groß ist, als die beiden anderen Winkel zusammen, so befindet sich der Punkt, welcher von den Ecken des Dreiecks gleichen Abstand hat, in der Gegenseite des größeren Winkels; ist ein Winkel größer als die beiden anderen zusammen, so befindet sich der Punkt außerhalb des Dreiecks,

und zwar über die Gegenseite des größten Winkels hinaus; ist jeder Winkel kleiner, als die Summe der beiden anderen, so befindet sich der Punkt im Inneren des Dreiecks.

Zusatz 2. Wenn in Fig. 32. MA = MB = MC und im Nebendreiecke ABC′ auch NA = NB = NC′ ist, so ist der Winkel MAB = MBA = $\frac{A + B - C}{2}$ und NAB = NBA = $\frac{180 - A + 180 - B - C}{2}$, und also MBN = MAN = $180^{\circ} - C$.

Da ferner die Dreiecke MBN und MAN symmetrisch sind, so ist der Winkel BMD = AMD, und da nun also die Dreiecke MAD und MBD in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so ist BD = AD und Winkel MDB = MDA = 90°, daher wird die gemeinschaftliche Seite AB der beiden Dreiecke vom Bogen MN unter rechten Winkeln halbirt.

§. 58.

Aufgabe. Man soll die halbe Summe und den halben Unterschied zweier Winkel eines Dreiecks, und auch die halbe Summe ihrer Gegenseiten construiren.

Auflösung. Ist in Fig. 33. ACB das gegebene Dreieck und CAB > CBA, so verlängere man CA um CC′ = CB und ziehe BC′; halbirt man nun AC′, errichtet man in der Mitte E das Loth EM auf AC′, und fällt man auch noch das Loth CD auf BC′, wovon jenes Perpendikel in M geschnitten wird, so ist, wenn MA gezogen wird

$$\text{Winkel MAB} = \frac{CAB + CBA}{2},$$

$$\text{Winkel MAC} = \frac{CAB - CBA}{2},$$

$$\text{und}\quad AE = \frac{AC + BC}{2}.$$

Beweis. Da ME und MD auf den Seiten AC′ und BC′ senkrecht stehen und diese Seiten halbiren, so ist M der Punkt, welcher von den Ecken des Dreiecks ABC′ gleichen Abstand hat, und also nach §. 57. Winkel MAB = $\frac{BAC' + ABC' - C'}{2}$; da aber im Dreiecke CBC′ die Winkel an der Grundlinie gleich sind, so ist ABC′ — C′ = ABC und also MAB = $\frac{CAB + CBA}{2}$, hieraus aber folgt,

daß der Winkel MAC $= \frac{CAB - CBA}{2}$ sei, und nach der Construction selbst ist AE $= \frac{AC + CB}{2} =$ EC′.

§. 59.

Aufgabe. Man soll die halbe Summe und den halben Unterschied zweier Winkel eines Dreiecks und zugleich den halben Unterschied ihrer Gegenseiten construiren.

Auflösung. Ist in Fig. 34. wieder ABC das gegebene Dreieck und der Winkel BAC $>$ ABC, also auch BC $>$ AC, so schneide man CC′ $=$ CA auf BC ab, ziehe AC′, fälle von C das Loth CD auf AC′, halbire BC′ durch das Perpendikel EM, wovon CD in M geschnitten wird, und ziehe noch MB, so ist

$$BE = \frac{BC - AC}{2},$$

$$\text{Winkel } MBA = \frac{ABC + BAC}{2} - 90^\circ,$$

$$\text{und Winkel } MBC = 90^\circ - \frac{BAC - ABC}{2}.$$

Beweis. Nach §. 56 ist M der Punkt, welcher von den Ecken des Dreiecks ABC′ gleichen Abstand hat, und also nach §. 57.

$$\text{Winkel } MBA = \frac{ABC' + C'AB - BC'A}{2}.$$

Da nun aber im gleichschenkeligen Dreiecke ACC′ die Winkel an der Grundlinie gleich sind, so ist BAC $=$ BAC′ $+ 180^\circ -$ BC′A, also auch ABC $+$ BAC $=$ ABC′ $+$ BAC′ $-$ BC′A $+ 180^\circ$,

$$\text{daher ist } MBA = \frac{ABC + BAC - 180^\circ}{2} \text{ oder auch}$$

$$MBA = \frac{ABC + BAC}{2} - 90^\circ,$$

und hieraus folgt die Größe von MBC $= 90^\circ - \frac{BAC - ABB.}{2}$

Wird also in B ein Loth XB auf MB errichtet, so ist offenbar XBA $= \frac{BAC + ABC}{2}$ und XBC $= \frac{BAC - ABC}{2}$.

§. 60.

Aufgabe. Es ist eine Seite eines Dreiecks, die Summe der beiden anderen Seiten und die Summe ihrer Gegenwinkel gegeben, man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. In Fig. 33. sei AB die gegebene Seite und der Winkel MAB die halbe gegebene Winkelsumme; man halbire auch die Seite AB, und errichte in der Mitte F das Loth FM, wovon AM in M geschnitten werden mag, aus M beschreibe man einen Kreis mit dem Radius MA, in diesen Kreis trage man eine Sehne AC', welche so groß ist, als die Summe der beiden anderen Seiten des Dreiecks, ziehe dann noch die Sehne BC', halbire dieselbe und errichte in der Mitte D auf ihr das Loth CD, wovon die Sehne AC' in C geschnitten werden mag; endlich ziehe man noch BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis ist, wie im §. 58.

§. 61.

Aufgabe. Es ist eine Seite eines Dreiecks, die Summe der beiden anderen Seiten und der Unterschied ihrer Gegenwinkel gegeben, man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. In Fig. 33. sei AC' die gegebene Summe der beiden Seiten, über AC' construire man das gleichschenkelige Dreieck AMC', indem man den Winkel MAC' = MC'A = dem halben gegebenen Unterschiede der beiden Winkel macht; aus M beschreibe man mit dem Radius MA = MC' einen Kreis und trage in ihn von A aus eine Sehne AB, welche der gegebenen Seite gleich kommt; dann ziehe man die Sehne BC' und in ihrer Mitte D errichte man wieder das Loth DC, so ist, wenn noch BC gezogen wird, ACB das gesuchte Dreieck.

Die Richtigkeit der Auflösung erhellet wieder aus §. 58.

§. 62.

Aufgabe. Die Summe zweier Winkel eines Dreiecks, der Unterschied ihrer Gegenseiten und die Größe der dritten Seite sind gegeben, man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. In Fig. 34. sei AB die gegebene Seite und der Winkel XBA sei die halbe gegebene Winkelsumme; man errichte in B auf XB das Loth BM und in der Mitte F von AB das Loth FM; aus dem Durchschnittspunkte M der beiden Perpendikel beschreibe man mit dem Radius MB einen Kreis, trage in ihm von B aus eine Sehne BC', welche dem gegebenen Unterschiede der beiden anderen Seiten gleich ist, und ziehe dann die Sehne AC'. Vom Mittelpunkte M fälle man das Perpendikel MD, wovon BC' in C (in der Verlängerung) geschnitten wird: wird dann noch AC gezogen, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Die Richtigkeit der Auflösung erhellet aus §. 59.

§. 63.

Aufgabe. Der Unterschied zweier Winkel eines Dreiecks, der Unterschied ihrer Gegenseiten und die Größe der dritten Seite sind gegeben, man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. In Fig. 34. sei BC′ der gegebene Unterschied zweier Seiten, E sei die Mitte von BC′ und darauf das Loth EM errichtet; XBC′ sei der halbe Unterschied der Winkel und BM senkrecht auf BX, aus dem Durchschnittspunkte M der beiden Perpendikel beschreibe man mit dem Radius MB einen Kreis, trage in ihn aus B die Sehne BA, welche der gegebenen Seite des Dreiecks gleich sei, und ziehe die Sehne AC′, worauf aus M das Loth MD gefället wird, welches man verlängert, bis BC′ davon in C geschnitten wird: zieht man dann noch AC, so ist ACB das gesuchte Dreieck.

Die Richtigkeit der Auflösung erhellet aus §. 59.

Zusatz. Soll ein Dreieck construirt werden, worin ein Winkel, die Summe oder der Unterschied der beiden anderen Winkel und die Summe oder der Unterschied ihrer beiden Gegenseiten gegeben sind, so hat man vier neue Aufgaben, deren Auflösung offenbar mittelst der Reciprocität auf die Auflösung der vorigen vier Aufgaben zurückkommt, und es ist daher unnöthig, von diesen vier neuen Aufgaben ausführlicher zu handeln.

§. 64.

Lehrsatz. Wenn man die drei Winkel eines Dreiecks durch Hauptbogen halbirt, so schneiden sich diese in einem Punkte, welcher von den Seiten des Dreiecks gleichen Abstand hat.

Beweis. Man halbire im Dreiecke ACB Fig. 35. die beiden Winkel B und C durch die Hauptbogen Bm und Cm, fälle von ihrem Durchschnittspunkte m auf die Seiten des Dreiecks die drei Perpendikel mD, mE, mF und ziehe noch mA, so sind die Dreiecke mCE und mCD symmetrisch; daher ist mD = mE; ebenso beweiset man, daß mD = mF ist; daher ist mD = mE = mF; endlich sind die Dreiecke mAF und mAE symmetrisch und daher ist der Winkel A durch mA halbirt.

Zusatz. Die Fußpunkte D, E, F theilen die Seiten des Dreiecks dergestalt, daß AE = AF, BF = BD und CE = CD ist, und hieraus folgt:

$$AE = AF = \frac{AC + AB - BC}{2},$$

$$CE = CD = \frac{CA + CB - AB}{2},$$

$$BD = BF = \frac{BC + BA - AC}{2};$$

daher können die Theile der Seiten leicht aus den Seiten selbst hergeleitet werden.

Zusatz 2. Sind in Fig. 36. ABC und ABC′ zwei Nebendreiecke, m und n die Punkte, welche von den Seiten der Dreiecke gleiche Abstände haben, so ist der Winkel $mAB = \frac{BAC}{2}$ und $nAB = \frac{BAC'}{2}$, also ist $mAB + nAB$ oder auch $mAn = 90^0$, ebenso ist auch der Winkel $mBn = 90^0$.

Ferner ist, wenn die Perpendikel mf und ng auf CBC′, und die Perpendikel me und nh auf CAC′ gefällt werden,

$$Cf = Ce = \frac{CB + CA - AB}{2}$$ und $$C'h = C'g = \frac{C'B + C'A - AB}{2};$$ also ist auch $Ce + C'h = 180^0 - AB = Cf + C'g$, und daher endlich $eh = fg = AB$, oder auch $Cg = \frac{AC + BC + AB}{2} = Ch$.

§. 65.

Aufgabe. Man soll die halbe Summe und den halben Unterschied zweier Seiten und den Unterschied der beiden Gegenwinkel dieser Seiten in einem sphärischen Dreiecke construiren.

Auflösung. In Fig. 37. sei BAC das gegebene Dreieck und der Winkel BAC > CBA; man schneide von BAC den Winkel BAD ab, welcher dem Winkel CBA gleich ist, so entsteht das gleichschenkelige Dreieck BAD; zum Dreiecke DAC construire man das Nebendreieck ACD′ und bestimme in diesen Dreiecken die Punkte m und n, so daß m gleichen Abstand von den Seiten des Dreiecks DAC, und n gleichen Abstand von den Seiten des Dreiecks ACD′ hat; von m und n fälle man die Perpendikel me und nf auf BCD′, so ist der

Winkel $DAC = CAB - CBA$,

$$De = \frac{BC - AC}{2},$$

$$Df = \frac{BC + AC}{2}.$$

Beweis. Nach §. 64 ist $De = \frac{DC + DA - AC}{2}$, da aber $DA = DB$ und $DC = BC - DA$ ist, so ist offenbar $De = \frac{BC - AC}{2}$; da ferner $Df = \frac{DC + DA + AC}{2}$ und auch $DC + DA = BC$ ist, so ist $Df = \frac{BC + AC}{2}$.

§. 66.

Aufgabe. Man soll die Summe zweier Winkel nebst der halben Summe und dem halben Unterschiede ihrer Gegenseiten in einem sphärischen Dreiecke construiren.

Auflösung. In Fig. 38. sei ABC das gegebene Dreieck; man setze an den Winkel B den Winkel A, so ist der Winkel CBD = A + B und da im Dreiecke DAB die Summe DAB + DBA = 180° ist, so ist auch DB + DA = 180°; man halbire die beiden Winkel D und C durch Hauptbogen, und fälle von ihrem Durchschnittspunkte m das Loth me auf AC; wenn ebenso n gleichen Abstand von den Seiten des Dreiecks BCD′ hat, und nf senkrecht auf CD′ ist, so ist

$$CBD = A + B,$$

$$De = 90^\circ + \frac{AC - BC}{2},$$

$$\text{und } Df = 90^\circ + \frac{AC + BC}{2}.$$

Beweis. Da der Punkt m von den Seiten des Dreiecks CBD gleichen Abstand hat, so ist nach §. 64. $DE = \frac{DC + DB - BC}{2}$; aber DC = DA + AC und DA + DB = 180°, also ist $De = 90^\circ + \frac{AC - BC}{2}$; ferner ist $Df = \frac{DC + DB + BC}{2}$ und also auch $Df = 90^\circ + \frac{AC + BC}{2}$.

Anmerkung. Auf diese Auflösung und die vorige kann auch die Auflösung der im Zusatze zu §. 63 erwähnten vier neuen Aufgaben zurückgebracht werden; die Ausführung mag dem Anfänger zu seiner Uebung überlassen bleiben.

§. 67.

Lehrsatz. Wenn man zwei Winkel eines Dreiecks halbirt, und durch die Scheitel dieser Winkel Hauptbogen zieht, welche auf den Halbirungs-Linien der Winkel senkrecht stehen, so schneiden sie diese Halbirungs-Linien in zwei Punkten, welche mit der dritten Ecke des Dreiecks in Einem Hauptbogen liegen, welcher auf der Halbirungs-Linie des dritten Winkels senkrecht steht, und die Durchschnittspunkte eines jeden der beiden Linienpaare befinden sich ebenfalls mit der dritten Ecke des Dreiecks in einem Hauptbogen, der den Winkel an dieser Ecke halbirt.

In Fig. 39. sei ABC das gegebene Dreieck, und die Winkel A und B seien durch AF und BE halbirt, auf AF stehe DAE und auf BE stehe DBF senkrecht, dann schneiden sich EAD und DBF in einem Punkte D, BE und AF in einem Punkte m so,

daß D, m und C in einem Hauptbogen liegen, welcher den Winkel ACB halbirt; ferner liegen die Punkte E und F mit C in einem Hauptbogen, welcher auf CD senkrecht ist.

Beweis. Vom Punkte D fälle man auf die Seiten des Dreiecks ABC und ihre Verlängerungen die Perpendikel Dx, Dy und Dz; da nun DAm = 90° und mAC = mAB ist, so ist auch der Winkel yAD = xAD; ebenso ist xBD = zBD; daher werden die Winkel BAC′ und ABC′ von DA und DB halbirt, also ist Dx = Dy = Dz, und der Punkt D liegt überhaupt nach §. 64 in einem Hauptbogen, welcher den Winkel C′ und also auch den Winkel ACB halbirt und in demselben Hauptbogen befindet sich nach §. 64 auch der Punkt m.

Man ziehe nun von C aus nach E und F die Bogen CE und CE, so ist noch zu beweisen, daß sie beide auf CD senkrecht stehen, und also einen Hauptbogen ausmachen.

Von E fälle man die Perpendikel Ep, Eq und Er auf BA, BC und AC, dann sind die Dreiecke BpE und BEq symmetrisch, weil der Winkel p = q = 90°, Winkel pBE = qBE und BE den beiden Dreiecken gemein ist; also ist Ep = Eq; da ferner AE den Winkel pAC halbirt, so sind auch die Dreiecke EAp und EAr symmetrisch, also ist Ep = Er und also Ep = Er = Eq; daher sind endlich auch die Dreiecke ECr und ECq symmetrisch, weil sie in der Hypotenuse und der einen Kathete übereinstimmen, und es ist also der Winkel $ECr = \frac{qCr}{2}$ und da auch $rCm = \frac{ACB}{2}$ ist, so ist $ECm = ECr + rCm = \frac{180^0}{2} = 90^0$. Ganz ebenso wird bewiesen, daß auch CF auf CD senkrecht steht; daher machen CE und CF einen einzigen Hauptbogen aus, welcher auf der Halbirungs-Linie des Winkels ACB senkrecht steht.

§. 68.

Lehrsatz. Wenn man von den Scheiteln eines Dreiecks, was keine zwei rechte Winkel hat, Perpendikel auf die Gegenseiten des Dreiecks fällt, so schneiden sie sich jedesmal in einem Punkte, und wenn man die Fußpunkte der Perpendikel durch Hauptbogen verbindet, so begränzen diese drei Hauptbogen ein Dreieck, dessen innere Winkel von den drei Perpendikeln, und dessen äußere Winkel also von den Seiten des ursprünglichen Dreiecks halbirt werden.

Beweis. In Fig. 40. sei ABC das gegebene Dreieck und AE, BD, CF seien die drei Perpendikel, wovon behauptet wird, daß sie sich in einem Punkte zu schneiden und daß sie die Winkel des Dreiecks DEF halbiren. Um den Beweis zu führen, betrachte man zu vorläufig als den Durchschnittspunkt der beiden Perpen-

dikel BD und AE; und wenn die Winkel FDE und DEF nicht von BD und AE halbirt werden, so mache man den Winkel GDB = EDB und GEA = DEA; weil nun die Winkel GDE und DEG von BD und AE halbirt werden, auch AC und BC auf diesen beiden Halbirungs-Linien senkrecht stehen, so befinden sich nach §. 67 die drei Punkte A, G, B in einem Hauptbogen, und die drei Punkte C, m, G in einem zweiten Hauptbogen, welcher auf dem vorigen senkrecht ist, und den Winkel DGE halbirt; da nun aber nach der Annahme auch CF senkrecht auf AB ist, so könnte man vom Punkte C zwei Perpendikel auf AB fällen, welches, weil nicht CA = CB = 90° ist, ungereimt ist; daher fällt der Punkt G mit F zusammen, und es werden also die Winkel des Dreiecks DEF selbst von den drei Perpendikeln BD, AE und CF halbirt, mithin schneiden sie sich auch nach §. 67 oder auch nach §. 56 in Einem Punkte m.

Weil aber AC senkrecht auf BD steht, und BD den Winkel FDE halbirt, so halbirt AC seinen Nebenwinkel und ebenso werden die Nebenwinkel von DEF und EFD durch die Seiten CB und AB halbirt.

§. 69.

Lehrsatz. Wenn man die correspondirenden Ecken von zwei reciproken Dreiecken durch Hauptbogen verbindet, so schneiden sich diese Hauptbogen in Einem Punkte, und wenn man die correspondirenden Seiten der beiden Dreiecke bis zum Durchschnittspunkte verlängert, so befinden sich diese drei Durchschnittspunkte in Einem Hauptkreise, dessen Centrum jener Punkt ist.

Beweis. In Fig. 41. seien abc und ABC die beiden reciproken Dreiecke; weil A und a die Mittelpunkte von bc und BC sind, so steht Aa auf beiden Hauptbogen senkrecht, (nach §. 10. Zusatz 4); aus demselben Grunde Bb zugleich senkrecht auf ac und AC, und Cc senkrecht auf ab und AB; daher schneiden sich Aa, Bb, Cc nach §. 68 in Einem Punkte M.

Weil ferner rD und RD auf CcMrR senkrecht stehen, so ist D das Centrum von CR und also MD = 90°; ebenso ist ME = 90° und MF = 90°; daher befinden sich die Punkte D, E, F in einem Hauptkreise, dessen Centrum der Punkt M ist; daß in demselben Hauptkreise auch die Gegenpunkte von D, E, F enthalten sind, bedarf der Erwähnung kaum.

§. 70.

Lehrsatz. Ein Punkt, welcher gleichen Abstand von den drei Ecken eines Dreiecks hat, hat auch gleichen Abstand von den drei Seiten des reciproken Dreiecks und umgekehrt; auch ergänzen sich die beiden Entfernungen jedesmal zu einem Quadranten.

Beweis. In Fig. 42 sei Na = Nb = Nc und ABC sei das reciproke Dreieck zu abc; man verlängere Na, Nb und Nc, bis die Seiten des Dreiecks ABC davon in F, E, D geschnitten werden, so stehen diese Hauptbogen auf BC, AC und AB senkrecht, weil a, b, c die Mittelpunkte dieser Seiten sind, und es ist aus demselben Grunde cD = bE = aF = 90°; daher ist auch eD — cN = bE — bN = aF — aN oder auch ND = NE = NF; mithin hat der Punkt N auch gleichen Abstand von den Seiten des reciproken Dreiecks ABC.

Wird umgekehrt angenommen, daß die Perpendikel ND, NE, NF gleich lang sind, und verlängert man sie, so gehen sie durch die Mittelpunkte der Seiten, worauf sie senkrecht stehen; daher geht NE durch b, DN durch c und FN durch a; mithin ist ENb = DNc = FNa = 90° und also auch Na = Nb = Nc.

Anmerk. Der Durchschnittspunkt N in Fig. 42 darf in seiner Bedeutung nicht mit dem Durchschnittspunkte M in Fig. 41 verwechselt werden.

§. 71.

Lehrsatz. Wenn man zwei Seiten eines Dreiecks durch einen Hauptbogen halbirt, so haben die drei Ecken des Dreiecks gleichen Abstand von ihm; auch schneidet er die dritte Seite des Dreiecks in einem Punkte, welcher von der Mitte derselben um 90° entfernt ist.

Beweis. In Fig. 43 sei ACB das gegebene Dreieck, der Bogen MN halbire die Seiten AC und BC in M und N, von den Ecken des Dreiecks fälle man auf MN die Perpendikel AP, BQ und CR, dann sind die rechtwinkeligen Dreiecke APM und CMR congruent, weil sie in der Hypotenuse und einem Winkel an ihr übereinstimmen, also ist CR = AP. Aus demselben Grunde sind aber auch die rechtwinkeligen Dreiecke CRN und NBQ congruent und daher ist CR = BQ; folglich ist überhaupt AP = BQ = CR, und es haben also die drei Ecken des Dreiecks ABC gleichen Abstand vom Bogen MN.

Verlängert man nun AP und BQ bis sie sich in X und Y schneiden, so sind X und Y die Mittelpunkte des Hauptbogens PMNQ und wird RC verlängert, so geht dieses Loth ebenfalls durch die genannten beiden Mittelpunkte, und es ist also XP = XQ = YR und da AP = BQ = CR ist, so ist auch XA = XB = XC.

Fällt man weiter im gleichschenkeligen Dreiecke AXB das Loth XO auf die Grundlinie AB, so wird es dadurch in zwei symmetrische rechtwinkelige Dreiecke XAO und XBO getheilt und es ist also AO = BO; wird ferner noch XO verlängert, wovon MN in S geschnitten werden mag, so steht auch XS senkrecht auf MN, weil X das Centrum von MN ist, und weil ST und OT auf

OS senkrecht stehen, so ist T das Centrum von OS und also TO = 90°.

Zusatz 1. Halbirt man zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks durch einen Hauptkreis, so kann man aus seinen beiden Mittelpunkten ein paar Gegenkreise beschreiben, zwischen welchen das Dreieck enthalten ist.

Beweis. Da XA = XB ist, so kann man mit dem Radius XA aus X einen Nebenkreis beschreiben, welcher durch die Ecken A und B des Dreiecks ABC geht, und beschreibt man mit demselben Radius einen Nebenkreis aus Y, so ist dieser der Gegenkreis des vorigen und geht durch die Ecke C des Dreiecks, weil YC = XA = XB ist.

Zusatz 2. Halbirt ein Hauptbogen eine Seite eines Dreiecks, und schneidet er eine zweite Seite des Dreiecks so, daß ihr Durchschnittspunkt von ihrer Mitte 90° entfernt ist, so halbirt er auch die dritte Seite des Dreiecks.

§. 72.

Lehrsatz. Ist ein Dreieck zwischen zwei Gegenkreisen enthalten, so halbirt ihr Mittelkreis zwei Seiten des Dreiecks.

Beweis. Sind Fig. 43 X und Y die Mittelpunkte der beiden Gegenkreise, zwischen welchen das Dreieck ABC enthalten ist, so ist YC = XA = XB, wenn der eine Kreis durch die Punkte A und B, und der andere durch C geht; ist aber PMNQ der Mittelkreis der beiden Gegenkreise, so ist XP = XQ = YR = 90°, also ist auch AP = CR = BQ.

Die rechtwinkeligen Dreiecke APM und CMR stimmen also in einer Kathete und ihrem Gegenwinkel überein, und sind also congruent; denn wenn sie gleichwohl nicht congruent wären, so müßten sich ihre Hypotenusen zu 180° ergänzen, und es müßte also die Seite AC des Dreiecks ACB ein Halbkreis sein. Daher ist AM = CM; ebenso wird bewiesen, daß BN = CN sei; daher halbirt der Bogen MN die Seiten CA und CB des Dreiecks ABC.

§. 73.

Lehrsatz. Halbirt ein Hauptbogen zwei Seiten eines Dreiecks, so hat einer von seinen beiden Mittelpunkten gleichen Abstand von den Ecken des Nebendreiecks an der dritten Seite.

Beweis. Halbirt in Fig. 43 der Bogen MN die Seiten AC und BC des Dreieck ABC und ist X ein Mittelpunkt von MN, so hat der Punkt X gleichen Abstand von den Ecken des Nebendreiecks ABC' an der dritten Seite AB; denn ist Y der Gegenpunkt von X, so ist er der andere Mittelpunkt von MN, und wird aus Y mit dem Radius XA ein Kreis beschrieben, so geht er nach §. 71. Zusatz, durch den Punkt C, daher geht sein Gegenkreis

durch den Punkt C', weil er der Gegenpunkt von C ist, und weil er auch durch A und B geht, so ist also XA = XB = XC'.

Zusatz. Weil ferner der aus X mit dem Radius XA beschriebene Kreis durch die Punkte A und B geht, so geht der Gegenkreis, der also aus Y mit dem Radius YC = XA beschrieben ist, durch die Gegenpunkte von A und B.

§. 74.

Lehrsatz. Wenn man je zwei Seiten eines Dreiecks durch einen Hauptbogen halbirt, so erhält man ein zweites Dreieck, und construirt man hierzu das reciproke Dreieck, so haben seine Ecken eine solche Lage, daß eine jede von den Ecken eines der drei Nebendreiecke des ersten Dreiecks gleichen Abstand haben.

Beweis. Es sei ABC in Fig. 44. das gegebene Dreieck und LMN das hineingeschriebene Dreieck, von dessen Ecken die Seiten des ersten Dreiecks halbirt werden. Verlängert man nun MN bis AB davon in p und p'' geschnitten wird, so ist Lp = Lp'' = 90° (nach §. 71), und beschreibt man also aus L einen Halbkreis pDFp'', so steht er auf A'BAB' senkrecht und da Bp = pA' und Ap'' = B'p'' ist, so geht er durch die Punkte D und F, wovon der erste gleichen Abstand hat von den Ecken des Dreiecks BCA' und wovon der zweite gleichen Abstand von den Ecken des Dreiecks ACB' hat.

Hat nun auch E gleichen Abstand von den Ecken des Dreiecks ABC', so geht ein aus M beschriebener Halbkreis p'EFq'' aus demselben Grunde durch die Punkt E und F, und endlich geht noch aus gleichem Grunde ein aus N beschriebener Halbkreis qDEq' durch die Punkte D und E; daher ist aber EDF das reciproke Dreieck zu LMN.

Einen anderen Beweis gibt die unmittelbare Anwendung von §. 73.

Zusatz. Werden die correspondirenden Ecken der beiden reciproken Dreiecke DEF und LMN mit einander durch Hauptbogen verbunden, so stehen diese auf den Seiten der beiden Dreiecke senkrecht und schneiden sich in einem Punkte O nach §. 69; ferner befinden sich die Punkte p, q, p', q', p'' q'' in Einem Hauptkreise, dessen Centrum der Punkt O ist und dieser Punkt O hat gleichen Abstand von den drei Ecken des Dreiecks A, B, C.

Zieht man ferner VW, VU und WU, so hat derselbe Punkt O auch gleichen Abstand von den Seiten des Dreiecks UVW, (nach § 68); daher hat derselbe Punkt O eine vierfache Bedeutung in Bezug auf die Dreiecke DEF, LMN, ABC und UVW.

§. 75.

Wenn man einen Punkt, welcher von den drei Ecken eines sphärischen Dreiecks gleichen Abstand hat, mit den Ecken dieses Dreiecks durch Hauptbogen verbindet, so machen sie Winkel mit einander, die doppelt so groß sind, als die einzelnen Winkel in dem dem sphärischen Dreiecke zugehörigen Sehnen-Dreiecke.

Beweis. In Fig. 45. seien a, b, c die Sehnen der Hauptbogen oder Seiten BC, AC und AB des sphärischen Dreiecks und es sei MA = MB = MC.

Ferner sei m der planimetrische Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, dann geht die Gerade Mm als (als Axe eines senkrechten Kegels) durch den Mittelpunkt der Kugel und steht auf der Ebene des Sehnendreiecks senkrecht; daher ist der Winkel AmB das Maaß des Winkels AMB, und da der Winkel AmB, weil mA = mB = mC ist, nach der Planimetrie zweimal so groß ist, als der Winkel bCa des Sehnendreiecks, so ist auch der Winkel AMB zweimal so groß als der Winkel aCb im Sehnendreiecke.

Aus demselben Grunde ist aber auch AMC zweimal so groß als der Winkel aBc im Sehnendreiecke und der Winkel BMC zweimal so groß als der Winkel bAc im Sehnendreiecke.

§. 76.

Lehrsatz. Schreibt man um eines von zwei Nebendreiecken einen Kreis, so machen die beiden sphärischen Radien, welche nach den Endpunkten der gemeinschaftlichen Seite gezogen sind, einen Winkel mit einander, dessen Maaß doppelt so groß ist, als der Bogen, welcher die Mitten der beiden übrigen Seiten im anderen Nebendreiecke verbindet.

Beweis. In Fig. 43 sei X der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC′ beschriebenen Kreises, dann ist der Winkel AXB zweimal so groß als der Bogen MN, welcher die Seiten AC und BC des Nebendreiecks halbirt; denn da wie im §. 71. die Dreiecke MCR und APM congruent sind, so ist MR = PM und also $MR = \frac{PR}{2}$, und da aus gleichem Grunde auch $RN = \frac{RQ}{2}$ ist, so ist $MR + RN = \frac{PQ}{2}$ oder auch $MN = \frac{PQ}{2}$; da nun aber $XP = XQ = 90^{\circ}$ ist, so ist PQ das Maaß des Winkels AXB, und also der Winkel AXB = 2. MN.

Zusatz. Da nun der Winkel AXB nach §. 75. auch zweimal so groß ist, als der ebene Winkel an C′ im Sehnendreiecke, welches zum Dreiecke AC′B gehört, so ist dieser Winkel im Sehnendreiecke dem Bogen MN gleich.

§. 77.

Lehrsatz. Bestimmt man für jedes von zwei Nebendreiecken den Punkt, welcher von den Seiten eines solchen Dreiecks gleichen Abstand hat, so macht der sie verbindende Hauptbogen mit dem Perpendikel, welches von einem dieser beiden Punkte auf eine nicht gemeinschaftliche Seite gefällt ist, einen Winkel, welcher so groß ist, als der Winkel zweier Hauptbogen, welche eben diesen Punkt mit den Endpunkten der gemeinschaftlichen Seite verbinden.

Beweis. Wenn in Fig. 39 der Punkt m gleichen Abstand von den Seiten des Dreiecks ABC und der Punkt D gleichen Abstand von den Seiten seines Nebendreiecks ABC' hat, also die Perpendikel Dy, Dx und Dz gleich lang sind, so sind die Dreiecke ADx und ADy symmetrisch, und also ist der Winkel xDA gleich dem Winkel yDA oder auch $xDA = \frac{xDy}{2}$; aus gleichem Grunde ist aber auch $xDB = \frac{xDz}{2}$, daher ist der Winkel $ADB = \frac{xDy + xDz}{2}$ und es ist also der Winkel ADB halb so groß als der Winkel yDz, welcher mit ihm die Öffnung nach derselben Seite kehrt.

Da nun aber auch die Dreiecke CDy und CDz symmetrisch sind, so folgt, daß der Winkel CDy = CDz = ADB sei.

Vierter Abschnitt.

Vom Parallelismus begrenzter Hauptbogen, von den Parallel-Trapezen, und den sphärischen Parallelogrammen.

§. 78.

Erklärung. Wenn sich zwei Hauptbogen auf entgegen gesetzten Seiten eines dritten Hauptbogens befinden und ihre vier Endpunkte von diesem Hauptbogen gleichen Abstand haben, so heißen die beiden Hauptbogen parallel, und der dritte Hauptbogen heißt ihr Mittelbogen.

Werden in Fig. 46 von den vier Endpunkten A, B, C, D der beiden Hauptbogen AB und CD die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Dd auf den Hauptbogen XY gefället, und sind diese vier Perpendikel gleich lang, so heißen AB und CD parallel, und XY heißt der Mittelbogen der beiden parallelen Linien.

§. 79.

Lehrsatz. Sind zwei Hauptbogen parallel, so können die Endpunkte des einen mit den Endpunkten des anderen durch vier Hauptbogen verbunden werden, welche den Mittelbogen schneiden und von ihm halbirt werden.

Beweis. In Fig. 46 haben die Ecken des Dreiecks ACB gleichen Abstand vom Bogen XY, weil AB und CD nach der Annahme parallel sind; also halbirt der Bogen XY die Seiten AC und BC dieses Dreiecks nach §. 72; aus demselben Grunde halbirt aber auch der Bogen XY die Seiten AD und BD des Dreiecks ADB.

Zusatz 1. Sind zwei Hauptbogen parallel, und verbindet man ihre Endpunkte mit einander durch Hauptbogen, so hat man zwei Paare Dreiecke, welche zwischen Gegenkreisen enthalten sind; der eine Kreis geht durch die Endpunkte der einen, und sein Gegenkreis geht durch die Endpunkte der anderen parallelen Linie.

Zusatz 2. Geht ein Nebenkreis durch die Endpunkte eines Hauptbogens, und geht sein Gegenkreis durch die Endpunkte eines anderen Hauptbogens, so sind die beiden Hauptbogen parallel.

Zusatz 3. Der Mittelbogen zwischen zwei parallelen Linien schneidet jeden von den beiden parallelen Bogen verlängert in einem Punkte, welcher von seiner Mitte 90° entfernt ist (nach §. 71).

§. 80.

Lehrsatz. Haben zwei Dreiecke eine Seite gemein, und ist diese parallel zu dem Bogen, welcher ihre Scheitel verbindet, so intercipiren die beiden Dreiecke ein gleiches Stück des Mittelbogens.

Beweis. Ist in Fig. 46 AB parallel zu CD, und schneidet ihr Mittelbogen die Linien AC, BD, AD, BC in M, N, P, Q, so ist MP = QN und MQ = PN; denn es ist nach dem Beweise im §. 76 der Bogen $PM = \frac{cd}{2}$, ferner $bQ = \frac{bc}{2}$ und $bN = \frac{bd}{2}$, also $bQ - bN = \frac{bc - bd}{2}$, oder $QN = \frac{cd}{2}$ und also PM = QN; werden die beiden Linien noch um PQ verkürzt, so hat man noch MQ = PN.

§. 81.

Lehrsatz. Halbirt ein Hauptbogen drei von den vier Verbindungslinien zwischen den Endpunkten zweier anderen Hauptbogen, so halbirt er auch die vierte und die beiden Hauptbogen sind parallel.

In Fig. 46 seien AC, AD und CB von XY in M, P, Q halbirt, dann sind die Dreiecke CMc und AMa symmetrisch, also ist Cc = Aa; ferner sind die Dreiecke cCQ und bBQ congruent, weil sie ebenfalls rechtwinkelig sind, und in der Hypotenuse und einem Winkel übereinstimmen, also ist auch Cc = Bb, und wegen der Congruenz der Dreiecke AaP und DdP ist endlich noch Aa = Dd; daher ist Aa = Cc = Dd = Bb und also sind AB und CD parallel; das Uebrige folgt aus §. 79.

§. 82.

Lehrsatz. Intercipiren zwei Dreiecke über derselben Grundlinie auf dem Bogen, welcher die beiden übrigen Seiten des einen Dreiecks halbirt, gleiche Stücke, so ist der Bogen, welcher die Scheitel der beiden Dreiecke verbindet, zur Grundlinie derselben parallel.

Beweis. Der Bogen MP in Fig. 47 halbire die Seiten CA und DA, und auf ihm intercipire das Dreieck CBD ein Stück QN = MP, dann wird auch CB im Punkte Q von MPQN halbirt, denn sonst könnte man QB′ = QC machen und es wäre dann AB′ nach §. 81 parallel zu CD und also QN′ = PM (nach §. 80); da aber QN = MP ist, so wäre QN = QN′, was nicht möglich ist.

§. 83.

Erklärung. Ein Viereck, dessen jede zwei Gegenseiten parallel sind, heiße ein Parallelogramm; ein Viereck mit zwei parallelen Gegenseiten heiße ein Paralleltrapez; ein Viereck, was keine zwei parallele Gegenseiten hat, heiße ein Trapez.

Der Mittelbogen eines Paralleltrapezes oder Parallelogrammes ist das Stück des Mittelbogens von zwei parallelen Gegenseiten, was im Inneren des Vierecks enthalten ist.

Ein Paralleltrapez hat also einen Mittelbogen, ein Parallelogramm hat zwei Mittelbogen, ein Trapez hat keinen Mittelbogen.

§. 84.

Lehrsatz. Die Mittelbogen und die Diagonalen eines Parallelogrammes schneiden einander in Einem Punkte, und werden von diesem Punkte halbirt.

Beweis. Ist ABCD in Fig. 48 ein Parallelogramm, so ist CD parallel zu AB und AD parallel zu CB; MN sei der Mittelbogen im Bezug auf die Seiten DC und AB, und PQ sei der Mittelbogen für AD und BC.

Der Bogen MN halbirt DA, DB, CA und CB nach §. 79, und dasselbe gilt vom Mittelbogen PQ, also befindet sich die Mitte von DB in MN und PQ; daher ist der Durchschnittspunkt von

MN und PQ die Mitte von BD; aus demselben Grunde auch von AC; also schneiden sich die Diagonalen und Mittelbogen in Einen Punkte O, welcher die Diagonalen halbirt.

Nach §. 80 ist endlich MO = NO und PO = QO.

Erklärung. Der Durchschnitts-Punkt der beiden Diagonalen, oder auch der beiden Mittelbogen, oder auch eines Mittelbogens und einer Diagonale in einem Parallelogramme heiße der Mittelpunkt des Parallelogrammes.

§. 85.

Lehrsatz. Die Gegenseiten und auch die Gegenwinkel eines Parallelogrammes sind sich gleich.

Beweis. Da sich die Diagonalen des Parallelogrammes ABCD (Fig. 48) halbiren (nach §. 84), so sind die Dreiecke DOC und AOB congruent, also ist DC = AB und $x = y$, $x' = y'$; ebenso sind die Dreiecke AOD und BOC congruent, und es ist also CB = DA, $v = w$ und $v' = w'$; also ist auch $v + x = w + y$ oder C = A und $v' + x' = w' + y'$ oder B = D.

§. 86.

Lehrsatz. Jeder durch den Mittelpunkt eines Parallelogrammes gezogene Hauptbogen schneidet jede zwei Gegenseiten unter gleichen Wechselwinkeln, und wird selbst zwischen zwei solchen Durchschnittspunkten vom Mittelpunkte halbirt.

Beweis. In Fig. 49 sei O der Mittelpunkt des Parallelogrammes ABCD und PQ ein durch O gehender Hauptbogen, welcher die Gegenseiten CD und AB in P und Q und die Gegenseiten CB und AD in p und q schneidet, dann sind die Dreiecke POC und AOQ congruent, weil sie in einer Seite und den beiden Winkeln an ihr übereinstimmen, daher ist die Seite PO = QO und der Winkel OPC = OQA und also auch OPD = OQB; auch ist noch PC = AQ, und also auch PD = QB. Ferner sind auch die Dreiecke PCp und QAq congruent oder auch OCp und OAq congruent, und hieraus folgt, daß der Winkel p = q und Op = Oq oder auch Pp = Qq sei.

Zusatz. Jeder durch den Mittelpunkt eines Parallelogrammes gehende Hauptbogen theilt dasselbe in zwei congruente Theile.

§. 87.

Lehrsatz. Wenn sich die Diagonalen eines Vierecks gegenseitig halbiren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis. Es sei in Fig. 48 OD = OB und OA = OC; man halbire noch BC durch N, und ziehe NOM; da nun NOM die drei Linien AC, BD und BC halbirt, so halbirt NOM auch AD und es sind DC und AB parallel nach §. 81. Aus gleichem

Grunde ist aber auch AD parallel zu BC, und also ABCD ein Parallelogramm.

§. 88.

Lehrsatz. Gleiche Linien zwischen gleichen sind parallel.

Beweis. Ist in Fig. 48 AB = CD und AD = BC, so sind die Dreiecke DCB und DAB congruent, weil sie in den drei Seiten übereinstimmen, also ist $x' = y'$ $v' = w'$; ebenso sind die Dreiecke ADC und ABC symmetrisch und daher $x = y$, $v = w$; endlich sind die Dreiecke ODC und AOB congruent, weil sie in den drei Winkeln übereinstimmen und daher ist OD = OB und OA = OC: mithin ist ABCD nach §. 86 ein Parallelogramm.

§. 89.

Lehrsatz. Sind zwei Gegenseiten eines Vierecks gleich und parallel, so sind es auch die beiden anderen Seiten, und das Viereck ist ein Parallelogramm.

Beweis. In Fig. 50 seien AB und CD gleich und parallel, so halbirt der Mittelbogen MN nach §. 79 die Seiten DA und CB und auch die Diagonalen BD und AC und es braucht nur noch bewiesen zu werden, daß der Mittelbogen durch den Durchschnitts-Punkt U der Diagonalen geht. Man fälle zu dem Ende von den Ecken des Vierecks die Perpendikel AP und BQ, welche sich in X unterhalb AB schneiden, und noch die Perpendikel DR und CS, welche sich oberhalb CD in Y schneiden, auf den Mittelbogen, so ist $XP = XQ = YR = YS = 90^{0}$ und da $AP = BQ = DR = CS$ nach der Annahme ist, so ist $YD = YC = XA = XB$, und da auch noch $AB = DC$ ist, so sind die Dreiecke DCY und AXB congruent, also ist $X = Y$ oder $PQ = RS$. Nun ist aber $VN = \frac{RS}{2}$ und $WN = \frac{PQ}{2}$ nach §. 76, also auch $VN = WN$, d. h. der Durchschnittspunkt U der Diagonalen befindet sich im Mittelbogen selbst, und daher ist ABCD ein Parallelogramm.

§. 90.

Erklärung. Die Parallelogramme werden in Ansehung ihrer Winkel eingetheilt in gleichwinkelige und ungleichwinkelige, und in Ansehung ihrer Seiten in gleichseitige und ungleichseitige.

Ein Parallelogramm, welches gleichseitig und gleichwinkelig ist, heißt ein Quadrat; ein Parallelogramm, welches gleichseitig, aber ungleichwinkelig ist, heißt eine Raute oder ein Rhombus; ein Parallelogramm, welches ungleichseitig, aber gleichwinkelig ist, heißt ein Rechteck oder Oblongum; und ein Pa-

rallelogramm, welches ungleichseitig und auch ungleichwinkelig ist, heißt ein Rhomboid oder eine längliche Raute.

§. 91.

Lehrsatz. In einem gleichwinkeligen Parallelogramme sind die Diagonalen gleich, seine beiden Mittelbogen stehen auf einander und auf die nicht zugehörigen Seiten senkrecht, auch werden die Winkel der Diagonalen von den beiden Mittelbogen halbirt.

Beweis. Ist in Fig. 48 ABCD ein Parallelogramm und $A = B = C = D$, so sind die Dreiecke ABC und DBC symmetrisch, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen; daher ist $BD = AC$, ferner $x = x' = y = y'$ und $v = v' = w = w'$.

Da das Dreieck BOC gleichschenkelig und $BN = NC$ ist, so ist der Winkel $BON = CON$ und ON senkrecht auf BC; aus demselben Grunde halbirt MO den Winkel AOD und steht senkrecht auf AD; ferner halbirt eben deswegen PQ die Winkel DOC und AOB und weil $POC = \frac{DOC}{2}$, auch $NOC = \frac{BOC}{2}$ ist, so ist $PON = POC + NOC = 90^0$ oder PQ steht senkrecht auf MN.

Zusatz 1. Sind die Diagonalen eines Parallelogrammes gleich, so ist es gleichwinkelig.

Zusatz 2. Sind die beiden Mittelbogen eines Parallelogrammes senkrecht auf den Gegenseiten, wozu sie nicht gehören, so ist das Parallelogramm gleichwinkelig.

§. 92.

Lehrsatz. Ist ein Parallelogramm gleichseitig, so sind seine Mittelbogen gleich, seine beiden Diagonalen sind senkrecht auf einander und halbiren die Winkel der Mittelbogen, wie auch die Winkel des Parallelogrammes selbst.

Beweis. Ist in Fig. 48 $AB = BC = CD = DA$, so wird das Parallelogramm durch die Diagonalen in gleichschenkelige Dreiecke getheilt; daher ist nun $v = y$, $x = w$, $v' = y'$ und $x' = w'$. Da nun aber auch $v = w$ ist, so ist $y = w$; ganz ebenso wird gezeigt, daß $v = x$, $v' = x'$ und $y' = w'$ ist, also werden die Winkel des Vierecks durch die Diagonalen halbirt.

Da ferner im gleichschenkeligen Dreiecke ABC die Grundlinie AC durch BO halbirt wird, so steht BO oder BD senkrecht auf AC, daher stehen die Diagonalen senkrecht auf einander. Endlich sind die Dreiecke AMO und AQO, welche in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, symmetrisch, und also $QO = MO$ oder $QP = MN$ und der Winkel $AOM = AOQ$; daher halbirt die Diagonale AC die Winkel der beiden Mittelbogen,

durch welche sie geht, und ebenso zeigt man, daß die Diagonale BD die Winkel NOQ und POM halbirt.

Zusatz 1. In einem Quadrate machen die Diagonalen mit den Mittelbogen Winkel von 45°.

Zusatz 2. Stehen die Diagonalen eines Parallelogrammes senkrecht auf einander, oder werden die Winkel des Parallelogrammes von den Diagonalen halbirt, so ist das Parallelogramm gleichseitig.

§. 93.

Aufgabe. Man soll aus zwei gegebenen Seiten a und b ein Rechteck construiren.

Auflösung. Man construire Fig. 51 ein gleichschenkeliges Dreieck XAB so, daß $XA = XB = 90° - \frac{a}{2}$ und die dritte Seite $AB = b$ sei, verlängere dann XA und XB, bis sie sich zum zweiten Male in Y schneiden; nimmt man nun $YD = YC = 90° - \frac{a}{2}$ und zieht DC, so ist ABCD das gesuchte Rechteck. Da nämlich die Dreiecke AXB und DYC congruent und gleichschenkelig sind, so sind die Winkel XAB, XBA, YCD und YDC gleich groß und also auch ihre Nebenwinkel $A = B = C = D$. Da ferner $XA + YC = XB + YD = 180° - a$ also $AC = BD = a$ und $AB = CD = b$ ist, so hat das Rechteck die beiden gegebenen Seiten.

Zusatz 1. Soll über einer gegebenen Seite ein Quadrat construirt werden, so ist die Auflösung wie vorhin, nur daß jetzt $b = a$ ist.

Zusatz 2. Um aus zwei gegebenen Seiten DA und AB (in Fig. 48) und dem Winkel A ein Parallelogramm zu construiren, so construire man aus diesen Stücken das Dreieck DAB und über der Seite DB das congruente Dreieck DBC, so macht dieses mit dem Dreiecke DAB das gesuchte Parallelogramm ABCD aus.

§. 94.

Lehrsatz. Der Mittelbogen zweier Gegenseiten eines schiefwinkeligen Parallelogrammes schneidet diese verlängerten Gegenseiten in zwei Punkten, welche von ihrem eigenen Durchschnitts-Punkte gleich weit abstehen, und dieser Punkt ist vom Mittelpunkte des Parallelogrammes immer um 90° entfernt.

Beweis. In Fig. 52 schneide der Mittelbogen MN der beiden parallelen Seiten DC und AB diese Seiten in a und b, und diese Seiten selbst mögen sich in c schneiden. Da nach der Annahme ABCD ein schiefwinkeliges Parallelogramm ist, also der

andere Mittelbogen PQ nicht auf DC und AB senkrecht ist, so ist im Dreiecke CPQ nicht $cP = cQ$, sondern da nach §. 86 die Winkelsumme $cPQ + cQP = 180^\circ$ ist, so ist auch $cP + cQ = 180^\circ$, und da der Mittelpunkt O die Seite PQ des Dreiecks halbirt, so ist

$$cO = 90^\circ.$$

Da ferner nach §. 79 Zusatz 3 noch $bQ = aP = 90^\circ$ ist, so ist $bQ + aP = 180^\circ$, und da $bQ = bc + cQ$, $aP = cP - ca$ ist, so hat man also auch $cQ + cP + bc - ac = 180^\circ$ und da $cP + cQ = 180^\circ$ ist, so ist offenbar

$$ca = cb.$$

Zusatz 1. Wird also aus O ein Hauptbogen beschrieben, so geht er durch c und halbirt ab.

Zusatz 2. Die Mittelbogen zweier Gegenseiten eines Parallelogrammes schneidet diese verlängerten Seiten unter gleichen Winkeln.

Da nämlich $ca = cb$ ist, so ist der Winkel $OaP = ObQ$, was auch aus §. 86 erhellet.

Zusatz 3. Ist ABCD ein gleichwinkeliges Parallelogramm, so fallen die drei Punkte a, b, c in Einen zusammen und es ist dann $cP = cQ = 90^\circ$.

§. 95.

Lehrsatz. Die reciproke Figur eines Parallelogrammes ist wieder ein Parallelogramm.

Beweis. Beschreibt man aus den Ecken A, B, C, D eines Parallelogrammes ABCD die Hauptbogen $A'B'$, $C'B'$, $C'D'$, $D'A'$, so ist $A'B'C'D'$ die reciproke Figur zu ABCD. Da ferner A und B zwei nicht homologe Mittelpunkte von $A'B'$ und $B'C'$ sind, so ist nach §. 11

$$AB + B' = 180^\circ, \text{ und ebenso}$$
$$BC + C' = 180^\circ,$$
$$CD + D' = 180^\circ, \text{ und}$$
$$DA + A' = 180^\circ.$$

Weil aber auch umgekehrt A' und B' zwei nicht homologe Mittelpunkte von AD und AB sind, so ist auch

$$A + A'B' = 180^\circ, \text{ und ebenso}$$
$$B + C'B' = 180^\circ,$$
$$C + C'D' = 180^\circ \text{ und}$$
$$D + A'D' = 180^\circ.$$

Durch die vorstehenden acht Formeln ist der Zusammenhang unter den Seiten und Winkeln der beiden Vierecke ABCD und $A'B'C'D'$ vollständig ausdedrückt.

Da nun ABCD ein Parallelogramm, also $A = C$ und $B = D$ ist, so ist auch $A'B' = C'D'$ und $C'B' = A'D'$, weil aber die

Gegenseiten des Vierecks A'B'C D' gleich sind, so ist es ebenfalls ein Parallelogramm nach §. 87.

Zusatz. Sind jede zwei Gegenwinkel eines Vierecks gleich groß, so ist es ein Parallelogramm.

Beweis. Da im Vierecke die Gegenwinkel gleich groß sind, so sind im reciproken Vierecke die Gegenseiten gleich, daher ist dieses ein Parallelogramm und mithin auch das ursprüngliche Viereck.

§. 96.

Lehrsatz. Zwei reciproke Parallelogramme haben denselben Mittelpunkt.

Beweis. In Fig. 53 sei M der Mittelpunkt des Parallelogrammes ABCD, seine Gegenseiten AD und BC mögen sich in a schneiden; zieht man dann Ma, so ist Ma = 90° (nach §. 94). Ist ferner A'B'C'D' das reciproke Parallelogramm, also C' das Centrum von CBa, und A' das Centrum von DAa, so ist auch umgekehrt a das Centrum der Diagonale A'C', und da aM = 90° ist, so geht die Diagonale A'C' offenbar durch den Mittelpunkt des Parallelogrammes ABCD. Dasselbe gilt aber auch von der Diagonale B'D'; daher haben die beiden reciproken Parallelogramme denselben Mittelpunkt M.

Zusatz. Sind a und b die Durchschnittspunkte der Gegenseiten des Parallelogrammes ABCD, a' und b' die Durchschnietspunkte der Gegenseiten des Parallelogrammes A'B'C'D', so sind die vier Punkte a, b, a', b' um 90° vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte M entfernt; daher befinden sich diese vier Punkte (mit ihren vier Gegenpunkten) in einem Hauptkreise, dessen Centrum der Punkt M ist.

Fünfter Abschnitt.

Vom Inhalte der Figuren, von ihrer Verwandlung und Theilung.

§. 97.

Erklärung. Das Maaß des Inhaltes einer Figur ist ein Hauptbogen, welcher sich ebenso zu einem Hauptkreise verhält, wie die Fläche der Figur sich zur halben Oberfläche der Kugel verhält.

Ist in Fig. 54 ABD ein Hauptkreis, dessen einer Mittelpunkt C sein mag, so ist die Fläche ABCD, welcher dieser

Kreis einschließt, die Oberfläche der halben Kugel. Da aber die meisten sphärischen Figuren, welche betrachtet werden, kleiner sind als die halbe Kugelfläche, so vergleicht man auch ihren Inhalt mit dem sphärischen Inhalte eines Hauptkreises, d. h. mit der halben Kugelfläche.

§. 98.

Lehrsatz. Sind zwei Seiten eines Dreiecks Quadranten, so ist die dritte Seite das Maaß seines Inhaltes.

Beweis. Ist in Fig. 54 ACB das gegebene Dreieck und CA = CB = 90°, so ist die Seite AB das Maaß des Dreiecks ACB; denn beschreibt man aus C einen Hauptkreis, so geht er durch A und B, und die Seite AB ist ein Bogen desselben; das Dreieck ACB erscheint nun als ein sphärischer Sector des Hauptkreises, und daß die Fläche dieses Sectors sich zum sphärischen Inhalte des Hauptkreises ABCD, d. h. zur halben Kugelfläche verhalte, wie der Bogen AB sich zum Hauptkreise ADBA verhält, kann offenbar ganz ebenso bewiesen werden, wie man in der Planimetrie beweiset, daß sich der Inhalt eines Sectors zum Inhalte des ganzen Kreises verhält, wie der Bogen des Sectors zur Peripherie des Kreises.

§. 99.

Lehrsatz. Der Inhalt einer von zwei Halbkreisen eingeschlossenen Figur (eines Zweiecks) hat zum Maaße den doppelten Hauptbogen, welcher die beiden Halbkreise halbirt.

Beweis. Ist in Fig. 55 ACBD das gegebene Zweieck und halbirt der Hauptbogen CD die beiden Halbkreise ACB und ADB, so ist AC = AD = BC = BD und daher sind die Dreiecke ACD und BCD congruent. Da nun das Maaß des Dreiecks ACD und also auch des Dreiecks BCD der Bogen CD nach §. 98 ist, so ist das Maaß des Zweiecks ACBD = 2.CD.

Zusatz. Ist der Inhalt einer Figur so groß als der Inhalt eines Zweiecks, so läßt sich auch das Maaß der Figur bestimmen, denn es stimmt nun mit dem Maaße des Zweiecks überein, und wenn umgekehrt das Maaß einer Figur bekannt ist, so kann man sie in ein Zweieck verwandeln, indem man nur das Maaß der Figur halbirt, durch die Endpunkte des halbirten Bogens Hauptbogen zieht, welche auf ihm senkrecht sind, und diese bis zu ihren beiden Durchschnittspunkten verlängert.

§. 100.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke über derselben Grundlinie sind gleich groß, wenn der Hauptbogen, welcher die Scheitel des Dreiecks verbindet, zur Grundlinie parallel ist.

Beweis. Wenn die Dreiecke ABC und ABC' in Fig. 56 dieselbe Grundlinie haben, und der Bogen CC' zu AB parallel ist, so sind die Perpendikel AP, BQ, CR und C'R', welche auf den Mittelbogen mm'nn' gefällt werden, gleich lang nach §. 78; daher hat man folgende Paare congruenter Dreiecke AmP und CmR, BnQ und CnR, Am'P und C'm'R', Bn'Q und C'n'R', (wie im §. 72). Nun ist aber das Viereck APQB = AmnB + APm + BnQ, also ist auch APQB = AmnB + CmR + CnR; daher ist das Viereck APQB so groß als das Dreieck ACB.

Auch ist das Viereck APQB = Am'n'B + APm' — BQn' und also auch APQB = Am'n'B + m'C'R' — n'C'R' oder das Viereck APQB ist gleich dem Dreiecke AC'B, und da die beiden Dreiecke ACB und AC'B beide dem Vierecke APQB gleich sind, so sind sie einander gleich.

§. 101.

Aufgabe. Man soll ein Dreieck in ein anderes verwandeln, welches mit dem vorigen dieselbe Grundlinie, aber an ihr einen gegebenen Winkel hat.

Auflösung 1. Ist ABC das gegebene Dreieck und BAC' (Fig. 56) der gegebene Winkel, so halbire man die Seiten AC und BC durch den Hauptbogen mn, welcher von AC' in m' geschnitten werden mag; dann mache man m'C' = m'A und ziehe BC', so ist ABC' das gesuchte Dreieck.

Auflösung 2. Man halbire wieder AC und BC durch mn, welches von AC' in m' geschnitten werden mag, dann mache man m'n' = mn oder auch nn' = mm', und ziehe Bn'; wenn nun Am' und Bn' bis zum Durchschnittspunkte C' oberhalb mn verlängert werden, so ist AC'B wieder das gesuchte Dreieck.

Beweis. Da bei der Auflösung 1. nach §. 81 und bei der Auflösung 2. nach §. 82 der Bogen CC' zur Grundlinie AB parallel ist, so hat das Dreieck ABC gleichen Inhalt mit ABC' nach §. 100.

§. 102.

Aufgabe. Man soll über einer Seite eines Dreiecks ein gleichschenkeliges Dreieck construiren, welches dem gegebenen Dreiecke gleich ist.

Beweis. In Fig. 57 sei ABC das gegebene Dreieck und AB die Seite, über welcher das gleichschenkelige Dreieck construirt werden soll. Man halbire die beiden anderen Seiten AC und BC durch den Bogen mn und fälle auf ihn von C das Loth CR; man halbire auch AB und in der Mitte E errichte man auf AB das Loth ER, wovon mn in R' geschnitten wird; macht man dann R'D = RC und zieht DA und DB, so ist ADB das gesuchte

Dreieck, denn es ist DA = DB und wird CD gezogen, so ist CD parallel zu AB.

§. 103.

Aufgabe. Man soll ein Dreieck in ein anderes verwandeln, welches mit jenem einen Winkel gemein und an ihm eine gegebene Seite hat.

Auflösung. Ist ACB in Fig. 58 das gegebene Dreieck, und soll das neue Dreieck mit ihm den Winkel C gemein, aber statt der Seite CB die Seite CB' haben, so halbire man BB' und BA durch den Bogen mp, wovon CA in n geschnitten werden mag; macht man nun nA' = nA und zieht B'A', so ist A'CB' das gesuchte neue Dreieck.

Beweis. Da die Dreiecke ABB' und AA'B' nach §. 101 gleich groß sind und das Dreieck ADB' gemein haben, so sind auch die Dreiecke DAA' und DBB' gleich groß. Wenn man aber vom Dreiecke ACB das Dreieck DAA' wegnimmt, und dafür das Dreieck DBB' wieder hinzufügt, so verwandelt es sich in das Dreieck A'CB'.

Zusatz. Man kann auch, nachdem schon mp gezogen ist, nq = mp machen und B'q ziehen, wovon CA in demselben Punkte A', wie vorhin, geschnitten wird.

§. 104.

Aufgabe. Man soll eine Figur in eine andere verwandeln, welche eine Ecke weniger hat.

Auflösung. Ist in Fig. 59 EABCD ein gegebenes Fünfeck, so schneide man durch die Diagonale EC ein Dreieck EDC von ihm ab, verlängere die Seite AE und ziehe von D aus eine Parallele DF zu CE, wovon AE in F geschnitten werden mag, so ist, wenn noch CF gezogen wird, das Viereck FABC so groß, als das gegebene Fünfeck.

Da nämlich die Dreiecke EDC und EFC nach §. 100 oder §. 101 gleich groß sind, so kann man für das erste Dreieck das zweite an die Stelle setzen, und dann verwandelt sich das Fünfeck in das Viereck FABC.

§. 105.

Aufgabe. Man soll ein Dreieck in ein Zweieck verwandeln.

Auflösung. Ist in Fig. 60 ABC das gegebene Dreieck, so halbire man die Seiten AC und BC durch den Bogen mn und beschreibe aus dem Centrum A den Hauptbogen m'o, wovon mn in m' und AB in o geschnitten wird, dann ist Ao = Am' = 90°, und werden diese beiden Hauptbogen verlängert, bis sie sich wieder in C'', dem Gegenpunkte von A schneiden, so ist das Zweieck Am'C''oA so groß, als das Dreieck ABC.

Der Beweis ist derselbe, wie im §. 100, nur daß jetzt Am'n'B kein Viereck, sondern ein Dreieck und AC''B jetzt kein Dreieck, sondern ein Zweieck ist.

§. 106.

Wenn man die Mitten zweier Seiten eines Dreiecks durch einen Hauptbogen verbindet, und auch die Hälfte der dritten Seite bestimmt, dann die beiden Hauptbogen bis zu ihrem Durchschnittspunkte verlängert, und von diesem Punkte aus auf ihnen die vorhin genannten Bogen aufträgt, so macht der Hauptbogen, welcher ihre Endpunkte verbindet, mit den vorhin genannten beiden Bogen immer ein rechtwinkeliges Dreieck, wovon er die eine Kathete und zugleich das Maaß der Hälfte des gegebenen Dreiecks ist, die Hypotenuse ist gleich dem Hauptbogen, welcher die Mitten der beiden Seiten des gegebenen Dreiecks verbindet, und die andere Kathete ist die Hälfte der dritten Seite eben dieses Dreiecks.

Beweis. Es sei in Fig. 60 ABC das gegebene Dreieck, mn halbire die Seiten AC und BC, und schneide AB in n'; macht man nun $n'o = \frac{AB}{2} = AD = BD$ und $n'm' = mn$, so ist, wenn m'o gezogen wird, der Winkel $m'on = 90^0$ und m'o das Maaß für den halben Inhalt des Dreiecks ACB.

Denn zieht man noch Am', wovon AB zum zweiten Male in C'' geschnitten wird, so ist C'' der Gegenpunkt von A; ferner ist $Dn' = 90^0$ (nach §. 79, Zusatz 3) und da $Ao = AD + Dn' - on'$ auch $on' = AD$ ist, so ist $oA = 90^0 = oC'$. Werden AP, BQ und DE senkrecht auf mn gefällt, so ist n' das Centrum von DE und also $n'E = n'D = 90^0$; auch ist nun $PE = QE = mn = m'n'$ nach §. 71, und da $Pm' = PE + En' - n'm'$ ist, so ist $Pm' = En' = 90^0$; da weiter der Winkel $P = 90^0$ ist, so ist m' das Centrum von AP und also $m'A = 90^0$. Da aber auch $Ao = 90^0$ ist, so ist A das Centrum von om', und also om' senkrecht auf on'.

Da endlich das Dreieck ACB dem Zweiecke Am'C''oA gleich und m'o nach §. 99 das Maaß die Hälfte dieses Zweiecks ist, so ist om' auch das Maaß der Hälfte des Dreiecks ABC.

Zusatz 1. Ueberhaupt ist das Maaß für den halben Inhalt eines Dreiecks die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen andere Kathete die Hälfte einer Seite und dessen Hypotenuse so lang ist als ein Bogen, welcher die beiden anderen Seiten des zu messenden Dreiecks verbindet.

Zusatz 2. Da nach §. 104 jedes sphärische Vieleck in ein Dreieck, und auch jedes Dreieck in ein Zweieck verwandelt werden kann, so kann also auch das Maaß eines jeden Vielecks geometrisch gefunden werden.

§. 107.

Lehrsatz. Das Maaß eines Dreiecks ist einerlei mit dem Maaße des Ueberschusses der Summe seiner drei Winkel über 180°.

Beweis. Bezeichnet man in Fig. 60 die Winkel des Dreiecks ABC mit A, B, C und ist X der Punkt, welcher von den Ecken des Nebendreiecks ABC' gleichen Abstand hat, so macht XA mit AP einen Quadranten aus nach §. 73, worauf nach §. 106 der Quadrant Am' senkrecht steht. Da nun der Winkel XAD nach §. 57

$$= \frac{C'AB + C'BA - AC'B}{2}$$

ist, so ist er $= \frac{360^\circ - A - B - C}{2}$, und also der Winkel oAm' $= \frac{A + B + C - 180^\circ}{2}$; da ferner om' das Maaß dieses Winkels ist, so ist auch om' $= \frac{A + B + C - 180^\circ}{2}$, und da om' nach §. 106 das Maaß für den halben Inhalt des Dreiecks ABC ist, so ist das Maaß des ganzen Dreiecks $= A + B + C - 180^\circ$, oder werden die Winkel A, B, C und 180° in Kreisbogen umgesetzt, die zum planimetrischen Radius die Einheit oder den Kugelradius haben, so ist das Maaß für den Inhalt des Dreiecks ABC $= A + B + C - \pi$.

Zusatz 1. Zwei symmetrische Dreiecke haben gleichen Inhalt. Denn da symmetrische Dreiecke in den drei Winkeln übereinstimmen, so haben sie auch gleiches Maaß.

Zusatz 2. Wenn sich zwei Seiten eines Dreiecks zu 180° ergänzen, so ist das Maaß des von ihnen eingeschlossenen Winkels auch das Maaß des Dreiecks selbst.

Denn wenn in Fig. 18 CA + CB = 180° ist, so ist auch A + B = 180°, und da A + B + C — 180° das Maaß des Dreiecks ist, so ist dasselbe offenbar = C.

§. 108.

Aufgabe. Man soll ein Dreieck durch eine Scheitellinie halbiren.

Auflösung. Um das Dreieck ACB Fig. 61 durch einen von C aus gezogenen Hauptbogen zu halbiren, construire man nach §. 106 das Maaß PQ der Hälfte des Dreiecks, indem man die Seiten CB und AB durch mn halbirt, wovon CA in V geschnitten wird, ferner VQ = mn und VP $= \frac{CA}{2}$ macht. Wird nun PQ durch den Bogen VR halbirt, und AB von VR in r geschnitten, so

mache man noch rD = rA, und ziehe CD, so ist das Dreieck ACD = BCD.

Denn da PR das Maaß von $\frac{ACD}{2}$, PQ das Maaß von $\frac{ACD}{2}$, und PR die Häfte von PQ ist, so ist auch ACD die Hälfte vom Dreiecke ACB, und also BCD die andere Hälfte.

Zusatz 1. Soll das Dreieck ACB so getheilt werden, daß $\frac{ACD}{BCD} = \frac{m}{n}$ ist, so mache man den Bogen PR $= \frac{m}{m+n} \cdot$ PQ, und verfahre übrigens, wie vorhin.

Zusatz 2. Soll das Dreieck ACD verdoppelt werden, so construire man auf die bekannte Weise das Maaß seiner Hälfte, nämlich PR, und mache PQ = 2.PR; ziehe dann VQ, wovon AD in n geschnitten wird, mache nB = nA und ziehe CB, so ist das Dreieck ACB zweimal so groß als ACD.

Auf ähnliche Weise kann man ein Dreieck ACB construiren, welches irgend ein anderes Vielfaches vom Dreiecke ACD ist.

§. 109.

Aufgabe. Man soll ein Dreieck in ein anderes verwandeln, welches zwei gegebene Seiten hat.

Auflösung. Ist in Fig. 62 das Maaß der Hälfte des gegebenen Dreiecks pq, so mache man den Winkel p = 90°, und pr gleich der Hälfte von einer der beiden gegebenen Seiten; dann ziehe man rq, welches verlängert wird. Ferner mache man rD = 90° und DA = DB = pr, so ist AB die eine gebebene Seite des neuen Dreiecks; aus A beschreibe man mit einem Radius, welcher so groß ist, als die Hälfte der anderen gegebenen Seite einen Nebenkreis, welcher rq im Allgemeinen in zwei Punkten m und m′ schneidet; einen solchen Punkt m verbinde man mit A, mache mC = mA, und ziehe noch BC, so hat das Dreieck ABC zwei gegebene Seiten AB und AC und auch die gegebene Größe, deren Maaß das Doppelte von pq ist.

Wenn der aus A beschriebene Nebenkreis den Bogen qr nicht in einem oder zwei Punkten erreicht, so ist die Construction unmöglich.

§. 110.

Aufgabe. Man soll ein Dreieck von einem beliebigen Punkte seines Umfanges aus, in zwei gleiche Theile theilen.

Ist in Fig. 63 D der gegebene Punkt im Umfange des Dreiecks ABC, so halbire man das Dreieck von der Ecke A aus nach §. 108

durch AE, mache nach §. 101 das Dreieck DEF = DEA, so ist das Dreieck ABC durch DF halbirt.

Denn es ist ACE die Hälfte von ABC und ACE = CDE + ADE = CDE + DEF = CDF, wenn aber CDF die Hälfte von ACB ist, so ist ADFB die andere Hälfte.

Zusatz. Auf ähnliche Art kann man auch das Dreieck ABC durch einen von D ausgehenden Bogen nach einem gegebenen anderen Verhältnisse theilen, nur muß, wie im Zusatz 1 zu §. 107, dann ein Bogen nach demselben Verhältnisse getheilt werden, was aber bekanntlich durch eine einfache Construction im Allgemeinen nicht angeht.

§. 111.

Lehrsatz. Das halbe Maaß eines Parallelogrammes ist so so groß, als die Summe von zwei auf einander folgenden inneren Winkeln, vermindert um 180°.

Beweis. In Fig. 48 sei F die Größe des Parallelogrammes ABCD, dann ist nach §. 106 das Maaß des Dreiecks ADC = x + w + D — 180° und da x = y und ADC die Hälfte von F ist, so ist $\frac{F}{2} = y + w + D - 180^0$ oder $\frac{F}{2} = A + D - 180^0$.

Zusatz. Ist ein Parallelogramm gleichwinkelig, so ist das Maaß vom vierten Theile seines Inhalts gleich einem Winkel des Parallelogrammes vermindert um 90°.

Denn wenn D = A ist, so ist $\frac{F}{2} = 2A - 180^0$ oder $\frac{F}{4} = A - 90$.

§. 112.

Aufgabe. Man soll eine Figur in ein Quadrat verwandeln.

Auflösung. Ist Fig. 64 der Bogen MN das Maaß der Figur, so construire man ein gleichschenkeliges Dreieck XAB so, daß $XA = XB = 45^0 + \frac{MN}{8}$ und $AB = 90^0 - \frac{MN}{4}$ sei, verlängere die beiden gleichen Seiten, bis sie sich in Y schneiden, mache dann YD = YC, ziehe DC und construire zu ABCD die reciproke Figur, so ist diese das gesuchte Quadrat.

Beweis. Da $XA + YD = XB + YC = 90^0 + \frac{MN}{4}$ ist, so ist $AD = BC = 90^0 - \frac{MN}{4}$ und also AB = BC = CD = DA und da die Winkel ABCD offenbar auch gleich sind,

so ist ABCD ein Quadrat; das reciproke Parallelogramm ist daher ebenfalls ein Quadrat und bezeichnet man einen Winkel desselben mit φ, so ist $\varphi = 180^\circ - AB$ und also $\varphi = 90^\circ + \frac{MN}{4}$. Nun ist aber, wenn der Inhalt des reciproken Quadrates mit F bezeichnet wird, $\frac{F}{4} = \varphi - 90^\circ$ nach §. 111, also ist $\frac{F}{4} = \frac{MN}{4}$ oder $F = MN$; das Quadrat hat also den gegebenen Inhalt.

§. 113.

Zwei Parallelogramme über derselben (oder über gleicher Grundlinie sind gleichgroß, wenn sie zwischen denselben Gegenkreisen enthalten sind.

Beweis. Da die beiden Parallelogramme gleiche Grundlinie haben, so kann man sie in eine solche Lage bringen, daß sie in Fig. 65 die Grundlinie gemein haben; und da die beiden Parallelogramme zwischen denselben Gegenkreisen enthalten sind, deren Mittelkreis MN sein mag, so halbirt MN die Seiten AE, AC, BD, BF und auch die vier Diagonalen; daher sind die Dreiecke AEB und ACB nach §. 100 gleichgroß, und da die Parallelogramme durch die Diagonalen BE und BC halbirt werden, also zweimal sogroß sind, als die genannten Dreiecke, so sind die Parallelogramme ABDC und ABFE selbst gleichgroß.

§. 114.

Lehrsatz. Das Maaß eines beliebigen Polygones findet man wenn man von der Summe seiner inneren Winkel so oft 180° subtrahirt, als das Polygon Ecken hat, und zum Reste wieder 360° addirt.

Beweis. Denn zerlegt man das Polygon in so wenige Dreiecke, als möglich, so ist die Zahl der Dreiecke $n-2$, wenn das Polygon n Seiten hat, und wenn man die Maaße aller dieser Dreiecke zu einem Bogen an einander setzt, so erhält man das Maaß für den Inhalt F des ganzen Polygones. Wenn man aber nach §. 106 die Summen der Winkel dieser Dreiecke vereinigt, welche die Summe S aller inneren Winkel des Polygones ausmachen, so muß man für jedes Dreieck noch 180° subtrahiren, daher ist $F = S - (n-2).\ 180^\circ$ oder auch

$$F = S - n.\ 180^\circ + 360^\circ.$$

Zusatz. Das Maaß für den Inhalt einer Figur ergänzt die Summe ihrer äußeren Winkel, oder auch den Umfang der reciproken Figur jedesmal zu 360°.

Beweis. Bezeichnet man den Umfang der reciproken

Figur mit U, so ist, weil jede Seite derselben den gegenüberliegenden Winkel der ursprünglichen Figur zu 180° ergänzt $S + U = n. 180°$, und also $F + U = 360°$ oder $F + U = 2\pi$.

Da aber ein innerer Winkel einer Figur F auch den äußeren Winkel an derselben Ecke zu 180° ergänzt, so hat jeder äußere Winkel der Figur F zum Maaße eine Seite der reciproken Figur, und daher ist U auch das Maaß für die Summe der äußeren Winkel der Figur F.

Sechster Abschnitt.

Geometrische Herleitung der Formeln für den Zusammenhang unter den Seiten und Winkeln der Dreiecke.

§. 115.

Da die Construction eines Dreiecks im Allgemeinen bestimmt ist, wenn von den sechs Stücken, nämlich den drei Seiten und drei Winkeln desselben, irgend drei gegeben sind, und die drei übrigen Stücke des Dreiecks aus den drei gegebenen durch Construction hergeleitet werden können, so wird sich der Zusammenhang unter den sechs Stücken eines Dreiecks auch durch arithmetische Formeln in Lehrsätzen ausdrücken lassen, welchen gemäß man dann aus den Zahlen für die drei gegebenen Stücke eines Dreiecks die Zahlen für die drei davon abhängenden übrigen Stücke desselben durch Rechnung herleiten kann. Auch der Inhalt und Umfang eines Dreiecks müssen aus den drei Bestimmungs-Stücken desselben berechnet werden können.

In diesem Abschnitte sollen nun die erwähnten Formeln sämmtlich unmittelbar der geometrischen Construction entnommen werden, damit sich die Betrachtung nie von den in Rede stehenden Größen selbst entferne. Wenn aber alle analytische Herleitung zurückgewiesen wird, so muß dafür die geometrische eintreten, welche nicht selten noch einfacher, auf jeden Fall aber lehrreicher und anziehender ist; diese Methode ist die der Alten, ihre Vernachlässigung rächt sich, ihre Förderung ist preiswürdig. Zunächst also werden die Formeln für das rechtwinkelige und rechtseitige Dreieck hergeleitet werden, und dann später die Formeln für die Dreiecke überhaupt; auch mögen anfänglich die Katheten kleiner als ein Quadrant sein.

§. 116.

Lehrsatz. Der Cosinus der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist ein Produkt aus den Cosinus seiner beiden Katheten.

Beweis. In Fig. 66 sei das Dreieck ACB an C rechtwinklig und O der Mittelpunkt der Kugel, die Kugelradien OA, OB, OC werden verlängert; durch einen Punkt R in der Verlängerung von OA lege man eine Ebene PRQ senkrecht auf OR, und von dieser Ebene mögen die Ebenen der Seiten des Dreiecks ABC in RQ, RP und PQ geschnitten werden. Da nun OR auf PQR senkrecht ist und ORQ durch OR gelegt ist, so steht auch ORQ auf PRQ und also auch PRQ auf ORQ senkrecht, und da nach der Annahme der Winkel ACB ein rechter und also auch OQP auf ORQ senkrecht ist, so steht auch die Durchschnitts-Linie PQ senkrecht auf OQR. Daher kommen vier rechtwinkelige ebene Dreiecke vor: OQP ist an Q, PRQ an Q, OQR an R und OPR an R rechtwinkelig.

Im Dreiecke POQ ist $OQ = OP \cos BC$, und im Dreiecke ORQ ist $OR = OQ \cos AC$, also $OR = OP \cos AC . \cos BC$, und da im Dreiecke OPR auch $OR = OP \cos AB$ ist, so ist offenbar $OP \cos AB = OP \cos AC \cos BC$ oder auch

$$\cos AB = \cos AC . \cos BC.$$

Anmerkung. Das so eben bewiesene Theorem ist das Analogon des Satzes von Pythagoras für die Planimetrie in Hinsicht auf die arithmetische Bedeutung dieses Satzes, und es kann aus ihm der planimetrische Satz wieder gefolgert werden. Ueberhaupt können aus den Formeln für das sphärische Dreieck die analogen Formeln für das ebene Dreieck hergeleitet werden, und es wird diese Herleitung weiter unten ebenfalls gezeigt werden.

§. 117.

Lehrsatz. Der Sinus einer Kathete ist gleich dem Sinus der Hypotenuse, multiplicirt mit dem Sinus des Gegenwinkels jener Kathete.

Beweis. Es sei Fig. 66 die Construction, wie im §. 116, dann ist im Dreiecke OPR die Kathete $PR = OP \sin AB$; im Dreiecke PRQ ist $PQ = PR \sin PRQ = OP \sin AB . \sin PRQ$, oder, da PRQ das Maaß des Winkels $BAC = A$ der beiden Ebenen OAC und OAB ist, $PQ = OP . \sin AB . \sin A$, und da im Dreiecke OQP auch $PQ = OP \sin BC$ ist, so ist $OP \sin BC = OP . \sin AB \sin A$, oder auch

$$\sin BC = \sin AB . \sin A.$$

§. 118.

Lehrsatz. Die Tangente einer Kathete ist gleich der Tangente der Hypotenuse, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den sie mit der Kathete macht.

Beweis. In Fig. 66 ist RP = OR tng AB und RQ = RP cos BAC, also auch RQ = OR tng AB cos A und da RQ = OR tng AC ist, so ist OR tng AC = OR tng AB. cos A oder tng AC = tng AB . cos A.

§. 119.

Lehrsatz. Die Tangente einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Tangente ihres Gegenwinkels, multiplicirt mit dem Sinus der anderen Kathete.

Beweis. In Fig. 66 ist PQ = RQ tng A und PQ = OQ sin AC, also PQ = OQ tng A . sin AC und da auch PQ = OQ tng BC ist, so ist OQ tng BC = OS tng A . sin AC oder auch

tng BC = tng A . sin AC.

§. 120.

Lehrsatz. Der Cosinus eines Winkels in einem rechtwinkeligen Dreiecke ist gleich dem Cosinus der Gegenkathete, multiplicirt mit dem Sinus des anderen Winkels.

Beweis. Man ergänze in Fig. 67 die Kathete CA und die Hypotenuse AB zu Quadranten, nämlich CD = BF = 90°, und ziehe FD, so EFD ebenfalls ein an F rechtwinkeliges Dreieck und FD + B = 90°, wie auch D + CB = 90° (nach §. 54) und da sin FD = sin DE. sin E nach §. 117 ist, so hat man auf der Stelle: cos B = cos CA . sin A.

§. 121.

Lehrsatz. Die Hypotenuse eines rechtwinkelsgen Dreiecks ist ein Product aus den Cotangenten der beiden Winkel an ihr.

Beweis. Da in Fig. 67 nach §. 118 ist tng FD = tng E. sin EF, so ist cot B = tng A . cos AB, oder auch cos AB = cot A . cot B.

Anmerkung. Die vorstehenden sechs Lehrsätze sind einfach, und daher leicht im Gedächtnisse zu bewahren; sie drücken auf eine vollständige Weise aus, wie man, abgesehen von dem rechten Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks aus zwei von den fünf Stücken desselben die drei übrigen berechnen kann.

§. 122.

Lehrsatz. Die vorhin bewiesenen Lehrsätze gelten von jedem rechtwinkeligen Dreiecke.

Beweis. Ist in Fig. 68 ACB ein rechtwinkeliges Dreieck, worin die Katheten CA und CB kleiner als 90° sind und ist D

der Gegenpunkt von B, so ist im rechtwinkeligen Dreiecke DCA die Kathete CD $>$ 90° und CA $<$ 90° und wenn E der Gegenpunkt von A ist, so sind im rechtwinkeligen Dreiecke EDC beide Katheten CD und CE $>$ 90°; daher braucht nur noch gezeigt zu werden, daß die vorigen Sätze auch in der Anwendung auf die Dreiecke DCA und DCE richtig sind.

Nehmen wir den Satz, daß $\cos AB = \cos AC \cdot \cos BC$, so ist $\cos AB = -\cos DA$, $\cos BC = -\cos DC$, und $\cos AC = -\cos EC$, also ist $\cos DA = \cos AC \cdot \cos DC$ und da $AB = DE$ ist, auch $\cos DE = \cos DC \cdot \cos EC$; daher gilt der Satz auch von den Dreiecken DAC und DEC.

Auf ähnliche Art zeigt man die allgemeine Gültigkeit der fünf übrigen Sätze.

Anmerkung. Ein Anfänger thut wohl, den Beweis ganz auszuführen; dabei wird er sich diese wichtigen Sätze zugleich tiefer einprägen.

§. 123.

Lehrsätze. Von den Seiten und Winkeln eines rechtseitigen Dreiecks gelten die folgenden sechs Lehrsätze:

1. Der Cosinus des Nebenwinkels der Hypotenuse ist ein Product aus den Cosinus der beiden Katheten.
2. Der Sinus einer Kathete ist gleich dem Sinus der Hypotenuse, multiplicirt mit dem Sinus der Seite, welche der Kathete gegenüber liegt.
3. Die Tangente einer Kathete ist gleich der Tangente des Nebenwinkels der Hypotenuse, multiplicirt mit dem Cosinus der eingeschlossenen Seite.
4. Die Tangente einer Kathete ist gleich der Tangente ihrer Gegenseite, multiplicirt mit dem Sinus der anderen Kathete.
5. Der Cosinus einer Seite*) ist gleich dem Cosinus der Gegenkathete, multiplicirt mit dem Sinus der anderen Seite.
6. Der Cosinus des Nebenwinkels der Hypotenuse ist ein Product aus den Cotangenten der beiden an ihr befindlichen Seiten.

Beweis. 1. Ist in Fig. 69 AB $=$ 90° eine Seite des Dreiecks ACB und C seine Hypotenuse, sind also A und B seine Katheten, so construire man das reciproke Dreieck DEF, welches nun an E rechtwinkelig ist. Ueberhaupt ist nun nicht nur $AB + E = 180°$, sondern auch $AC + F = 180°$,

---

*) Wenn von den Functionen eines Winkels in einem rechtwinkeligen Dreiecke die Rede ist, so wird man nie den rechten Winkel meinen, und wenn von den Functionen der Seiten eines rechtseitigen Dreiecks die Rede ist, so wird man nie die Seite meinen, welche ein Quadrant ist.

$BC + D = 180^\circ$, $DF + C = 180^\circ$, $FE + A = 180^\circ$ und $DE + B = 180^\circ$. Da nun $\cos DF = \cos DE . \cos FE$ und also $\cos DF = -\cos C = \cos (180^\circ - C)$, $\cos DE = -\cos B$, $\cos FE = -\cos A$ ist, so ist $\cos (180^\circ - C) = \cos A . \cos B$, wodurch die erste Behauptung bewiesen ist.

2. Da ferner $\sin FE = \sin DF . \sin D$ ist, so hat man $\sin A = \sin C . \sin BC$, und ebenso findet man noch $\sin B = \sin C . \sin AC$.
3. Da $\text{tng } DE = \text{tng } DF \cos D$ ist, so hat man $-\text{tng } B = -\text{tng } C . \cos BC$, oder auch $\text{tng } B = \text{tng } (180^\circ - C) . \cos BC$; auf ähnliche Art findet man noch die Formel $\text{tng } A = \text{tng } (180^\circ - C) . \cos AC$.
4. Weil $\text{tng } FE = \text{tng } D . \sin DE$ ist, so ist $-\text{tng } A = -\text{tng } BC . \sin B$, oder auch $\text{tng } A = \text{tng } BC . \sin B$; und ebenso findet man noch $\text{tng } B = \text{tng } AC . \sin A$.
5. Da $\cos F = \cos DE . \sin D$ ist, so ist $-\cos AC = -\cos B . \sin BC$ oder $\cos AC = \cos B \sin BC$; ebenso findet man noch $\cos BC = \cos A . \sin AC$.
6. Weil endlich $\cos DF = \cot A . \cot B$ ist, so ist auch $-\cos C = -\cot AC . -\cot BC$ oder $\cos (180^\circ - C) = \cot AC . \cot BC$.

§. 124.

Lehrsatz. In einem jeden sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus zweier Seiten zu einander, wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

Beweis. In Fig. 70 fälle man vom Scheitel C des beliebigen Dreiecks ACB auf die Grundlinie AB das Loth CD, dann ist nach §. 117 $\sin CD = \sin CA . \sin A$ und auch $\sin CD = \sin CB \sin B$, daher ist $\sin CA . \sin A = \sin CB . \sin B$, und wird diese Gleichung in eine Proportion umgesetzt, so ist sie $\frac{\sin CA}{\sin CB} = \frac{\sin B}{\sin A}$ oder auch $\frac{\sin AC}{\sin B} = \frac{\sin BC}{\sin A}$. Wenn das Loth CD außerhalb des Dreiecks fällt, so hat man nur zu beachten, daß Nebenwinkel gleiche Sinus haben; übrigens ist dann der Beweis, wie vorhin.

Anmerk. Das vorstehende Theorem kann auch also ausgedrückt werden: In einem Dreiecke ist das Verhältniß zwischen dem Sinus einer Seite und dem Sinus ihres Gegenwinkels für alle drei Seiten dasselbe.

Zusatz 1. Fällt man in einem Dreiecke vom Scheitel eines Winkels auf die Gegenseite ein Perpendikel, so ist das Product aus dem Sinus dieser Seite und dem Sinus des Perpendikels

gleich dem Producte aus den Sinus der beiden anderen Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Beweis. Da in Fig. 70 nach §. 123 sin AB. sin B = sin CA. sin C und sin CD = sin CB. sin B nach §. 116 ist, so erhält man durch Multiplikation sin AB. sin CD. sin B = sin CA. sin CB sin C sin B, oder einfacher:

$$\sin AB . \sin CD = \sin CA . \sin CB . \sin C.$$

Zusatz 2. Fällt man in einem Dreiecke vom Scheitel eines Winkels auf die Gegenseite ein Perpendikel, so ist das Product aus dem Sinus dieses Winkels und dem Sinus des Perpendikels gleich dem Producte aus den Sinus der beiden anderen Winkel und dem Sinus der Seite zwischen ihnen.

Beweis. Da in Fig. 70 sin AB. sin B = sin CA. sin C und sin CD = sin CA. sin A ist, so erhält man durch Multiplikation sin AB, sin A. sin B. sin CA = sin C. sin CD. sin CA oder einfacher:

$$\sin C . \sin CD = \sin A . \sin B . \sin AB.$$

§. 125.

Lehrsatz. Der Cosinus einer Seite eines beliebigen Dreiecks ist gleich dem Producte aus den Sinus der beiden anderen Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels, vermehrt um das Product der Cosinus eben dieser Seiten.

Beweis. In Fig. 71 verlängere man die drei Kugel-Radien MA, MB, MC der Ecken des sphärischen Dreiecks ABC, durch einen Punkt P von MA lege man die beiden Ebenen PSR und PQR senkrecht auf MC und MB, wovon die Ebenen MAC und MAB in PS und PQ und die Ebene BMC in SR und QR geschnitten werden mögen; dann stehen die beiden Ebenen, und also auch ihre Durchschnitts-Linie PR auf der Ebene CMB senkrecht. Ferner ist der Winkel PSR das Maaß des Winkels ACB oder C und PQR das Maaß des Winkels ABC oder B. Man ziehe auch noch ST parallel zu RQ und RU senkrecht auf ST, dann ist der Winkel USR, weil seine Schenkel auf den Schenkeln des Winkels CMB senkrecht stehen, diesem Winkel gleich, dessen Maaß der Bogen CB ist. Ferner ist MQ = MT + QT oder MQ = MT + RU. Im rechtwinkeligen Dreiecke PMS ist nun PS = MP. sin AC, im Dreiecke PSR ist SR = PS cos C, also auch SR = MP. sin AC. cos C und da RU = SR sin RSU = SR. sin BC ist, so ist

$$RU = MP . \sin AC . \sin BC . \cos C.$$

Ferner ist MS = MP cos AC und MT = MS cos BC, also ist MT = MP. cos AC. cos BC, und mithin MQ = MP

(sin AC . sin BC. cos C + cos AC . cos BC) und da auch MQ = MP cos AB ist, so ist offenbar

$$\cos AB = \sin AC . \sin BC . \cos AC . \cos BC.$$

Auf ähnliche Art findet man noch in Hinsicht auf die beiden anderen Seiten die Formeln:

$$\cos AC = \sin AB . \sin CB \cos B + \cos AB . \cos CB \text{ und}$$
$$\cos CB = \sin CA . \sin BA \cos A + \cos CA . \cos BA.$$

Anmerkung. Die Allgemeinheit dieser Formeln wird leicht gezeigt, indem man zu dem Dreiecke ACB die drei Nebendreiecke construirt, und die Richtigkeit der Formeln in der Anwendung auf diese Nebendreiecke zeigt. Ist der Winkel C ein rechter, so ist cos C = o und also cos AB = cos AC . cos BC, wie im §. 116.

§. 126.

Lehrsatz. Der Cosinus eines Winkels in einem beliebigen Dreiecke ist gleich dem Producte aus den Sinus der beiden anderen Winkel und dem Cosinus der von ihnen eingeschlossenen Seite, vermindert um das Product der Cosinus eben dieser beiden Winkel.

Beweis. In Fig. 12 sei zum Dreiecke ABC das reciproke Dreieck A'B'C' construirt, dann ist nach §. 125 cos A'B' = sin A'C' sin B'C' cos C' + cos A'C'. cos B'C', und da nun cos A'B' = — cos C, sin A'C' = sin B, sin B'C' = sin A, cos A'C' = — cos B, cos B'C' = — cos A und cos C' = — cos AB ist, so hat man — cos C = sin A . sin B. (— cos AB) + (— cos A). (— cos B), oder auch

$$\cos C = \sin A . \sin B . \cos AB - \cos A . \cos B.$$

Ebenso findet man noch die beiden folgenden Formeln:

$$\cos B = \sin A . \sin C . \cos AC - \cos A . \cos C \text{ und}$$
$$\cos A = \sin B . \sin C . \cos BC - \cos B . \cos C.$$

§. 127.

Lehrsatz. Der Sinus einer Seite multiplicirt mit dem Cosinus eines Winkels an ihr ist gleich dem Producte aus dem Cosinus der Gegenseite dieses Winkels und dem Sinus der dritten Seite, vermindert um das Product aus dem Sinus jener Gegenseite, aus dem Cosinus der dritten Seite und dem Cosinus des Winkels, den diese beiden Seiten einschließen.

Beweis. Wenn in Fig. 71 dieselbe Construction, wie im §. 125, gemacht ist, so ist ST = SU + UT oder ST = SU + QR.

Nun ist aber PQ = MP sin AB, QR = PQ cos PQR = PQ cos B, also auch

$$QR = MP \sin AB . \cos B.$$

Da SR = MP sin AC. cos C und SU = SR cos RSU = SR cos BC ist, so ist SU = MP sin AC. cos BC . cos C, und also

$$ST = MP (\sin AB . \cos B + \sin AC . \cos BC . \cos C).$$

Da aber auch $ST = MP \cos AC . \sin CB$ ist, so hat man offenbar

$$\cos AC . \sin CB = \sin AB . \cos B + \sin AC . \cos BC . \cos C,$$

oder $\sin AB . \cos B = \cos AC . \sin CB - \sin AC . \cos BC . \cos C.$

Zusatz. Bezeichnet man in Fig. 72 die Winkel des Dreiecks mit A, B, C und ihren Gegenseiten mit a, b, c, so hat man also dem Lehrsatze gemäß die folgenden sechs Formeln:

$$\sin b . \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B,$$
$$\sin b . \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B,$$
$$\sin a . \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos c \cos A,$$
$$\sin a . \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A,$$
$$\sin c . \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C,$$
$$\sin c . \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C.$$

§. 128.

Lehrsatz. Der Sinus eines Winkels multiplicirt mit dem Cosinus einer Seite an ihm ist gleich dem Producte aus dem Cosinus des Gegenwikels dieser Seite und den Sinus des dritten Winkels, vermehrt um ein Product aus dem Sinus jenes Gegenwinkels, aus dem Cosinus des dritten Winkels und dem Cosinus der Seite, welche zwischen diesen beiden Winkeln liegt.

Beweis. Wendet man die Formel $\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$ auf das reciproke Dreieck an, so hat man $\sin B$ für $\sin b$, $-\cos a$ für $\cos A$, $-\cos A$ für $\cos a$, $\sin C$ für $\sin c$, $\sin A$ für $\sin a$, $-\cos C$ für $\cos c$ und $-\cos b$ für $\cos B$ zu setzen, und hierdurch erhält man

$$\sin B \cos a = \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b,$$ und ebenso noch
$$\sin B \cos c = \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b,$$
$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a,$$
$$\sin A \cos c = \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a,$$
$$\sin C \cos a = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c,$$
$$\sin C \cos b = \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c,$$

Anmerkung. Die Formeln im §. 127 und §. 128 enthalten, eine jede, fünf Stücke des Dreiecks, und können daher, wenn aus drei Stücken ein viertes berechnet werden soll, nicht gebraucht werden.

§. 129.

Lehrsatz. Um aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die Tangente eines anderen Winkels zu finden, dividire man das Product aus dem Sinus der Gegenseite des gesuchten Winkels und dem Sinus des gegebenen Winkels durch den Rest, welcher bleibt, wenn man vom Producte aus dem Cosinus der Gegenseite und dem Sinus der anderen Seite subtrahirt das Product aus dem Sinus der Gegenseite, dem Cosinus der anderen Seite und dem Cosinus des gegeben Winkels.

Da in Fig. 71 $\text{tng}\, B = \frac{PR}{QR}$, ferner $QR = ST - SU = MP\,(\cos AC \sin CB - \sin AC \cos CB \cos C)$ und $PR = MP.\sin AC.\sin C$ ist, so hat man auf der Stelle die gesuchte Formel

$$\text{tng}\, B = \frac{\sin AC\,.\,\sin C}{\cos AC \sin CB - \sin AC \cos CB \cos C}.$$

In Anwendung der Bezeichnung in Fig. 66 hat man also dem Lehrsatze gemäß die folgenden Formeln:

$$\text{tng}\, B = \frac{\sin b \sin C}{\cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C}$$

$$= \frac{\text{tng}\, b\,.\sin C}{\cos a\,(\text{tng}\, a - \text{tng}\, b \cos C)},$$

$$\text{tng}\, A = \frac{\sin a \sin C}{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}$$

$$= \frac{\text{tng}\, a\,.\sin C.}{\cos b\,(\text{tng}\, b - \text{tng}\, a \cos C},$$

$$\text{tng}\, A = \frac{\sin a \sin B}{\cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B}$$

$$= \frac{\text{tng}\, a\,.\,\text{tin}\, B}{\cos c\,(\text{tng}\, c - \text{tng}\, a \cos B},$$

$$\text{tng}\, C = \frac{\sin c \sin B}{\cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B}$$

$$= \frac{\text{tng}\, c\,.\sin B}{\cos a\,(\text{tng}\, a - \text{tng}\, c \cos B)},$$

$$\text{tng}\, C = \frac{\sin c \sin A}{\cos c, \sin b - \sin c \cos b \cos A}$$

$$= \frac{\text{tng}\, c\,.\sin A}{\cos b\,(\text{tng}\, b - \text{tng}\, c \cos A},$$

$$\text{tng}\, B = \frac{\sin b \sin A}{\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A}$$

$$= \frac{\text{tng}\, b\,.\sin A}{\cos c\,(\text{tng}\, c - \text{tng}\, b \cos A)}.$$

§. 130.

Lehrsatz. Aus zwei Winkeln und der eingeschlossenen Seite findet man die Tangente einer anderen Seite, wenn man das Product aus dem Sinus ihres Gegenwinkels und dem Sinus der gegebenen Seite dividirt durch die Summe, welche man erhält, wenn man zum Producte aus dem Cosinus des Gegenwinkels und dem Sinus des anderen Winkels addirt das Product aus dem Sinus des Gegenwinkels, dem Cosinus des anderen Winkels und dem

Cosinus der Seite, welche von den beiden Winkeln eingeschlossen wird.

Die Herleitung ist am bequemsten bei der Anwendung des reciproken Dreiecks und die Formeln selbst sind:

$$\text{tng}\ b = \frac{\sin B . \sin c.}{\cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c}$$

$$= \frac{\text{tng}\ B . \sin c}{\cos A\ (\text{tng}\ A + \text{tng}\ B \cos c)},$$

$$\text{tng}\ a = \frac{\sin A . \sin c}{\cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c}$$

$$= \frac{\text{tng}\ A . \sin c}{\cos B\ (\text{tng}\ B + \text{tng}\ A.\ \text{eos}\ c)},$$

$$\text{tng}\ a = \frac{\sin A . \sin b}{\cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b}$$

$$= \frac{\text{tng}\ A . \sin b}{\cos C\ (\text{tng}\ C + \text{tng}\ A \cos b)},$$

$$\text{tng}\ c = \frac{\sin C . \sin b}{\cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b}$$

$$= \frac{\text{ing}\ C . \sin b}{\cos A\ (\text{tng}\ A + \text{tng}\ C \cos b)},$$

$$\text{tng}\ c = \frac{\sin C . \sin a}{\cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a}$$

$$= \frac{\text{tng}\ C . \sin a}{\cos B\ (\text{tng}\ B + \text{tng}\ C \cos a)},$$

$$\text{tng}\ b = \frac{\sin B . \sin a}{\cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a}$$

$$= \frac{\text{tng}\ B . \sin a}{\cos C\ (\text{tng}\ C + \text{tng}\ B \cos a)}.$$

Anmerkung 1. Die Formeln im §. 129 und §. 130 werden gewöhnlich in ein wenig veränderter Gestalt aufgestellt, wodurch aber das Geschäft des Gedächtnißes erschwert wird. Man hat daher auch allerlei mnemonische Regeln gegeben; die einfachste Regel aber ist die der Aehnlichkeit mit den Formeln der ebenen Trigonometrie, welche man eben deswegen so viel als möglich hervortreten lassen, nicht aber stören soll.

Wenn man z. B. in der Formel $\text{tng}\, B = \frac{\text{tng}\ b . \sin C}{\cos a\, (\text{tng}\, a - \text{tng}\, b \cos C}$ die Vorsilben tng wegläßt, und für cos a an die Stelle setzt Eins, so erhält man die Formel $\text{tng}\ B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C}$ der ebenen Trigonometrie, welche mit der vorigen für das sphärische Dreieck

große Aehnlichkeit hat. Die Formeln im §. 130 aber kann man daran behalten, daß sie mit den Formeln im §. 129 dieselben sind, wenn man nur die kleinen Buchstaben in große und umgekehrt, und statt des Vorzeichens — im zweiten Theile des Nenners das Vorzeichen + nimmt.

Anmerkung 2. Da in Fig. 71 PR = MP. sin AC. sin C und PR = MP sin AB sin B ist, so folgt hieraus die Gleichung sin AC. sin C = sin AB. sin B oder $\frac{\sin AC}{\sin AB} = \frac{\sin B}{\sin C}$, wie im §. 124.

Anmerkung 3. Die im §. 125—130 gefundenen Formeln haben eine für das Rechnen mit Logarithmen unbequeme Form; daher hat man andere Gleichungen gesucht, welche die Form von Proportionen haben, oder doch einen ebenso bequemen Gebrauch der Logarithmen, als die Proportionen, zulassen, und zu ihrer geometrischen Herleitung gehen wir jetzt über.

§. 131.

Lehrsatz. Bestimmt man in einem Dreiecke den Punkt, welcher von den drei Ecken des Dreiecks gleichen Abstand hat, so ist die Tangente dieses Abstandes gleich dem Sinus der Hälfte einer Seite, dividirt durch das Product aus den Cosinus der halben beiden anderen Seiten und aus dem Sinus des Winkels, den sie einschließen.

Beweis. Es sei in Fig. 60 ABC′ das Dreieck, dessen Winkel mit A, B, C und dessen Seiten in derselben Ordnung, in welcher sie den Winkeln gegenüber liegen, mit a, b, c bezeichnet sein mögen; X sei der Punkt, welcher von den Ecken des Dreiecks gleichen Abstand hat, ABC sei das Nebendreieck an der Seite AB = c; überhaupt sei die Construction, wie im §. 106, und der Abstand XA sei mit r bezeichnet. Nach §. 124 Zus. 1 ist im Dreiecke mCn

$$\sin mn. \sin CR = \sin mC. \sin nC \sin C;$$

da nun aber mn = dem Winkel X, CR = AP = 90° — r, $mC + \frac{AC'}{2} = 90°$, $nC + \frac{BC'}{2} = 90°$, und C = C′ ist, so hat man offenbar

$$\cos r. \sin X = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}\sin C,$$

und da im rechtwinkeligen Dreiecke ADX auch sin r. sin X = sin AD = sin $\frac{c}{2}$ ist, so erhält man, wenn diese Gleichung durch jene dividirt wird,

$$\text{tng}\, r = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\,.\,\cos\frac{b}{2}\,.\,\sin C};$$ ganz ebenso findet man noch

$$\text{tng}\, r = \frac{\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{a}{2}\,.\,\cos\frac{c}{2}\,.\,\sin B}$$ und

$$\text{tng}\, r = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}\,.\,\cos\frac{c}{2}\,.\,\sin A}.$$

Weiter unten werden noch andere Formeln für die mit r bezeichnete Entfernung hergeleitet werden.

§. 132.

Lehrsatz. Der negative Cosinus der halben Summe der drei Winkel eines Dreiecks verhält sich zum Sinus eines dieser Winkel, wie das Product aus den Sinus der Hälften der diesen Winkel einschließenden Seiten sich zum Cosinus der halben dritten Seite verhält.

Beweis. In Fig. 60 sei ABC das vorgelegte Dreieck, und die Construction, wie im §. 106, dann ist nach §. 131 tng XA . $\cos\frac{AC'}{2}\cos\frac{BC'}{2}\sin C = \sin\frac{AB}{2}$; wird nun aber CA = b, BC = a, AB = c gesetzt, so hat man offenbar

$$\text{tng XA}\,.\,\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\,.\,\sin C = \sin\frac{c}{2};$$

nun ist aber nach §. 117 tng XA . cos XAD $= \text{tng}\frac{AB}{2}$ und da XAD + DAm' = 90° ist, tnp XA . sin oAm' $= \text{tng}\frac{c}{2}$, also hat man durch die Verbindung dieser Gleichung mit der vorigen

$$\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\sin\, oAm'}{\sin C}$$

und da oAm' $= \frac{A + B + C}{2} - 90^0$ ist, so ist offenbar, wie behauptet wurde,

$$\frac{-\cos\frac{1}{2}\,A+B+C}{\sin C}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Auf ähnliche Art erhält man noch die beiden Formeln:

$$\frac{-\cos\frac{1}{2}\,(A+B+C)}{\sin B}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{b}{2}}$$ und

$$\frac{-\cos\frac{1}{2}\,(A+B+C)}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Zusatz 1. Der Sinus des halben Inhaltes eines Dreiecks ist gleich dem Producte aus den Sinus der Hälften zweier Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, dividirt durch den Cosinus der halben dritten Seite.

Beweis. Nennt man nämlich der Kürze wegen das Maaß der Größe eines Dreiecks, welches mit $\triangle$ bezeichnet sein mag, den Inhalt, so ist nach §. 107 $\frac{\triangle}{2}=\frac{A+B+C-\pi}{2}$ $= oAm' = o'm'$ und also

$$\sin\frac{\triangle}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Zusatz 2. Der Sinus des halben Inhalts eines Dreiecks ist gleich dem Producte aus der Tangente der halben Grundlinie und der Tangente der halben Höhe des Dreiecks.

Beweis. Da in Fig 60 $\text{tng}\ AX \cos XAD = \text{tng}\ AD$ ist und $PA = CR$ die halbe Entfernung der beiden mit mn concentrischen Gegenkreise ist, wovon der eine durch C und der andere durch A und B geht, welche Entfernung man die Höhe des Dreiecks nennen, und etwa mit h bezeichnen wird, so ist $AX + \frac{h}{2} = 90^0$ und also $\text{tng}\ AX = \cot\frac{h}{2}$; da aber $\cos XAD = \sin\frac{\triangle}{2}$ ist, so hat man $\cot\frac{h}{2}\,.\,\sin\frac{\triangle}{2} = \text{tng}\,\frac{c}{2}$ oder auch

$$\sin\frac{\triangle}{2}=\text{tng}\,\frac{c}{2}\,.\,\text{tng}\,\frac{h}{2}.$$

Anmerkung 1. Läßt man die Vorsilben sin, tng, tng weg, so hat man $\frac{\Delta}{2} = \frac{c \, . \, h}{4}$ oder $\Delta = \frac{c \, . \, h}{2}$, welches die bekannte Formel der Planimetrie ist.

Wenn man in der Formel des Zusatzes 1 die Vorsilben sin, sin, sin vor $\frac{\Delta}{2}$ und den Seiten wegläßt, und $\cos \frac{c}{2} = 1$ setzt, so erhält man $\Delta = \frac{ab}{2} \sin C$, welches ebenfalls ein bekannter Ausdruck für den Inhalt eines ebenen Dreiecks ist.

Anmerkung 2. Eine kürzere Herleitung ist die folgende: Es ist $\sin mn \, . \, \sin CR = \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin C$ und ebenso $\sin m'n' . \sin C''R' = \sin m'C'' \, . \, \sin n'C'' \, . \, \sin C''$, und da $mn = m'n'$, $CR = C''R'$, $m'C'' = 90^0$, $n'C'' = 90^0 - \frac{c}{2}$ und $C'' = \frac{A + B + C - 180^0}{2}$ ist, so hat man auf der Stelle

$$\sin \frac{A + B + C - 180^0}{2} \, . \cos \frac{c}{2} = \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin C \, .$$

§. 133.

Lehrsatz. Der Cosinus der um die Hälfte eines Winkels verminderten halben Summe der beiden übrigen Winkel verhält sich zum Sinus jenes Winkels, wie sich das Product aus den Cosinus der Hälften der ihn einschließenden Seiten zum Cosinus der halben dritten Seite verhält.

Beweis. Wenn wieder in Fig. 10 die Seiten des Dreiecks ABC gleichlautend mit ihren Gegenwinkeln durch a, b, c bezeichnet werden, so ist nach §. 133

$$\frac{-\cos \frac{1}{2} (BAC' + ABC' + AC'B)}{\sin C'} = \frac{\sin \frac{AC'}{2} \sin \frac{BC'}{2}}{\cos \frac{AB}{2}};$$

Da aber $\frac{BAC' + ABC' + AC'B}{2} = \frac{180^0 - A + 180^0 - B + C}{2} = 180^0 - \frac{A + B - C}{2}$, ferner $\sin \frac{AC'}{2} = \cos \frac{AC}{2} = \cos \frac{b}{2}$, $\sin \frac{BC'}{2} = \cos \frac{BC}{2} = \cos \frac{a}{2}$ ist, so hat man auf der Stelle

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\,A+B-C}{\sin\,C}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$, und ebenso findet man noch

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\,(A+C-B)}{\sin\,B}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{b}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\,(B+C-A)}{\sin\,A}=\frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}.$$

Zusatz. Der Sinus vom halben Inhalte eines Dreiecks ist ein Product aus dem Cosinus der Hälfte des Restes, den man erhält, wenn man von der Summe zweier Winkel eines Dreiecks den dritten Winkel subtrahirt, und den Tangenten der Hälften der beiden Seiten, welche den dritten Winkel einschließen.

Beweis. Aus den Proportionen $\frac{\sin\frac{\Delta}{2}}{\sin C}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$

und $\frac{\cos\frac{A+B-C}{2}}{\sin\,C}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$ folgt, wenn jene durch diese dividirt wird, sogleich

$$\sin\frac{\Delta}{2}=\operatorname{tng}\frac{a}{2}\operatorname{tng}\frac{b}{2}\cos\frac{A+B-C}{2}.$$

§. 134.

Lehrsatz. Der Cosinus des halben Ueberschusses der Summe zweier Winkel eines Dreiecks über den dritten Winkel verhält sich zum Sinus eines der beiden ersten Winkel, wie das Product aus dem Sinus der halben Gegenseite des dritten Winkels und dem Cosinus der halben Gegenseite des anderen von den beiden ersten Winkeln sich verhält zum Sinus der halben dritten Seite.

Beweis. Nach §. 132 ist in Fig. 10 $\frac{-\cos\frac{A'CB+A'BC+CAB}{2}}{\sin\,A'CB}$

$= \dfrac{\sin\frac{CB}{2}\,\sin\frac{CA'}{2}}{\cos\frac{BA'}{2}}$ bei der Anwendung dieses Satzes auf das Nebendreieck CA'B; da nun aber $\frac{A'CB + A'BC + CA'B}{2}$ $= \frac{180^0 - C + 180^0 - B + A}{2} = 180^0 - \frac{C + B - A}{2}$, ferner $\sin\frac{CA'}{2} = \cos\frac{CA}{2} = \cos\frac{b}{2}$, und $\cos\frac{BA'}{2} = \sin\frac{AB}{2}$ $= \sin\frac{c}{2}$, so hat man offenbar

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\,C + B - A}{\sin C} = \frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.$$

Auf ähnliche Art erhält man noch die folgenden fünf Gleichungen, sämmtlich dem aufgestellten Lehrsatze gemäß:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(C + B - A)}{\sin B} = \frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{b}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A + C - B)}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{a}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A + C - B)}{\sin C} = \frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A + B - C)}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{b}{2}},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A + B - C)}{\sin A} = \frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Anmerkung. Die im §. 132, 133 und 134 bewiesenen Lehrsätze sind, streng genommen, nur verschiedene Formen der Anwendung eines und desselben allgemeineren Satzes, und der Inbegriff der aufgestellten zwölf Proportionen ist in dieser Beziehung erschöpfend. Man kann mittelst der Reciprocität noch neue zwölf Proportionen auf der Stelle herleiten, die aber ihrer Wichtigkeit wegen nicht auf diese, wenn auch einfachere Weise, sondern ebenfalls auf eine ursprüngliche Weise durch Construction weiter unten hergeleitet werden sollen.

§. 135.

Lehrsatz. Das Quadrat vom Sinus der Hälfte einer Seite ist gleich dem Producte aus dem negativen Cosinus der halben Summe seiner drei Winkel und dem Cosinus des halben Ueberschusses der Summe der beiden die Seite einschließenden Winkel über den dritten Winkel, dividirt durch das Product der Sinus jener beiden, die gesuchte Seite einschließenden Winkel.

Beweis. Da nach §. 132 $\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\sin B}$

$$= \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{b}{2}},$$ und nach §. 134 ist

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin C} = \frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin\frac{c}{2}},$$

so erhält man durch die Multiplikation dieser beiden Proportionen die gesuchte Gleichung:

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\,.\,\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\,.\,\sin C}},$$

und auf ähnliche Art findet man noch die beiden folgenden Ausdrücke:

$$\sin\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\,.\,\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin A\,.\,\sin C}}$$ und

$$\sin\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\,.\,\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin A\,.\,\sin B}}.$$

§. 136.

Lehrsatz. Das Quadrat des Cosinus der Hälfte einer Seite ist gleich dem Produckte aus den Cosinus der halben Reste, welche bleiben, wenn von den beiden die gesuchte Seite einschließenden

Winkeln einmal der eine und dann der andere von der Summe der beiden übrigen Winkel subtrahirt wird, dividirt durch das Product der Sinus dieser beiden die gesuchte einschließenden Winkel.

Beweis. Da nach §. 133 $\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C} = \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$

und auch $\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin B} = \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{b}{2}}$

ist, so erhält man durch die Multiplication dieser beiden Proportionen die Formel

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+C-B).\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin B\,.\,\sin C}},$$ ebenso ist

$$\cos\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C).\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin C\,.\,\sin A}},$$

$$\cos\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+C-B).\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\,.\,\sin A}}.$$

Zusatz 1. Werden die Formeln des §. 136 durch die des §. 136 dividirt, so erhält man drei neue Formeln für die Tangenten der halben Seiten eines Dreiecks, wenn seine Winkel gegeben sind, nämlich:

$$\text{tng}\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C).\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B).\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}},$$

$$\text{tng}\,\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C).\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A).\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}},$$

$$\text{tng}\,\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C).\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A).\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}};$$

sollen aus den drei Winkeln des Dreiecks alle Seiten desselben berechnet werden, so führt der Gebrauch dieser Formeln am frühesten zum Ziele.

Zusatz 2. Ist in Fig. 73 BC ein Hauptbogen, D seine Mitte und M der Mittelpunkt der Kugel, von welchem aus die Kugelradien MB, MD, MC gezogen sind, so steht MD senkrecht auf der Sehne BC, und halbirt sie im Durchschnittspunkte E; wird nun der Bogen BC mit a bezeichnet, so ist im Allgemeinen für ein Dreieck BMC, wenn von M ein Loth auf BC gefällt wird, $MC\,.\,MB\,.\sin BMC = BC\,.\,ME$ und also im vorliegenden Falle $\sin a = 2.\frac{EC\,.\,ME}{MC\,.\,MC}$

$= 2. \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$ und macht man hiervon Gebrauch, so erhält man aus den Formeln des §. 135 und §. 136 noch die drei folgenden:

$$\sin a = \frac{2.\ W}{\sin B\ .\ \sin C}\ \sin b = \frac{2.\ W}{\sin A\ .\ \sin C}\ \text{und}\ \sin c = \frac{2.\ W}{\sin A\ .\ \sin B},$$

wenn man zur Abkürzung setzt $W = \sqrt{\left(-\cos \frac{A+B+C}{2} \cos \frac{B+C-A}{2} \cos \frac{A+C-B}{2} \cos \frac{A+B-C}{2}\right)}$.

Zusatz 3. Wenn Fig. 70 im Dreiecke ACB das Loth CD auf die Seite $AB = c$ gefällt wird, so ist nach §. 125 $\sin C . \sin CD = \sin A . \sin B . \sin c$, und da nach dem vorigen Zusatze $\sin A \sin B \sin c = 2W$ ist, so hat man auch:

$$\sin CD\ .\ \sin C = 2. W$$

$$\text{oder}\ \sin CD = \frac{2. W}{\sin C}.$$

Zusatz 4. Wenn man die im Zusatze 2 gefundenen Resultate mit einander vergleicht, so kommt man auf den Satz im §. 124 zurück.

§. 137.

Lehrsatz. Bestimmt man in einem Dreiecke einen Punkt, welcher von den drei Seiten desselben gleichen Abstand hat, so ist die Cotangente dieses Abstandes gleich dem Cosinus der Hälfte eines Winkels, dividirt durch das Product aus den Sinus der Hälften der beiden anderen Winkel und dem Sinus der Gegenseite des ersten Winkels.

Beweis. In Fig. 39 habe der Punkt D gleichen Abstand $Dx = Dy = Dz = \varrho$ von den drei Seiten des Dreiecks ABC′, auch seien noch DA, DB und C′D gezogen, so werden dadurch BAC′, ABC′ und AC′B halbirt, auch ist nach §. 77 der Winkel ADB gleich dem Winkel CDy, und da nach §. 124

$$\sin DX\ .\ \sin ADB = \sin DAB\ .\ \sin DBA\ .\ \sin AB$$

ist, so hat man $\sin \varrho\ .\ \sin C'Dy = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin\ c$, und weil im rechtwinkeligen Dreiecke C′Dy nach §. 120 ist $\cos DC'y = \cos Dy \sin CDy$ oder auch $\cos \frac{C}{2} = \cos \varrho \sin CDy$, so erhält man, wenn diese Gleichung durch die vorige dividirt wird,

$$\cot \varrho = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin c}$$, ebenso findet man noch

$$\cot \varrho = \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \sin b}$$, und ferner

$$\cot \varrho = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sin a}.$$

Anmerkung. Weiter unten werden noch andere Formeln zur Bestimmung von ϱ hergeleitet werden.

§. 138.

Lehrsatz. Der Sinus der halben Summe der drei Seiten eines Dreiecks verhält sich zum Sinus einer Seite, wie das Product aus den Cosinus der Hälften der beiden jene Seite einschließenden Winkel zum Sinus ihres halben Gegenwinkels.

Beweis. Sind in Fig. 39 die Seiten CB, CA, AB des Dreiecks ABC mit a, b, c bezeichnet, und bestimmt man im Nebendreiecke ABC′ den Punkt D, welcher von seinen Seiten gleichen Abstand hat, so hat man, wenn Dy ein solches Perpendikel vorstellt, wodurch der Abstand gemessen wird, nach §. 137

$$\cot Dy = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin c}$$

oder auch $\dfrac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \dfrac{\operatorname{tng} Dy}{\sin c}$ und da im Dreiecke DyC die Kathete $Cy = \dfrac{a+b+c}{2}$, ferner $\operatorname{tng} Dy = \operatorname{tng} DCy \,.\, \sin Cy$ $= \operatorname{tng} \dfrac{C}{2} \,.\, \sin \dfrac{a+b+c}{2}$ ist, so hat man, wenn die vorige Gleichung mit dieser multiplicirt wird, auf der Stelle

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin c} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}, \text{ und ebenso}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin b} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin a} = \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Anmerkung. Eine kürzere Herleitung ist die folgende: Zieht man yz, wovon DC′ in P geschnitten wird; so ist Py senkrecht auf PDC, und im Dreiecke ADB ist sin ADB . sin Dx = sin DAB . sin DBA sin AB, oder da ADB = $\frac{yDz}{2}$ = CDy = 180° — PDy und Dz = Dy ist, sin Dy . sin PD$_y$ = sin Py = cos $\frac{A}{2}$ cos $\frac{B}{2}$ sin c und da sin Py = sin Cy . sin PCy = sin $\frac{a+b+c}{2}$ sin $\frac{C}{2}$ ist, so hat man auf der Stelle

$$\sin\frac{a+b+c}{2} . \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2} . \cos\frac{B}{2} . \sin c.$$

§. 139.

Lehrsatz. Der Sinus des halben Ueberschusses der Summe zweier Seiten eines Dreiecks über die dritte Seite desselben verhält sich zum Sinus eben dieser Seite, wie das Product der Sinus der Hälften der diese Seite einschließenden Winkel zum Sinus des halben Gegenwinkels der Seite.

Beweis. Ist in Fig. 10 ABC′ das Nebendreieck von ABC, so hat man nach §. 138

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(AC' + BC' + AB)}{\sin AB} = \frac{\cos\frac{BAC'}{2}\cos\frac{ABC'}{2}}{\sin\frac{C'}{2}},$$

und da AC′ = 180° — b, BC′ = 180° — a, AB = c, $\frac{BAC}{2}$

$= 90^0 - \frac{A}{2}$, $ABC' = 90^0 - \frac{B}{2}$, $C' = C$ ist, so ist offenbar auch

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c} = \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$$, und ebenso findet man noch

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b} = \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2}},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin a} = \frac{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

§. 140.

Lehrsatz. Der Sinus des halben Ueberschusses der Summe zweier Seiten eines Dreiecks über die dritte Seite verhält sich zum Sinus einer von den beiden ersten Seiten, wie das Product aus dem Cosinus des halben Gegenwinkels der dritten Seite und dem Sinus des halben Gegenwinkels der anderen von den beiden ersten Seiten zum Cosinus des halben dritten Winkels.

Beweis. Da Fig. 10 nach §. 138 im Nebendreiecke CBA'

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(BC + BA' + CA')}{\sin BA'} = \frac{\cos \frac{CBA'}{2} \cos \frac{CA'B}{2}}{\sin \frac{BCA'}{2}}.$$

und ferner $\frac{BC + BA' + CA'}{2} = \frac{a + 180^0 - c + 180^0 - b}{2}$

$= 180^0 - \frac{b+c-a}{2}$, $\cos \frac{CBA'}{2} = \sin \frac{B}{2}$, $\cos \frac{CA'B}{2} = \cos \frac{A}{2}$,

$\sin \frac{BCA'}{2} = \cos \frac{C}{2}$, $\sin BA' = \sin c$ ist, so hat man offenbar

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin c} = \frac{\cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Ganz ebenso erhält man noch fünf andere Proportionen, sämmtlich dem aufgestellten Lehrsatze gemäß, nämlich:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b} = \frac{\cos\frac{A}{2}\,.\,\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin c} = \frac{\cos\frac{B}{2}\,.\,\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a} = \frac{\cos\frac{B}{2}\,.\,\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b} = \frac{\cos\frac{C}{2}\,.\,\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a} = \frac{\cos\frac{C}{2}\,.\,\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Die vorstehenden Formeln machen mit den Formeln im §. 138 und §. 139 ein einziges System von zwölf Formeln aus, wodurch im Grunde nur ein und derselbe Satz verschieden ausgedrückt wird, und mittelst der reciproken Dreiecke hätte man dieses System aus einem früheren Systeme der zwölf Formeln im §. 132, §. 133 und §. 134 auf eine noch kürzere Weise herleiten können.

§. 141.

Lehrsatz. Das Quadrat des Cosinus der Hälfte eines Winkels in einem Dreiecke ist gleich dem Producte aus dem Sinus der halben Summe der drei Seiten und dem Sinus des halben Ueberschusses der Summe der beiden den Winkel einschließenden Seiten über die dritte Seite, dividirt durch das Product der Sinus der beiden den Winkel einschließenden Seiten.

Beweis. Da nach §. 138 $\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin c} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$

und nach §. 140 auch

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b} = \frac{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \text{ ist,}$$

so erhält man durch die Multiplication dieser beiden Proportionen die Formel:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \cdot \sin c}},$$

und ebenso hat man noch

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a \cdot \sin c}},$$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \cdot \sin c}}.$$

§. 142.

Lehrsatz. Das Quadrat des Sinus der Hälfte eines Winkels in einem Dreiecke ist gleich dem Producte aus den beiden Sinus der halben Ueberschüsse der Summen je zweier Seiten über die dritte den Winkel einschließenden Seite, dividirt durch das Product der Sinus der beiden den Winkel einschließenden Seiten selbst.

Beweis. Da nach §. 139 $\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c} = \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$

und auch noch

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b} = \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{R}{2}} \text{ ist,}$$

so erhält man durch die Multiplication dieser beiden Proportionen die gesuchte Formel

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b) \cdot \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \cdot \sin c}},$$

und ferner noch ebenso

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(b+c-a \cdot \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a \cdot \sin c}},$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(b+c-a) \cdot \sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a \cdot \sin b}}.$$

Zusatz 1. Werden die vorstehenden Formeln durch die des

§. 141 dividirt, so erhält man drei Ausdrücke für die Tangenten der halben Winkel eines Dreiecks, nämlich

$$\operatorname{tng}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\,.\,\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\,.\,\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}},$$

$$\operatorname{tng}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\,.\,\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\,.\,\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}},$$

$$\operatorname{tng}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\,.\,\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\,.\,\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}};$$

sollen aus den drei Seiten eines Dreiecks wirklich alle drei Winkel desselben berechnet werden, so führt der Gebrauch dieser Formeln auf die schnellste Weise zum Ziele.

Zusatz 2. Auf ähnliche Art, wie im Zusatz 2 zu §. 136 erhält man aus den Formeln des §. 114 und 142 noch die drei folgenden Ausdrücke:

$$\sin A = \frac{2w}{\sin b\,.\,\sin c},\ \sin B = \frac{2w}{\sin a\,.\,\sin c},$$

$$\sin C = \frac{2w}{\sin a\,.\,\sin b},$$

wenn man zur Abkürzung setzt: $w = \sqrt{\left(\sin\frac{a+b+c}{2}\,.\,\sin\frac{b+c-a}{2}\,.\,\sin\frac{a+c-b}{2}\,.\,\sin\frac{a+b-c}{2}\right)}$.

Zusatz 3. Da ferner in Fig. 70 nach §. 124 $\sin c\,.\,\sin CD = \sin a\,.\,\sin b\,.\,\sin C$, und nach dem vorigen Zusatze auch $\sin a\,.\,\sin b\,.\,\sin C = 2w$ ist, so hat man $\sin c\,.\,\sin CD = 2w$, und also

$$\sin CD = \frac{2w}{\sin c}.$$

Zusatz 4. Da nach dem vorigen Zusatze $2w = \sin c\,.\,\sin CD$ und nach §. 136 Zusatz 3 ist $2W = \sin C\,.\,\sin CD$, so erhält man die einfache Proportion:

$$\frac{W}{w} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin a}.$$

Zusatz 5. Aus den Formeln $\sin CD = \frac{2w}{\sin c} = \frac{2W}{\sin C}$ folgt auch noch, daß, wenn man von den Ecken eines Dreiecks Perpendikel auf die Gegenseiten fällt, die Sinus dieser Perpendikel sich zu einander verhalten umgekehrt wie die Sinus der Seiten, auf welche, und umgekehrt wie die Sinus der Winkel, aus deren Scheiteln sie gefällt sind.

§. 143.

Lehrsatz. Das Verhältniß zwischen dem Cosinus des halben

Ueberschusses der Summe zweier Winkel eines Dreiecks über den dritten und der Tangente der halben Gegenseite dieses Winkels, und ferner das Verhältniß zwischen dem Sinus des halben Ueberschusses der Summe zweier Seiten über die dritte Seite und der Cotangente des halben Gegenwinkels dieser Seite ist constant.

Beweis. Da $\frac{\cos\frac{B+C-A}{2}}{\sin C} = \frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$ und auch

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin C} = \frac{\sin\frac{b}{2}\,.\,\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$$ nach §. 134 ist,

so erhält man, wenn die erste Proportion durch die zweite dividirt wird, $\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)} = \frac{\text{tng}\frac{a}{2}}{\text{tng}\frac{b}{2}}$, und es ist also offenbar

$$1.\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{tng}\frac{a}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{tng}\frac{b}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\text{tng}\frac{c}{2}}.$$

Ferner ist $\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin c} = \frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$ nach §. 140

und auch $\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin c} = \frac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$;

aus diesen beiden Proportionen erhält man durch Division die folgende $\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)} = \frac{\cot\frac{A}{2}}{\cot\frac{B}{2}}$, und es ist also offenbar:

$$2.\quad \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\cot \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b)}{\cot \frac{B}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\cot \frac{C}{2}}.$$

Beide Proportionen lassen sich auch unmittelbar der geometrischen Construction entnehmen, und bilden einen Gegensatz zu dem Theoreme, daß die Sinus der Seiten eines Dreiecks sich zu einander verhalten, wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

Zusatz. Da $\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin c} = \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$ und

$\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c} = \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$ ist, so hat man auch

noch $\sin \frac{1}{2}(a+b+c) = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \sin \frac{1}{2}(a+b-c)$;

diese Formel ist die reciproke von der im Zusatze zu §. 133.

§. 144.

Lehrsatz. Der Cosinus der halben Summe zweier Winkel eines Dreiecks verhält sich zum Cosinus der halben Summe ihrer Gegenseiten, wie der Sinus des halben dritten Winkels sich zum Cosinus seiner halben Gegenseite verhält.

Beweis. In Fig. 33 seien die Winkel des Dreiecks ABC wieder mit A, B, C und ihre Gegenseiten mit a, b, c bezeichnet; ferner sei M der Punkt, welcher, wenn die ganze Construction ist, wie im §. 58, von den Ecken des Dreiecks ABC′ gleichen Abstand hat; dann ist der Winkel

$$MAB = \frac{BAC' + ABC' - AC'B}{2} = \frac{A+B}{2} \text{ nach §. 58,}$$

und da nach §. 133 ist $\frac{\cos \frac{1}{2}(BAC' + ABC' - AC'B)}{\sin AC'B}$

$$= \frac{\cos \frac{AC'}{2} \cos \frac{BC'}{2}}{\cos \frac{AB}{2}}, \text{ so hat man auch}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\,.\,\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a+b}{2}\cos DC'\,.\,\sin C';$$

da aber in dem rechtwinkeligen Dreiecke CDC' ist $\cos DCC' = \cos DC' \,.\, \sin C'$, und ferner $\cos DCC' = \cos\frac{BCC'}{2} = \sin\frac{ACB}{2} = \sin\frac{C}{2}$ ist, so hat man, dem aufgestellten Satze gemäß

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}=\sin\frac{C}{2}\,.\,\cos\frac{a+b}{2},$$ oder auch

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

§. 145.

Lehrsatz. Der Cosinus des halben Unterschiedes zweier Winkel eines Dreiecks verhält sich zum Sinus der halben Summe ihrer Gegenseiten, wie der Sinus des halben dritten Winkels zum Sinus seiner halben Gegenseite.

Beweis. Da in Fig. 33 nach §. 58 ist $MAC' = \frac{BAC'+BC'A-ABC'}{2} = \frac{A-B}{2}$, und nach §. 134 ist

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(BAC'+BC'A-ABC')}{\sin C'}=\frac{\sin\frac{AC'}{2}\cos\frac{BC'}{2}}{\sin\frac{AB}{2}},$$ so hat man $\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a+b}{2}\cos DC'\,.\,\sin C'$ und da, wie im §. 144, $\cos DC'\,.\,\sin C'=\sin\frac{C}{2}$ ist, so findet sich

$$\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}$$ oder auch

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

§. 146.

Lehrsatz. Der Sinus der halben Summe zweier Winkel verhält sich zum Cosinus des halben Unterschiedes ihrer Gegenwinkel, wie der Cosinus des halben dritten Winkels zum Cosinus seiner halben Gegenseite.

Beweis. Wenn in Fig. 34 wieder ABC das Dreieck und die ganze Construction, wie im §. 59 ist, so ist der Winkel MBA

$$= \frac{BAC' + ABC' - AC'B}{2} = \frac{A+B}{2} - 90^0,$$ und nach §. 133

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (BAC' + ABC' - AC'B)}{\sin AC'B} = \frac{\cos \frac{BC'}{2} \cos \frac{AC'}{2}}{\cos \frac{AB}{2}},$$

und also $\sin \frac{1}{2} (A + B) . \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{1}{2} (a - b) . \cos DC' .$ $\sin DC'C$; da aber im Dreiecke $DC'C$ ist $\cos \frac{C}{2} = \cos DC' .$ $\sin DC'C$, so hat man auf der Stelle $\sin \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{c}{2}$ $= \cos \frac{1}{2} (a - b) . \cos \frac{C}{2}$, oder auch $\frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{c}{2}}$.

§. 147.

Lehrsatz. Der Sinus des halben Unterschiedes zweier Winkel verhält sich zum Sinus des halben Unterschiedes ihrer Gegenseiten, wie der Cosinus des halben dritten Winkels zum Sinus seiner halben Gegenseite.

Beweis. Da in Fig. 34 der Winkel $MBC = \frac{ABC' + AC'B - BAC'}{2}$ $= 90^0 - \frac{A - B}{2}$ nach §. 59, und nach §. 134 auch

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (AC'B + ABC' - BAC')}{\sin AC'B} = \frac{\sin \frac{BC'}{2} \cos \frac{AC'}{2}}{\sin \frac{AB}{2}}$$ ist, so hat

man $\sin \frac{1}{2} (A - B) . \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{1}{2} (a - b) . \sin DC'C . \cos DC'$, und da, wie früher, $\cos \frac{C}{2} = \sin DC'C . \cos DC'$ ist, so hat man die Gleichung $\sin \frac{1}{2} (A - B) . \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{1}{2} (a - b) .$ $\frac{C}{2}$ oder die Proportion

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} (a - b)} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{c}{2}}.$$

Zusatz. Die im §. 144, 145, 146 und 147 bewiesene Proportionen, nämlich:

$$\frac{\cos \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c},$$
$$\frac{\sin \frac{1}{2} (A + B)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)} = \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} c},$$
$$\frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} c},$$
$$\frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} (a - b)} = \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} c}$$

werden mit Nutzen zur Auflösung eines Dreiecks gebraucht, wenn entweder zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, oder zwei Winkel und die von ihnen eingeschlossene Seite gegeben sind, und sind unter dem Namen: »Gauß'sche Formeln« bekannt, obgleich man ihre Erfindung auch Anderen zuschreibt.

Dieselben vier Formeln können auch noch geometrisch auf eine andere Art hergeleitet werden, wenn man auf die im §. 65 und 66 behandelten Constructionen das System der zwölf Formeln im §. 138, 139 und 140 anwendet.

Zum bequemeren Gebrauche der vier Proportionen schafft man die Nenner in ihnen fort, und mit dieser geringen Abänderung mögen sie hier noch einmal zusammengestellt sein:

1) $\cos \frac{1}{2} (A + B) \,.\, \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2} (a + b) \,.\, \sin \frac{1}{2} C,$
2) $\cos \frac{1}{2} (A - B) \,.\, \sin \frac{1}{2} c = \sin \frac{1}{2} (a + b) \,.\, \sin \frac{1}{2} C,$
3) $\sin \frac{1}{2} (A + B) \,.\, \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2} (a - b) \,.\, \cos \frac{1}{2} C,$
4) $\sin \frac{1}{2} (A - B) \,.\, \sin \frac{1}{2} c = \sin \frac{1}{2} (a - b) \,.\, \cos \frac{1}{2} C.$

§. 148.

Lehrsatz. In einem sphärischen Dreiecke verhält sich die Tangente der halben Summe zweier Seiten zur Tangente der halben dritten Seite, wie der Cosinus des halben Unterschiedes der Gegenwinkel der beiden ersten Seiten sich verhält zum Cosinus der halben Summe dieser Winkel; ferner verhält sich die Tangente des halben Unterschiedes zweier Seiten zur Tangente der halben dritten Seite, wie der Sinus des halben Unterschiedes der Gegen-

winkel jener beiden Seiten sich verhält zum Sinus der halben Summe eben dieser Winkel.

Beweis. Dividirt man im vorigen Zusatze die zweite Gleichung durch die erste und die vierte Gleichung durch die dritte, so hat man auf der Stelle die beiden gesuchten Gleichungen:

$$\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ (a + b) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}\ (A - B)}{\cos \tfrac{1}{2}\ (A + B)}\ .\ \text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ c,$$

$$\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ (a - b) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}\ (A - B)}{\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ (A + B)}\ .\ \text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ c.$$

Zusatz. Dividirt man die zweite Gleichung durch die erste, so erhält man noch

$$\frac{\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ (a-b)}{\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ (a+b)} = \frac{\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ (A-B)}{\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ (A+B)},$$

d. h. die Tangente des halben Unterschiedes zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks verhält sich zur Tangente ihrer halben Summe, wie die Tangente des halben Unterschiedes ihrer Gegenwinkel sich zur Tangente der halben Summe eben dieser Winkel verhält.

§. 149.

Lehrsatz. In einem sphärischen Dreiecke verhält sich die Tangente der halben Summe zweier Winkel zur Cotangente des halben dritten Winkels, wie der Cosinus des halben Unterschiedes der Gegenseiten der beiden ersten Winkel zum Cosinus der halben Summe eben dieser Seiten; ferner verhält sich die Tangente des halben Unterschiedes zweier Winkel zur Cotangente des halben dritten Winkels, wie der Sinus des halben Unterschiedes der Gegenseiten jener beiden Winkel sich verhält zum Sinus der halben Summe eben dieser Seiten.

Beweis. Dividirt man im Zusatze zu §. 147 die dritte Gleichung durch die erste und die vierte Gleichung durch die zweite, so hat man auf der Stelle:

$$\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ (A + B) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}\ (a - b)}{\cos \tfrac{1}{2}\ (a + b)}\ .\ \cot \tfrac{1}{2}\ C,$$

$$\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ (A - B) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}\ (a - b)}{\sin \tfrac{1}{2}\ (a + b)}\ .\ \cot \tfrac{1}{2}\ C.$$

§. 150.

Der Vollständigkeit wegen mögen hier noch vier Formeln einen Platz finden, die ebenfalls unmittelbare Folgen aus den Gleichungen im Zusatze zu §. 147 sind; erhebt man nämlich diese Gleichungen zum Quadrate und addirt man dann die zweite und vierte, ferner die erste und dritte, so erhält man

$$\sin \tfrac{1}{2} c^2 = \left(\sin \tfrac{1}{2} (a-b) \cos \frac{C}{2}\right)^2 + \left(\sin \tfrac{1}{2} (a+b) \sin \tfrac{1}{2} C\right)^2$$

$$\cos \tfrac{1}{2} c^2 = \left(\cos \tfrac{1}{2} (a-b) \cos \frac{C}{2}\right)^2 + \left(\cos \tfrac{1}{2} (a+b) \sin \tfrac{1}{2} C\right)^2$$

Addirt man aber die erste und zweite, ferner die dritte und vierte, so erhält man

$$\sin \tfrac{1}{2} C^2 = \left(\cos \tfrac{1}{2} (A+B) \cos \tfrac{1}{2} c\right)^2 + \left(\cos \tfrac{1}{2} (A-B) . \sin \tfrac{1}{2} c\right)^2,$$

$$\cos \tfrac{1}{2} C^2 = \left(\sin \tfrac{1}{2} (A+B) \cos \tfrac{1}{2} c\right)^2 + \left(\sin \tfrac{1}{2} (A-B) \sin \tfrac{1}{2} c\right)^2.$$

Für die Auflösung des Dreiecks in bestimmten Zahlen sind aber diese vier Formeln offenbar nicht sehr bequem; sie drücken in veränderter Form die Sätze des §. 125 und §. 126 aus.

§. 151.

Lehrsatz. Der Sinus der halben Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist gleich dem Producte aus den Cosinus der Hälften zweier Seiten, vermehrt um das Product aus den Sinus dieser Hälften und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels, wenn die Summe dieser beiden Producte durch den Cosinus der halben dritten Seite dividirt wird.

Beweis. Wenn in Fig. 60 wieder dieselbe Construction, wie im §. 106, gemacht ist, so ist nach §. 125

$$\cos mn = \cos mC \cos nC + \sin mC \sin nN \cos C \text{ oder}$$

$$\cos mn = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos C,$$

und da mn das Maaß des Winkels X ist, so hat man auch

$$\cos X = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos C;$$

weil ferner im rechtwinkeligen Dreiecke ADX ist $\cos X =$ $\cos AD . \sin XAD$ oder auch $\cos X = AD . \cos oAm' = \cos \frac{c}{2}$.
$\cos \frac{A + B + C - 180}{2}$, so hat man

$$\cos \frac{A+B+C-180^\circ}{2} = \frac{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos C}{\cos \frac{c}{2}}$$

oder auch

$$\sin\frac{A+B+C}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C}{\cos\frac{c}{2}}$$

Zusatz 1. Wendet man das bewiese Theorem in Fig. 10 auf die vier Nebendreiecke an, so erhält man die folgenden zwölf Formeln:

1) $$\sin\frac{A+B+C}{2}=\frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos A}{\cos\frac{a}{2}},$$

2) $$\sin\frac{A+B+C}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}\cos B}{\cos\frac{b}{2}},$$

3) $$\sin\frac{A+B+C}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C}{\cos\frac{c}{2}},$$

4) $$\sin\frac{C+B-A}{2}=\frac{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}+\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos A}{\cos\frac{a}{2}},$$

5) $$\sin\frac{A+B-C}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}\cos B}{\cos\frac{b}{2}},$$

6) $$\sin\frac{A+B-C}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos C}{\cos\frac{c}{2}},$$

7) $$\sin\frac{A+B-C}{2}=\frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos A}{\sin\frac{a}{2}},$$

$$8)\ \sin\frac{A+C-B}{2} = \frac{\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} - \sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos A}{\sin\frac{a}{2}},$$

$$9)\ \sin\frac{A+B-C}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2} - \cos\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}\cos B}{\sin\frac{b}{2}},$$

$$10)\ \sin\frac{B+C-A}{2} = \frac{\cos\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} - \sin\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}\cos B}{\sin\frac{b}{2}},$$

$$11)\ \sin\frac{A+C-B}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} - \cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C}{\sin\frac{c}{2}}$$

$$12)\ \sin\frac{B+C-A}{2} = \frac{\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} - \sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos C}{\sin\frac{c}{2}}$$

Zusatz 2. Da $A + B + C - 180^\circ$ den Inhalt Δ des Dreiecks ABC bezeichnet, so hat man also auch

$$1)\ \cos\frac{\Delta}{2} = \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Da ferner nach §. 132 Zusatz 1 ist $\sin\frac{\Delta}{2}$

$= \dfrac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\,\text{tin}\ C}{\cos\frac{c}{2}}$, so erhält man noch, wenn diese Formel durch jene dividirt wird,

$$\text{tng}\,\frac{\Delta}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C}$$ oder auch

2) $\operatorname{tng} \frac{\Delta}{2} = \frac{\sin C}{\cot \frac{a}{2} \cot \frac{b}{2} + \cos C}$.

Zusatz 3. Wenn der Winkel $C = 90^\circ$ ist, also a und b die Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks sind, so hat man

$$\sin \frac{\Delta}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

$$\cos \frac{\Delta}{2} = \frac{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}}{\cos \frac{c}{2}},$$

$$\operatorname{tng} \frac{\Delta}{2} = \operatorname{tng} \frac{a}{2} . \operatorname{tng} \frac{b}{2}.$$

Zusatz 4. Wenn man überhaupt die Formeln im §. 133, 134 und 135 durch die Formeln im Zusatze 1 dividirt, und jedesmal diejenige combinirt, welche auf der rechten Seite gleiche Nenner haben, so erhält man neue zwölf Formeln für die Tangente der halben Winkelsumme und für die Tangente des halben Ueberschusses der Summe zweier Winkel über den dritten.

Solche Formeln sind

$$-\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} (A + B + C) = \frac{\cot \frac{a}{2} \cot \frac{b}{2} + \cos C}{\sin C},$$

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} (A + B - C) = \frac{\operatorname{tng} \frac{a}{2} \operatorname{tng} \frac{b}{2} + \cos C}{\sin C},$$

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} (C + B - A) = \frac{\cot \frac{1}{2} a \operatorname{tng} \frac{1}{2} b - \cos C}{\sin C},$$

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} (C + A - B) = \frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b - \cos C}{\sin C},$$

und auch sie können unmittelbar der geometrischen Construction entnommen werden.

Da nämlich Fig. 30 im Dreiecke nBn' ist tng n'
$= \frac{\operatorname{tng} Bn . \sin nBn'}{\cos Bn' (\operatorname{tng} Bn' - \operatorname{tng} Bn \cos nBn')}$ nach §. 129,

so hat man $\operatorname{tng} n' = \dfrac{\operatorname{tng}\frac{a}{2}\sin B}{\sin\frac{c}{2}\left(\cot\frac{c}{2} + \operatorname{tng}\frac{a}{2}\cos B\right)}$

oder auch

$$\operatorname{tng} n' = \frac{\sin B}{\sin\frac{c}{2}\left(\cot\frac{a}{2}\cot\frac{c}{2} + \cos B\right)};$$

und da im Dreiecke o′m′n′ ist $\operatorname{tng} om' = \operatorname{tng} n' \,.\, \sin on'$ oder $\operatorname{tng}\dfrac{A + B + C - 180^0}{2} = \operatorname{tng} n' \sin\dfrac{c}{2}$, so hat man auf der Stelle

$$\operatorname{tng}\frac{A + B + C - 180^0}{2} = \frac{\sin B}{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{c}{2} + \cos B};$$

diese Formel stimmt mit den vorigen im Wesen überein.

Zusatz 5. Der Formel $\operatorname{tng}\dfrac{\Delta}{2} = \dfrac{\sin C}{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2} + \cos C}$ gemäß behält Δ dieselbe Größe, wenn der Winkel C und das Product $\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}$ unveränderlich ist. Haben also zwei Dreiecke einen Winkel gemein, so sind sie gleich groß, wenn das Product der Cotangenten der Hälften der diesen Winkel einschließenden Seiten bei dem einen Dreiecke so groß ist, als bei dem anderen.

Dasselbe Gesetz kann auch auf folgende Art gefunden werden.

Es ist nach §. 103 das Dreieck ACB in Fig. 58 gleich dem Dreiecke A′CB′, wenn $nA = nA'$, $mB = mB'$, $qA' = qB'$ und $pA = pB$ ist. Im Dreiecke pnA ist aber $\dfrac{\sin n}{\sin p} = \dfrac{\sin pA}{\sin nA}$ und im Dreiecke pmB ist $\dfrac{\sin m}{\sin p} = \dfrac{\sin pB}{\sin Bm}$; wird die zweite Proportion durch die erste dividirt, so erhält man $\dfrac{\sin m}{\sin n} = \dfrac{\sin nA}{\sin mB}$; weil aber auch im Dreiecke Cmn ist $\dfrac{\sin m}{\sin n} = \dfrac{\sin Cn}{\sin Cm}$, so ist also auch $\dfrac{\sin Cn}{\sin Cm} = \dfrac{\sin An}{\sin Bm}$, oder weil $Cn = \dfrac{CA + CA'}{2}$, Cm

$= \frac{CB + CB'}{2}$, $\bar{An} = \frac{CA - CA'}{2}$ und $Bm = \frac{CB' - CB}{2}$ ist,

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(CA + CA')}{\sin \frac{1}{2}(CA - CA')} = \frac{\sin \frac{1}{2}(CB' + CB)}{\sin \frac{1}{2}(CB' - CB)}.$$

Man kann dieser Proportion sehr leicht die folgende Gestalt geben:

$$\frac{\operatorname{tng}\frac{CA}{2} + \operatorname{tng}\frac{CA}{2}}{\operatorname{tng}\frac{CA}{2} - \operatorname{tng}\frac{CA'}{2}} = \frac{\operatorname{tng}\frac{CB'}{2} + \operatorname{tng}\frac{CB}{2}}{\operatorname{tng}\frac{CB'}{2} - \operatorname{tng}\frac{CB}{2}}$$ oder auch

$$\frac{\operatorname{tng}\frac{CA}{2}}{\operatorname{tng}\frac{CA'}{2}} = \frac{\operatorname{tng}\frac{CB'}{2}}{\operatorname{tng}\frac{CB}{2}}$$ und es ist also $\operatorname{tng}\frac{CA}{2} \cdot \operatorname{tng}\frac{CB}{2}$

$= \operatorname{tng}\frac{CA'}{2} \cdot \operatorname{tng}\frac{CB'}{2}$ oder $\cot\frac{CA}{2} \cdot \cot\frac{CB}{2} =$

$\cot\frac{CA'}{2} \cdot \cot\frac{CB'}{2}$, wie vorhin.

§. 152.

Aufgabe. Man soll die Winkelsumme eines Dreiecks durch seine drei Seiten ausdrücken.

Da nach §. 132 $-\cos\frac{A+B+C}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cdot\sin C}{\cos\frac{c}{2}}$

und auch nach §. 142 Zusatz 2. $\sin C = \frac{2\,w}{\sin a \sin b}$ ist, so hat man

$$-\cos\frac{A+B+C}{2} = \frac{2.\ \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cdot w}{\sin a \sin b \cos\frac{c}{2}},$$ oder auch

$$1)\ -\cos\frac{A+B+C}{2} = \frac{w}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Da ferner nach §. 151 . $\cos X = \cos\frac{c}{2} \cdot \sin\frac{A+B+C}{2}$, und nach §. 75 der Winkel X gleich ist dem Winkel an C′ in

dem unter dem Dreiecke ABC′ liegenden Sehnen-Dreiecke, so ist, wenn wir die Sehne des Bogens BC′ mit α, die Sehne von AC′ mit β und die Sehne von AB mit γ bezeichnen, der Cosinus dieses Winkels $= \frac{\alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2}{2\,\alpha\beta}$, und also auch

$$\cos X = \frac{\alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2}{2\,\alpha\beta}.$$

Ist nun aber der Kugelradius die Einheit, so ist $\alpha = \sin\frac{BC'}{2} = 2\cos\frac{a}{2}$, $\beta = 2\sin\frac{AC'}{2} = 2\cos\frac{b}{2}$, $\gamma = 2\sin\frac{c}{2}$

und also $\cos X = \dfrac{\cos\frac{a^2}{2} + \cos\frac{b^2}{2} + \cos\frac{c^2}{2} - 1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}$, daher ist

$$2)\quad \sin\frac{A+B+C}{2} = \frac{\cos\frac{a^2}{2} + \cos\frac{b^2}{2} + \cos\frac{c^2}{2} - 1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Zusatz 1. Aus den vorstehenden Ausdrücken lassen sich mittelst der Nebendreiecke leicht die Sinus und Cosinus der Hälften von $A+B-C$, $A+C-B$, $C+B-A$ finden. Es ist z. B.

$$\sin\frac{A+B-C}{2} = \frac{\sin\frac{a^2}{2} + \sin\frac{b^2}{2} - \sin\frac{c^2}{2}}{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Zusatz 2. Für den Inhalt Δ eines Dreiecks hat man die Formeln

$$\sin\frac{\Delta}{2} = \frac{w}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\cos\frac{\Delta}{2} = \frac{\cos\frac{a^2}{2} + \cos\frac{b^2}{2} + \cos\frac{c^2}{2} - 1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\text{und } \cot\frac{\Delta}{2} = \frac{\cos\frac{a^2}{2} + \cos\frac{b^2}{2} + \cos\frac{c^2}{2} - 1}{w}.$$

§. 153.

Lehrsatz. Der Cosinus des halben Umfanges eines Dreiecks ist gleich dem Producte aus dem Cosinus der Hälften zweier Winkel desselben und dem Cosinus der eingeschlossenen Seite, vermindert um das Product der Sinus der Hälften jener Winkel, wenn der Rest durch den Sinus des halben dritten Winkels dividirt wird.

Beweis. Wenn in Fig. 39 D der Punkt ist, welcher von den Seiten des Nebendreiecks ABC′ gleichen Abstand hat, so ist im Dreiecke ADB nach §. 126

$$\cos ADB = \sin DAB \sin DBA \cos AB - \cos DAB \,.\, \cos DBA,$$ oder auch,

da der Winkel $ADB = CDy$, $DAB = 90^0 - \frac{CAB}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$, $DBA = 90^0 - \frac{ABC}{2} = 90^0 - \frac{B}{2}$ und $AB = c$ ist, $\cos CDy = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin c - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$, und da im Dreiecke CDy ist $\cos CDy = \cos Cy \,.\, \sin DCy = \cos \frac{a+b-c}{2} \,.\, \sin \frac{C}{2}$, so hat man

$$\cos \frac{a+b+c}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos c - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}.$$

Zusatz 1. Wendet man das gefundene Theorem auf die Nebendreiecke, so hat man noch

$$\cos \frac{a+b-c}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos c}{\sin \frac{C}{2}},$$

$$\cos \frac{b+c-a}{2} = \frac{\cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos c}{\cos \frac{C}{2}},$$

$$\cos \frac{a+c-b}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos c}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Zusatz 2. Werden die vorstehenden vier Formeln mit denen im §. 138, 139 und 140 durch Division verbunden, so erhält man

$$\operatorname{tng}\frac{a+b+c}{2} = \frac{\sin c}{\cos c - \operatorname{tng}\frac{A}{2}\operatorname{tng}\frac{B}{2}},$$

$$\operatorname{tng}\frac{a+b-c}{2} = \frac{\sin c}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} - \cos c},$$

$$\operatorname{tng}\frac{a+c-b}{2} = \frac{\sin c}{\operatorname{tng}\frac{B}{2}\cot\frac{A}{2} + \cos c},$$

$$\operatorname{tng}\frac{b+a-c}{2} = \frac{\sin c}{\operatorname{tng}\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} + \cos c};$$

auch diese vier Formeln lassen sich unmittelbar der Construction entnehmen.

§. 154.

Aufgabe. Man soll den Umfang eines Dreiecks durch seine drei Winkel ausdrücken.

Da nach §. 138 $\sin\frac{1}{2}(a+b+c) = \dfrac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\,.\,\sin c}{\sin\frac{C}{2}}$

und nach §. 136 auch $\sin c = \dfrac{2\,W}{\sin A\ \sin B}$ ist, so erhält man

$$1.\quad \sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{W}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Da ferner nach §. 152 $\sin\dfrac{A+B+C}{2}$

$$= \frac{\cos\frac{a^2}{2} + \cos\frac{b^2}{2} + \cos\frac{c^2}{2} - 1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$ ist, so findet man mittelst des reciproken Dreiecks auf der Stelle

$$2.\ \cos \tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1 - \sin \frac{A^2}{2} - \sin \frac{B^2}{2} - \sin \frac{C^2}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

und noch ferner mittelst der Nebendreiecke:

$$\cos \tfrac{1}{2}(a+b-c) = \frac{\sin \frac{C^2}{2} + \cos \frac{B^2}{2} + \cos \frac{A^2}{2} - 1}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}},$$

$$\text{coc} \tfrac{1}{2}(a+c-b) = \frac{\cos \frac{C^2}{2} + \sin \frac{B^2}{2} + \cos \frac{A^2}{2} - 1}{2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(b+c-a) = \frac{\cos \frac{C^2}{2} + \cos \frac{B^2}{2} + \sin \frac{A^2}{2} - 1}{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2}}.$$

Für die Cotangente des halben Umfanges erhält man also

$$\cot \tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1 - \sin \frac{A^2}{2} - \sin \frac{B^2}{2} - \sin \frac{C^2}{2}}{W}.$$

Zusatz. Bezeichnet man in Fig. 10 den Umfang des Dreiecks ABC mit U, des Dreiecks CBA' mit U', des Dreiecks ACB' mit U'' und des Dreiecks ABC' mit U''', den Inhalt von ABC mit $\triangle$, von CBA' mit $\triangle'$, von ACB' mit $\triangle''$, von ABC' mit $\triangle'''$, so ist

$$\cot \tfrac{1}{2} U = \frac{1 - \sin \frac{A^2}{2} - \sin \frac{B^2}{2} - \sin \frac{C^2}{2}}{W},$$

$$\cot \tfrac{1}{2} U' = \frac{1 - \sin \frac{A^2}{2} - \cos \frac{B^2}{2} - \cos \frac{C^2}{2}}{W},$$

$$\cot \tfrac{1}{2} U'' = \frac{1 - \cos \tfrac{1}{2} A^2 - \sin \frac{B^2}{2} - \cos \frac{C^2}{2}}{W},$$

$$\cot \tfrac{1}{2} U'' = \frac{1 - \cos \tfrac{1}{2} A^2 - \cos \frac{B^2}{2} - \sin \frac{C^2}{2}}{W},$$

denn der Divisor W bleibt bei dem Uebergange zu den Nebendreiecken unverändert.

Hieraus erhält man nun leicht

$$\cot\tfrac{1}{2}U + \cot\tfrac{1}{2}U' = \frac{-2\sin\frac{A^2}{2}}{W},$$

$$\cot\tfrac{1}{2}U + \cot\tfrac{1}{2}U'' = \frac{-2\sin\frac{B^2}{2}}{W},$$

$$\cot\tfrac{1}{2}U + \cot\tfrac{1}{2}U'' = \frac{-2\sin\frac{C^2}{2}}{W},$$

und also $3\cot\tfrac{1}{2}U + \cot\tfrac{1}{2}U' + \cot\tfrac{1}{2}U'' + \cot\tfrac{1}{2}U'''$

$$= \frac{-2\sin\frac{A^2}{2} - 2\sin\frac{B^2}{2} - 2\sin\frac{C^2}{2}}{W}$$ und da $2\cot\tfrac{1}{2}U$

$$= \frac{2 - 2\sin\frac{A^2}{2} - 2\sin\frac{B^2}{2} - 2\sin\frac{C^2}{2}}{W}$$ ist, so findet man

noch $\cot\tfrac{1}{2}U + \cot\tfrac{1}{2}U' + \cot\tfrac{1}{2}U'' + \cot\tfrac{1}{2}U''' = \frac{-2}{W}$; dieselbe Formel erhält man auch unmittelbar durch die Addition der oben stehenden.

Ferner ist nach §. 152

$$\cot\frac{\Delta}{2} = \frac{\cos\frac{a^2}{2} + \cos\frac{b^2}{2} + \cos\frac{c^2}{2} - 1}{w},$$

$$\cot\frac{\Delta'}{2} = \frac{\cos\frac{a^2}{2} + \sin\frac{b^2}{2} + \sin\frac{c^2}{2} - 1}{w},$$

$$\cot\frac{\Delta''}{2} = \frac{\sin\frac{a^2}{2} + \cos\frac{b^2}{2} + \sin\frac{c^2}{2} - 1}{w},$$

$$\cot\frac{\Delta'''}{2} = \frac{\sin\frac{a^2}{2} + \sin\frac{b^2}{2} + \cos\frac{c^2}{2} - 1}{w},$$

hieraus aber erhält man $\cot\frac{\Delta}{2} + \cot\frac{\Delta'}{2} = \frac{2\cos\frac{a^2}{2}}{w}$,

$$\cot\frac{\Delta}{2}+\cot\frac{\Delta'}{2}=\frac{2\cos\frac{b^2}{2}}{w},\ \cot\frac{\Delta}{2}+\cot\frac{\Delta'''}{2}$$

$$=\frac{2\cos\frac{c^2}{2}}{w}$$ und $$\cot\frac{\Delta}{2}\ \cot+\frac{\Delta'}{2}+\cot\frac{\Delta''}{2}+\cot\frac{\Delta'''}{2}$$

$$=\frac{2}{w}$$, endlich ist noch

$$\frac{-\cot\frac{1}{2}U-\cot\frac{1}{2}U'-\cot\frac{1}{2}U''-\cot\frac{1}{2}U'''}{\cot\frac{\Delta}{2}+\cot\frac{\Delta'}{2}+\cot\frac{\Delta''}{2}+\cot\frac{\Delta'''}{2}}=\frac{w}{W}.$$

§. 155.

Lehrsatz. Fällt man in einem (nicht rechtwinkeligen) Dreiecke von einer Ecke auf die Gegenseite ein Perpendikel, so wird diese Seite dadurch in zwei Abschnitte getheilt, und es ist das Product aus der Tangente des halben Unterschiedes dieser Abschnitte und der Tangente der halben getheilten Seite gleich dem Producte aus den Tangenten der halben Summe und des halben Unterschiedes der beiden anderen Seiten.

Beweis. Ist in Fig. 75 α und Fig. 75 β CD senkrecht auf AB, so mache man $DB' = DB$, und ziehe CB', so entsteht noch ein Dreieck ACB', was mit dem Dreiecke ACB in zwei Seiten übereinstimmt, weil nun $CB = CB'$ ist; außerdem noch ist $B + B' = 180°$.

Im Dreiecke ABC ist nun nach §. 148 $\operatorname{tng}\frac{1}{2}(CA + CB)$ $=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)}\operatorname{tng}\dfrac{AB}{2}$ und im Dreiecke AB'C ist auch nach §. 148 $\operatorname{tng}\frac{1}{2}(CA-CB')=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(B'-A)}{\sin\frac{1}{2}(B'+A)}\cdot\operatorname{tng}\dfrac{AB'}{2}$, oder also $\operatorname{tng}\frac{1}{2}(CA-CB)=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(B+A)}{\cos\frac{1}{2}(B-A)}\operatorname{tng}AB'$, und wird diese Proportion mit der vorigen multiplicirt, so hat man

$$\operatorname{tng}\frac{AB'}{2}\cdot\operatorname{tng}\frac{AB}{2}=\operatorname{tng}\tfrac{1}{2}(CA-CB)\cdot\operatorname{tng}\tfrac{1}{2}(CA+CB).$$

Hiernach kann man AB' aus den drei Seiten des Dreiecks ABC berechnen, und es ist dann in Fig. 75 α

$$\frac{DA-DB}{2}=\frac{AB'}{2}$$ und in Fig. 75 β ist

$$\frac{DA+DB}{2}=\frac{AB'}{2}.$$

Zusatz 1. Aus den drei Seiten des Dreiecks ABC lassen sich hiernach die Abschnitte DA und DB berechnen, und da in den rechtwinkeligen Dreiecken ADC und BDC außerdem die Hypotenusen CA und CB gegeben sind, so lassen sich diese Dreiecke nach den einfachen Formeln in den §§. 117—120 auflösen, wodurch die drei Winkel des Dreiecks ACB bekannt werden.

Zusatz 2. Ist der Winkel B und also auch B′ = 90°, so ist AB′ = AB, und also $\text{tng}\,\frac{CA-CD}{2}\,.\,\text{tng}\,\frac{CA+CD}{2} = \text{tng}\,\frac{AD^2}{2}$, $\text{tng}\,\frac{CA+CD}{2} = \text{tng}\,(45^\circ+\frac{A}{2})\,\text{tng}\,\frac{AD}{2}$, $\text{tng}\,\frac{CA-CD}{2} = \text{tng}\,(45^\circ-\frac{A}{2})\,\text{tng}\,\frac{AD}{2}$.

§. 156.

Lehrsatz. Fällt man in einem nicht (nicht rechtwinkeligen) Dreiecke vom Scheitel eines Winkels auf die Gegenseite ein Loth, so theilt dieses den genannten Winkel so, daß die Tangente des halben Unterschiedes der Theile des Winkels gleich ist dem Producte aus der Tangente der Hälfte dieses Winkels und den Tangenten der halben Summe und des halben Unterschiedes der beiden anderen Winkel des Dreiecks.

Denn da nach §. 149

$$\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}\,(CA-CB)}{\cos\frac{1}{2}\,(CA+CB)}\,.\,\cot\frac{ACB}{2} \text{ und auch}$$

$$\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(B'+A) = \frac{\cos\frac{1}{2}\,(CA-CB')}{\cos\frac{1}{2}\,(CA+CB')}\,\cot\frac{ACB'}{2} \text{ ist,}$$

so hat man offenbar $\cot\frac{ACB}{2}\,\text{tng}\,\frac{ACB'}{2} = \text{tng}\,\frac{1}{2}\,(B+A)\,.\,\cot\frac{1}{2}\,(B'+A)$ oder auch

$$\text{tng}\,\frac{ACB'}{2} = \text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(B+A)\,\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(B-A)\,.\,\text{tng}\,\frac{ACB}{2},$$

und es ist wieder in Fig. 75 α der Winkel $\frac{ACB'}{2} = \frac{DCA-DCB}{2}$ und in Fig. 75 β ist $ACB' = \frac{DCA+DCB}{2}$.

Zusatz. Da nun in den Dreiecken ACD und BCD zwei Winkel bekannt sind, so können sie nach den einfachen Formeln im §. 116—121 aufgelöset werden, wodurch man die Seiten des Dreiecks ACB erhält, wenn die drei Winkel desselben gegeben sind.

§. 157.

Lehrsatz. Fällt man von einer Ecke eines Dreiecks ein Loth auf die Gegenseite, so verhält sich die Tangente des halben Unterschiedes ihrer Abschnitte zur Tangente der halben Seite selbst, wie der Sinus des Unterschiedes der Winkel an ihr zum Sinus der Summe dieser Winkel.

Beweis. In Fig. 75 ist

$$\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\,(CA - CB) = \frac{\sin\ \frac{1}{2}\,(B - A)}{\sin\ \frac{1}{2}\,(B + A)}\ \text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ AB \text{ und auch}$$

$$\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\,(CA + CB) = \frac{\cos\ \frac{1}{2}\,(B - A)}{\cos\ \frac{1}{2}\,(B + A)}\ \text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ AB \text{ (nach §. 148),}$$

also ist $\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\,(CA - CB)\,.\,\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\,(CA + CB) = \frac{\sin\ (B - A)}{\sin\ (B + A)}\,.$ $\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ AB^2$, und da nach §. 155 auch

$$\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\,(CA - CB)\,.\,\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\,(CA + CB) = \text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ AB'\ .$$

$\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ AB$ ist, so hat man offenbar

$$\frac{\text{tng}\ \frac{1}{2}\ AB'}{\text{tng}\ \frac{1}{2}\ AB} = \frac{\sin\ (B - A)}{\sin\ (B + A)}.$$

Zusatz. Sind also die Seite AB und die beiden Winkel A und B an ihr gegeben, so findet man daraus die Abschnitte DA und DB, wie vorhin, und da nun in den beiden rechtwinkeligen Dreiecken ADC und BDC eine Kathete und ein Winkel an ihr in jedem bekannt sind, so können sie nach den einfachen Formeln im §. 117 — 120 aufgelöset werden, wodurch man die beiden anderen Seiten CA und CB, nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ACB findet.

Anmerkung. Dieses und das nachfolgende, auch wegen seiner Einfachheit merkwürdige, Theorem findet sich in den besten mir bekannten Lehrbüchern nicht. Die Auflösung hiernach ist gerade deswegen sehr brauchbar, weil man dadurch die Abschnitte DA und DB findet. Wenn man das Loth CD auf zwei verschiedene Weisen berechnet, so hat man eine Probe für die Rechnung.

§. 158.

Lehrsatz. Fällt man in einem Dreiecke vom Scheitel eines Winkels ein Perpendikel auf die Gegenseite, so ist das Product aus der Tangente der Hälfte dieses Winkels und der Tangente des halben Unterschiedes seiner beiden Theile gleich dem Sinus des Unterschiedes der beiden den Winkel einschließenden Seiten, dividirt durch den Sinus der Summe dieser Seiten.

Beweis. In Fig. 75 ist nach §. 149

$$\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(B-A) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\,(CA-CB)}{\sin\tfrac{1}{2}\,(CA+CB)}\,\cot\tfrac{1}{2}\,ACB$$

und auch

$$\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(B+A) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}\,(CA-CB)}{\cos\tfrac{1}{2}\,(CA+CB)}\,.\,\cot\tfrac{1}{2}\,ACB,$$

hieraus erhält man durch Multiplication

$$\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(B-A)\,.\,\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(B+A) = \frac{\sin(CA-CB)}{\sin(CA+CB)}\cot\tfrac{1}{2}\,ACB^2,$$

und da nach §. 156 auch

$$\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(B-A)\,.\,\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(B+A) = \text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,ACB'\,\cot\tfrac{1}{2}\,ACB$$

ist, so hat man

$$\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,ACB' = \frac{\sin\,(CA-CB)}{\sin\,(CA+CB)}\cot\tfrac{1}{2}\,ACB.$$

Zusatz. Sind also zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel (CA, CB und ACB) gegeben, so kann man hiernach die Theile DCA und DCB des Winkels finden, und da nun in den rechtwinkeligen Dreiecken DCA und DCB die Hypotenuse und ein Winkel an ihr in einem jeden bekannt sind, so lassen sich die Dreiecke nach den einfachen Formeln in den §§. 117—120 auflösen, und man findet dadurch die dritte Seite AB und die Winkel A und B des Dreiecks ACB.

§. 159.

Lehrsatz. Fällt man in einem Dreiecke vom Scheitel eines Winkels auf die Gegenseite ein Loth, so verhält sich der Sinus des Unterschiedes der Theile des Winkels zum Sinus des Unterschiedes der Theile der Seite, wie der Sinus eines beliebigen Winkels im Dreiecke zum Sinus seiner Gegenseite.

Beweis. In Fig. 75 sei wieder CD senkrecht auf AB und DB' = DB, so ist im Dreiecke ACB' nach §. 123

$$\frac{\sin\,ACB'}{\sin\,AB'} = \frac{\sin\,B'}{\sin\,AC},$$

und ebenso ist im Dreiecke ACB noch $\frac{\sin\,ACB}{\sin\,AB} = \frac{\sin\,B}{\sin\,AC}$, weil nun aber sin B' = sin B ist, so hat man also

$$\frac{\sin\,ACB'}{\sin\,AB'} = \frac{\sin\,ACB}{\sin\,AB} = \frac{\sin\,ABC}{\sin\,AC} = \frac{\sin\,BAC}{\sin\,BC}.$$

Ein allgemeineres Gesetz wird weiter unten vorkommen.

§. 160.

Lehrsatz. Wenn in Fig. 74 a, b, c die Seiten eines Dreiecks ABC, A, B, C ihre Gegenwinkel sind, und man ein zweites Dreieck MNL so construirt, daß die eine Seite $m = \frac{1}{2}(180^\circ - a - b)$, die Seite $n = \frac{1}{2}(180^\circ + c)$, der Gegenwinkel von m, nämlich $M = \frac{1}{2}(180^\circ - A - B)$ ist, so ist der Gegenwinkel N von $n = \frac{1}{2} C$ oder $= 180^\circ - \frac{1}{2} C$.

Beweis. Im Dreiecke MNL ist nach §. 123

$$\frac{\sin N}{\sin M} = \frac{\sin n}{\sin m}$$

und da $\sin M = \cos \frac{1}{2}(A + B)$, $\sin n = \cos \frac{1}{2} c$, $\sin m = \cos \frac{1}{2}(a + b)$ ist, so hat man also

$\sin N . \cos \frac{1}{2}(a + b) = \cos \frac{1}{2}(A + B) . \cos \frac{1}{2} c$, da aber nach §. 149 Zusatz auch

$\sin \frac{1}{2} C . \cos \frac{1}{2}(a + b) = \cos \frac{1}{2}(A - B) . \cos \frac{1}{2} c$ ist, so folgt also, daß $\sin N = \sin \frac{1}{2} C$ und also entweder $N = \frac{1}{2} C$ (oder $N = 180^\circ - \frac{1}{2} C$) ist.

Da nun aber der Annahme gemäß $m < 90^\circ$ und auch $M < 90^\circ$, aber $n > 90^\circ$ ist, so findet in der Bestimmung des Winkels N nach §. 47 Zusatz 3 eine Zweideutigkeit Statt, und es können also aus den drei gegebenen Stücken zwei verschiedene Dreiecke MLN und MLN' construirt werden, die aber nach den Lehrsätzen in den §§. 157—159 so von einander abhängen, daß man aus dem einen Dreiecke MLN das andere MLN', und umgekehrt aus diesem jenes leicht auch durch Rechnung herleiten kann.

Zusatz. Hätte man statt der Stücke m, n, M ihre Supplemente genommen, nämlich $m = \frac{1}{2}(180^\circ + a + b)$, $n = \frac{1}{2}(180^\circ - c)$, $M = \frac{1}{2} 180^\circ + A + B$, oder auch nur statt des einen oder anderen Stückes sein Supplement, so hätte man noch andere Dreiecke erhalten, und in ihnen wäre der Winkel N immer entweder $= \frac{1}{2} C$ oder $= 180^\circ - \frac{1}{2} C$. Die Seite $MN = l$ und ihr Gegenwinkel L sollen später durch Formeln bestimmt werden.

§. 161.

Lehrsatz. Construirt man zu dem Dreiecke ABC in Fig. 74 ein zweites Dreieck MNL, worin zwei Seiten m und n sind, $\frac{1}{2}(a + b)$ und $\frac{1}{2} c$ und der Gegenwinkel M der ersten Seite ist $\frac{1}{2}(180^\circ + B - A)$, so ist der Gegenwinkel N der anderen Seite entweder $= \frac{1}{2} C$ oder $= 180^\circ - \frac{1}{2} C$.

Beweis. Da im Dreiecke LMN ist $\sin M . \sin n = \sin N . \sin m$, so hat man $\cos \frac{1}{2}(A - B) \sin \frac{1}{2} c = N . \sin \frac{1}{2}(a + b)$ und da nach §. 147 Zusatz ist $\cos \frac{1}{2}(A - B) \sin \frac{1}{2} c = \sin \frac{1}{2} C .$

$\sin \frac{1}{2} (a + b)$, so ist $\sin N = \sin \frac{1}{2} C$ und also $N = \frac{1}{2} C$ (oder $N = 180^\circ - \frac{1}{2} C) = \frac{1}{2} (360^\circ - C)$.

§. 162.

Lehrsatz. Construirt man zu dem Dreiecke ABC in Fig. 74 ein zweites Dreieck MNL, worin zwei Seiten m und n sind $\frac{1}{2} (180^\circ - a + b)$ und $\frac{1}{2} (180^\circ - c)$, und worin der Gegenwinkel M der ersten Seite ist $\frac{1}{2} (A + B)$, so ist der Gegenwinkel N der anderen Seite $\frac{1}{2} (180^\circ \pm C.)$

Beweis. Da im Dreiecke LMN ist $\sin M \sin n = \sin N \cdot \sin m$, so hat man $\sin \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} c = \sin N . \cos \frac{1}{2} (a - b)$, und da auch $\sin \frac{1}{2} (A + B) \cos \frac{1}{2} c = \cos \frac{1}{2} (a - b) \cos \frac{1}{2} c$ ist, so ist $\sin N = \cos \frac{1}{2} C$ und also $N \pm \frac{1}{2} C = 90^\circ$ oder auch $N = \frac{1}{2} (180^\circ \pm C)$.

§. 163.

Lehrsatz. Construirt man zu einem Dreiecke ABC in Fig. 74 ein zweites MNL, worin zwei Seiten m und n sind $\frac{1}{2} (a - b)$ und $\frac{1}{2} c$ und worin der Gegenwinkel M der ersten Seite ist $\frac{1}{2} (A - B)$, so ist der Gegenwinkel N der anderen Seite $\frac{1}{2} (180^\circ \pm C)$.

Beweis. Da im Dreiecke MNL ist $\sin M \sin n = \sin N . \sin m$, so hat man $\sin \frac{1}{2} (A - B) . \sin \frac{1}{2} c = \sin N . \sin \frac{1}{2} (a - b)$, und da auch $\sin \frac{1}{2} (A - B) \sin \frac{1}{2} c = \sin \frac{1}{2} (a - b) \cos \frac{1}{2} C$ ist, so hat man $\sin N = \cos \frac{1}{2} C$ oder $N = \frac{1}{2} (180^\circ \pm C)$.

§. 164.

Lehrsatz. Das Verhältniß zwischen der Tangente des Viertel-Inhalts und der Tangente des Viertel-Umfanges eines Dreiecks ist für alle vier Nebendreiecke gleich groß.

Beweis. In Fig. 10 construire man zum Dreiecke ACB ein Dreieck MNL, wie im §. 160, dann ist $m = \frac{1}{2} (180^\circ - a - b)$, $n = \frac{1}{2} (180^\circ + c)$, $M = \frac{1}{2} (180^\circ - A - B)$ und $N = \frac{1}{2} C$, und da nach §. 148 Zusatz

$$\frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} (n - m)}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} (n + m)} = \frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} (N - M)}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} (N + M)}$$

ist, so hat man $\dfrac{\operatorname{tng} \frac{1}{4} (360^\circ + c - a - b)}{\operatorname{tng} \frac{1}{4} (a + b + c)} = \dfrac{\operatorname{tng} \frac{1}{4} (A + B + C - 180^\circ)}{\operatorname{tng} \frac{1}{4} (180^\circ + C - A - B)}$.

Bezeichnet man aber die Inhalte und Perimeter der vier Nebendreiecke ABC, CBA', ACB' und ABC' so, wie im Zusatze zu §. 154, so ist

$$\Delta = A + B + C - 180^\circ, \quad U = a + b + c,$$
$$\Delta''' = 180^\circ + C - A - B, \quad U''' = 360^\circ + c - a - b,$$

und also $\frac{\text{tng} \frac{1}{4} U}{\text{tng} \frac{1}{4} U'''} = \frac{\text{tng} \frac{1}{4} \Delta}{\text{tng} \frac{1}{4} \Delta'''}$ oder

$\frac{\text{tng} \frac{1}{4} \Delta}{\text{tng} \frac{1}{4} U} = \frac{\text{tng} \frac{1}{4} \Delta'''}{\text{tng} \frac{1}{4} U'''}$; daher hat man überhaupt

$$\frac{\text{tng} \frac{1}{4} \Delta}{\text{tng} \frac{1}{4} U} = \frac{\text{tng} \frac{1}{4} \Delta'}{\text{tng} \frac{1}{4} U'} = \frac{\text{tng} \frac{1}{4} \Delta''}{\text{tng} \frac{1}{4} U''} = \frac{\text{tng} \frac{1}{4} \Delta'''}{\text{tng} \frac{1}{4} U'''}.$$

§. 165.

Lehrsatz. Das Product aus der Tangente des Viertel-Umfanges eines Dreiecks und der Tangente des Viertel-Umfanges eines Nebendreiecks ist gleich dem Producte aus den Cotangenten der Viertel-Inhalte der beiden anderen Nebendreiecke.

Beweis. Construirt man zum Dreiecke ABC in Fig. 10 ein Dreieck MNL, wie im §. 161, so ist $m = \frac{1}{2}(a+b)$, $n = \frac{1}{2} c$, $M = \frac{1}{2}(180^\circ + B - A)$ und $N = \frac{1}{2} C$ und da $\frac{\text{tng} \frac{1}{2}(m-n)}{\text{tng} \frac{1}{2}(m+n)} = \frac{\text{tng} \frac{1}{2}(M-N)}{\text{tng} \frac{1}{2}(M+N)}$ ist, so hat man $\frac{\text{tng} \frac{1}{4}(a+b-c)}{\text{tng} \frac{1}{4}(a+b+c)} = \frac{\text{tng} \frac{1}{4}(180^\circ + B - A - C)}{\text{tng} \frac{1}{4}(180^\circ + B + B - A)}$; da aber $\text{tng} \frac{1}{4}(a+b-c) = \cot \frac{1}{4}(360^\circ + c - a - b) = \cot \frac{1}{4} U'''$, $\text{tng} \frac{1}{4}(a+b+c) = \text{tng} \frac{1}{4} U$, $\text{tng} \frac{1}{4}(180^\circ + B - A - C) = \text{tng} \frac{1}{4} \Delta''$ und $\text{tng} \frac{1}{4}(180^\circ + B + C - A) = \cot \frac{1}{4}(180^\circ + A - B - C) = \cot \frac{1}{4} \Delta'$ ist, so hat man $\frac{\cot \frac{1}{4} U'''}{\text{tng} \frac{1}{4} U} = \frac{\text{tng} \frac{1}{4} \Delta''}{\cot \frac{1}{4} \Delta'}$ oder auch

$$\text{tng} \tfrac{1}{4} U \,.\, \text{tng} \tfrac{1}{4} U''' = \cot \tfrac{1}{4} \Delta' \,.\, \cot \tfrac{1}{4} \Delta''.$$

Ebenso findet man $\text{tng} \frac{1}{4} U \,.\, \text{tng} \frac{1}{4} U'' = \cot \frac{1}{4} \Delta' \,.\, \cot \frac{1}{4} \Delta'''$,

$$\text{tng} \tfrac{1}{4} U \,.\, \text{tng} \tfrac{1}{4} U' = \cot \tfrac{1}{4} \Delta'' \,.\, \cot \tfrac{1}{4} \Delta'''.$$

§. 166.

Lehrsatz. Das Product aus der Tangente des Viertel-Inhaltes eines Dreiecks und der Tangente des Viertel-Inhaltes eines seiner drei Nebendreiecke ist gleich dem Producte aus den Cotangenten der Viertel-Perimeter der beiden anderen Nebendreiecke.

Beweis. Construirt man zum Dreiecke ABC in Fig. 10 das Dreieck MNL nach §. 162, so ist $m = \frac{1}{2} 180^\circ - a + b$, $n = \frac{1}{2} 180^\circ - c$, $M = \frac{1}{2}(A + B)$ und $N = \frac{1}{2}(180^\circ - C)$, und da $\frac{\text{tng} \frac{1}{2}(m-n)}{\text{tng} \frac{1}{2}(m+n)} = \frac{\text{tng} \frac{1}{2}(M-N)}{\text{tng} \frac{1}{2}(M+N)}$

ist, so hat man $\frac{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}(360^0+b-a-c)}{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}(c+b-a)} = \frac{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}(A+B+B-180^0}{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}(180^0-C+A+B)}$, und da $\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}(c+b-a) = \cot\frac{1}{4}(360^0+a-b-c) = \cot\frac{1}{4}U'$; $\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}(b-a-c+360^0) = \mathrm{tng}\,\frac{1}{4}U''$; $\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}(A+B+C-180^0) = \mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta$; $\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}(180^0-C+A+B) = \cot\frac{1}{4}(180^0+C-A-B) = \cot\frac{1}{4}\Delta'''$ ist, so hat man

$$\frac{\cot\frac{1}{4}U'}{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}U''} = \frac{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta}{\cot\frac{1}{4}\Delta'''},$$

oder $\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta\,.\,\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta''' = \cot\frac{1}{4}U'\,.\,\cot\frac{1}{4}U''$; ebenso findet man

$$\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta\,.\,\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta'' = \cot\frac{1}{4}U'\,.\,\cot\frac{1}{4}U''', \text{ und}$$

$$\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta\,.\,\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta' = \cot\frac{1}{4}U''\,.\,\cot\frac{1}{4}U''',$$

wenn man nur das Dreieck MNL in Bezug auf eine andere Seite und ihren Gegenwinkel so construirt, wie es in Bezug auf die Seite AB=c und ihren Gegenwinkel C construirt war.

Anmerkung. Die Anwendung des vierten Satzes im §. 163 führt zu dem Satze, daß $\frac{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}U'}{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}U''} = \frac{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta'}{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta''}$ sei, was aber schon im §. 164 auf kürzere Weise geschlossen wurde.

Man hätte auch schon den Lehrsatz im §. 166 aus den beiden Lehrsätzen im §. 164 und §. 165 auf einfache Weise herleiten können.

§. 167.

Lehrsatz. Das Quadrat der Tangente des Viertel-Umfanges eines Hauptdreiecks ist gleich dem Producte der Cotangenten der Viertel-Inhalte seiner drei Nebendreiecke, dividirt durch die Cotangente des Viertel-Inhalts jenes Dreiecks selbst.

Beweis. Da $\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}U\,.\,\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}U' = \cot\frac{1}{4}\Delta''\,.\,\cot\frac{1}{4}\Delta'''$, und $\frac{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta'}{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}U'} = \frac{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta}{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}U}$ ist, so erhält man durch die Multiplikation der beiden Gleichungen

$$\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}U^2 = \frac{\cot\frac{1}{4}\Delta'\,.\,\cot\frac{1}{4}\Delta''\,.\,\cot\frac{1}{4}\Delta'''}{\cot\frac{1}{4}\Delta}$$

oder auch $\cot\frac{1}{4}U = \sqrt{\frac{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta'\,.\,\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta''\,.\,\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta'''}{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta}}$.

Zusatz 1. Man kann also aus den Inhalten von vier Nebendreiecken ihre Perimeter berechnen, und hat dazu überhaupt die vier folgenden Formeln

$$\cot\frac{1}{4}U = \sqrt{\frac{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta'\,.\,\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta''\,.\,\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta'''}{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta}},$$

$$\cot\frac{1}{4}U' = \sqrt{\frac{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta\,.\,\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta''\,.\,\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta'''}{\mathrm{tng}\,\frac{1}{4}\Delta'}},$$

$$\cot \tfrac{1}{4} U'' = \sqrt{\frac{\operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta \cdot \operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta' \cdot \operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta'''}{\operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta''}},$$

$$\cot \tfrac{1}{4} U''' = \sqrt{\frac{\operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta \cdot \operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta' \cdot \operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta''}{\operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta'''}}.$$

Zusatz 2. Wenn die Winkel eines Dreiecks gegeben sind, so kann man daraus ihre Inhalte nach den Formeln $\Delta = A + B + C - 180^0$, $\Delta' = 180^0 + A - B - C$, $\Delta'' = 180^0 + B - A - C$, $\Delta''' = 180^0 + C - A - B$ und hieraus die Umfangslinien nach den vorigen Formeln finden; aus den Umfangslinien findet man aber die Seiten. Da nun $\Delta + \Delta' = 2A$, $\Delta + \Delta'' = 2B$, $\Delta + \Delta''' = 2C$ ist, so hat man, wenn man zur Abkürzung setzt $\Delta = 2s$, $\Delta' = 2(A - s)$, $\Delta'' = 2(B - s)$, $\Delta''' = 2(C - s)$; ferner ist $U + U' = 360^0 + 2a$, $U + U'' = 360^0 + 2b$, $U + U''' = 360^0 + 2c$, und also, wenn man zur Abkürzung setzt $U = 2t$, $U' = 360^0 - 2(t - a)$, $U'' = 360^0 - 2(t - b)$, $U''' = 360^0 - 2(t - c)$, und also

$$\cot \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(A - s) \cdot \operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(B - s) \cdot \operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(C - s)}{\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} s}},$$

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(t - a) = \frac{\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} s}{\operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(A - s)} \cdot \cot \tfrac{1}{2} t;$$

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(t - b) = \frac{\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} s}{\operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(B - s)} \cdot \cot \tfrac{1}{2} t;$$

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} s - c) = \frac{\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} s}{\operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(C - s)} \cdot \cot \tfrac{1}{2} t;$$

nach diesen einfachen Formeln kann man auf eine sehr bequeme Weise die Seiten eines Dreiecks aus seinen Winkeln finden.

§. 168.

Lehrsatz. Das Quadrat der Tangente vom Viertel-Inhalte eines Dreiecks ist gleich dem Producte aus den Cotangenten der Viertel-Perimeter seiner drei Nebendreiecke, dividirt durch die Cotangente seines Viertel-Umfanges selbst.

Beweis. Da $\operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta \cdot \operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta' = \cot \tfrac{1}{4} U'' \cot \tfrac{1}{4} U'''$, und $\operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta' = \dfrac{\operatorname{tng} \tfrac{1}{4} U' \cdot \operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta}{\operatorname{tng} \tfrac{1}{4} U}$ ist, so hat man auf der Stelle

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta^2 = \frac{\cot \tfrac{1}{4} U' \cdot \cot \tfrac{1}{4} U'' \cdot \cot \tfrac{1}{4} U'''}{\cot \tfrac{1}{4} U}$$

und also $\operatorname{tng} \tfrac{1}{4} \Delta = \sqrt{\dfrac{\cot \tfrac{1}{4} U' \cdot \cot \tfrac{1}{4} U'' \cdot \cot \tfrac{1}{4} U'''}{\cot \tfrac{1}{4} U}}$, ebenso ist

$$\text{tng}\,\tfrac{1}{4}\,\Delta' = \sqrt{\frac{\cot\tfrac{1}{4}U\,.\,\cot\tfrac{1}{4}U''\,\cot\tfrac{1}{4}U'''}{\cot\tfrac{1}{4}U'}},$$

$$\text{tng}\,\tfrac{1}{4}\,\Delta'' = \sqrt{\frac{\cot\tfrac{1}{4}U\,.\,\cot\tfrac{1}{4}U'\,.\,\cot\tfrac{1}{4}U'''}{\cot\tfrac{1}{4}U''}},$$

$$\text{tng}\,\tfrac{1}{4}\,\Delta''' = \sqrt{\frac{\cot\tfrac{1}{4}U\,.\,\cot\tfrac{1}{4}U',\,\cot\tfrac{1}{4}U''}{\cot\tfrac{1}{4}U''}}.$$

Zusatz 1. Wendet man die Bezeichnung im Zusatze 2 zu §. 167 an, so hat man

$$\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,s = \sqrt{(\text{tng}\,\tfrac{1}{2}t\;\text{tng}\,\tfrac{1}{2}(t-a)\;\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(t-b)\;\;\text{tng}\,\tfrac{1}{2}(t-c))}$$

und dann $\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(A-s) = \dfrac{\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,s\;\cot\,\tfrac{1}{2}\,t}{\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(s-a)}$; $\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(B-s)$ $= \dfrac{\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,s\;\cot\,\tfrac{1}{2}\,t}{\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(t-b)}$ und $\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(C-s) = \dfrac{\text{tng}\,\tfrac{1}{2}s\;\cot\,\tfrac{1}{2}\,t}{\text{tng}\,\tfrac{1}{2}\,(t-c)}$.
Nach diesen einfachen Formeln kann man aus den Seiten eines Dreiecks seine drei Winkel auf eine sehr bequeme Weise berechnen.

§. 169.

Lehrsatz. Das Quadrat des Sinus vom Viertel-Inhalte eines Dreiecks ist gleich dem Sinus seines Viertel-Umfanges, multiplicirt mit dem Producte der Cosinus der Vierter-Permiter seiner drei Nebendreiecke und dividirt durch das Product der Cosinus seiner drei Seiten.

Beweis. Nach §. 152 ist $\sin\,\tfrac{1}{2}\Delta = \dfrac{w}{2\cos\tfrac{1}{2}a\,\cos\tfrac{1}{2}b\,\cos\tfrac{1}{2}c}$, und wenn dieselbe Bezeichnung als im Zusatze zu §. 154 genommen wird, so ist

$$w = \sqrt{(\sin\tfrac{1}{2}U\;\sin\tfrac{1}{2}U'\;\sin\tfrac{1}{2}U''\;\sin\tfrac{1}{2}U'')}.$$

Weil nun aber nach dem Zusatze 2 zu §. 136 $\sin\tfrac{1}{2}\Delta = 2\sin\tfrac{1}{4}\Delta\cos\tfrac{1}{4}\Delta$ und also $\sin\tfrac{1}{2}\Delta\;\text{tng}\,\tfrac{1}{4}\,\Delta = 2\sin\tfrac{1}{4}\Delta^2$ ist, so erhält man, wenn man die vorige Gleichung mit der Gleichung $\text{tng}\,\tfrac{1}{4}\Delta = \sqrt{\dfrac{\cot\tfrac{1}{4}U'\,\cot\tfrac{1}{4}U''\,\cot\tfrac{1}{4}U'''}{\cot\tfrac{1}{4}U}}$ multiplicirt, auf der Stelle die gesuchte Formel

$$\sin\tfrac{1}{4}\Delta = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{4}U\,.\,\cos\tfrac{1}{4}U'\,.\,\cos\tfrac{1}{4}U''\,.\,\cos\tfrac{1}{4}U'''}{\cos\tfrac{1}{2}a\,\cos\tfrac{1}{2}b\,\cos\tfrac{1}{2}c}}.$$

Zusatz. Bezeichnet man in Fig. 10 die Seiten des Hauptdreiecks ABC mit a, b, c, so ist also

$$\sin\tfrac{1}{4}\Delta = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{4}U\cos\tfrac{1}{4}U'\,\cos\tfrac{1}{4}U''\;\;\cos\tfrac{1}{4}U'''}{\cos\tfrac{1}{2}a\;\cos\tfrac{1}{2}b\;\cos\tfrac{1}{2}c}};$$

$$\sin\tfrac{1}{4}\Delta' = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{4}U'\;\;\cos\tfrac{1}{4}U\cos\tfrac{1}{4}U''\;\;\cos\tfrac{1}{4}U''}{\cos\tfrac{1}{2}a\;\sin\tfrac{1}{2}b\;\sin\tfrac{1}{2}c}},$$

$$\sin \tfrac{1}{4} \Delta'' = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{4} U'' \cos \frac{1}{4} U \cos \frac{1}{4} U' \cos \frac{1}{4} U''}{\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}},$$

$$\sin \tfrac{1}{4} \Delta''' = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{4} U''' \cos \frac{1}{4} U \cos \frac{1}{4} U' \cos \frac{1}{4} U''}{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}},$$

§. 170.

Lehrsatz. Das Quadrat des Cosinus vom Viertel-Inhalte eines Dreiecks ist gleich dem Producte aus dem Cosinus seines Viertel-Umfanges und aus den Sinus der Viertel-Perimeter seiner drei Nebendreiecke, dividirt durch das Product der Cosinus der Hälften seiner drei Seiten.

Beweis. Wenn man dieselben beiden Formeln, wie im Beweise von §. 169 mit einander verbindet, nun aber die erste durch die zweite dividirt, so erhält man auf der Stelle

$$\cos \tfrac{1}{4} \Delta = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{4} U . \sin \frac{1}{4} U' \sin \frac{1}{4} U''.\sin \frac{1}{4} U'''}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}},$$

Zusatz. Bezeichnet man in Fig. 10 die Seiten des Hauptdreiecks ABC mit a, b, c, so hat man

$$\cos \tfrac{1}{4} \Delta = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{4} U \sin \frac{1}{4} U' \sin \frac{1}{4} U'' \sin \frac{1}{4} U'''}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}},$$

$$\cos \tfrac{1}{4} \Delta' = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{4} U' \sin \frac{1}{4} U \sin \frac{1}{4} U'' \sin \frac{1}{4} U'''}{\cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}},$$

$$\cos \tfrac{1}{4} \Delta'' = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{4} U'' \sin \frac{1}{4} U \sin \frac{1}{4} U' \sin \frac{1}{4} U'''}{\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}},$$

$$\cos \tfrac{1}{4} \Delta''' = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{4} U''' . \sin \frac{1}{4} U \sin \frac{1}{4} U' \sin \frac{1}{4} U''}{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}}.$$

§. 171.

Lehrsatz. Das Quadrat des Sinus vom Viertel-Umfange eines Dreiecks ist gleich dem Producte aus dem Sinus seines Viertel-Inhalts und den Cosinus der Viertel-Inhalte seiner drei Nebendreiecke, dividirt durch das Product der Sinus der Hälften der drei Winkel des Dreiecks.

Beweis. Nach §. 154 ist $\sin \frac{1}{4} U = \frac{W}{2 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}$ und $W = \sqrt{(\sin \frac{1}{2} \Delta \sin \frac{1}{2} \Delta' \sin \frac{1}{2} \Delta'' \sin \frac{1}{2} \Delta''')}$, ferner ist $\operatorname{tng} \frac{1}{4} U = \sqrt{\frac{\cot \frac{1}{4} \Delta' . \cot \frac{1}{4} \Delta'' \cot \frac{1}{4} \Delta'''}{\cot \frac{1}{4} \Delta}}$, und wird die vorige Gleichung hiermit multiplicirt, so erhält man schon

$$\sin \tfrac{1}{4} U = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{4} \Delta \cos \frac{1}{4} \Delta' \cos \frac{1}{4} \Delta'' \cos \frac{1}{4} \Delta'''}{\sin \frac{1}{2} A . \sin \frac{1}{2} B . \sin \frac{1}{2} C}}.$$

Bezeichnet man in Fig. 10 die Winkel des Hauptdreiecks ABC mit A, B, C, so hat man auch noch

$$\sin \tfrac{1}{4} U' = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{4} \Delta' \cos \frac{1}{4} \Delta \cos \frac{1}{4} \Delta'' \cos \frac{1}{4} \Delta'''}{\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}},$$

$$\sin \tfrac{1}{4} U'' = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{4} \Delta'' \cos \frac{1}{4} \Delta \cos \frac{1}{4} \Delta' \cos \frac{1}{4} \Delta'''}{\cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}},$$

$$\sin \tfrac{1}{4} U''' = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{4} \Delta''' \cos \frac{1}{4} \Delta \cos \frac{1}{4} \Delta' \cos \frac{1}{4} \Delta''}{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}},$$

§. 172.

Lehrsatz. Das Quadrat des Cosinus des Viertel-Umfanges eines Dreiecks ist gleich dem Cosinus seines Viertel-Inhalts, multiplicirt mit dem Producte der Sinus der Viertel-Inhalte seiner drei Nebendreiecke und dividirt durch das Product der Sinus der Hälften seiner drei Seiten.

Beweis. Wenn man dieselben zwei Formeln, wie im §. 171, verbindet, nun aber die erste durch die zweite dividirt, so erhält man schon

$$\cos \tfrac{1}{4} U = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{4} \Delta \sin \frac{1}{4} \Delta' \sin \frac{1}{4} \Delta'' \sin \frac{1}{4} \Delta''}{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}},$$

und für die drei Nebendreiecke hat man noch die Formeln

$$\cos \tfrac{1}{4} U' = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{4} \Delta' \sin \frac{1}{4} \Delta \sin \frac{1}{4} \Delta'' \sin \frac{1}{4} \Delta'''}{\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} C}},$$

$$\cos \tfrac{1}{4} U'' = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{4} \Delta'' \sin \frac{1}{4} \Delta \sin \frac{1}{4} \Delta' \sin \frac{1}{4} \Delta'''}{\cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}},$$

$$\cos \tfrac{1}{4} U''' = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{4} \Delta''' \sin \frac{1}{4} \Delta \sin \frac{1}{4} \Delta' \sin \frac{1}{4} \Delta''}{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}},$$

Zusatz. Auch nach den Formeln im §. 169 und 170 kann man aus den Seiten eines Dreiecks seine Winkel und nach den Formeln im §. 171 und 172 aus den Winkeln eines Dreiecks seine Seiten berechnen; indessen sind diese Formeln für die genannten Zwecke nicht so bequem, als die früheren im §. 167 und 168.

§. 173.

Lehrsatz. Das Product aus dem Sinus des Viertel-Inhalts eines Hauptdreiecks und dem Sinus des Viertel-Inhaltes eines Nebendreiecks verhält sich zum Producte der Cosinus der Viertel-Perimeter der beiden anderen Nebendreiecke, wie der Cosinus der Hälfte des gemeinschaftlichen Winkels der beiden ersten Dreiecke zum Cosinus der Hälfte ihrer gemeinschaftlichen Seite, oder auch wie das Product der Cosinus der Viertel-Inhalte der beiden er-

sten Dreiecke zum Producte der Sinus der Vierter-Perimeter der beiden anderen Dreiecke.

Beweis. Da nach §. 199 ist

$$\sin \tfrac{1}{4} \triangle = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{4} U \cos \tfrac{1}{4} U' \cos \tfrac{1}{4} U'' \cos \tfrac{1}{4} U'''}{\cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c}} \text{ und auch}$$

$$\sin \tfrac{1}{4} \triangle' = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{4} U \cos \tfrac{1}{4} U \cos \tfrac{1}{4} U'' \cos \tfrac{1}{4} U''}{\cos \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c}},$$

so erhält man durch die Multiplication der beiden Formeln

$$\sin \tfrac{1}{4} \triangle \,.\, \sin \tfrac{1}{4} \triangle' = \frac{\cos \tfrac{1}{4} U'' \cos \tfrac{1}{4} U'''}{\cos \tfrac{1}{2} a} \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2} U \sin \tfrac{1}{2} U'}{\sin b \sin c}}$$

und da nach §. 141 ist $\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2} U \sin \tfrac{1}{2} U'}{\sin b \sin c}}$, so hat man offenbar

$$\frac{\sin \tfrac{1}{4} \triangle \,.\, \sin \tfrac{1}{4} \triangle'}{\cos \tfrac{1}{2} A} = \frac{\cos \tfrac{1}{4} U'' \,.\, \cos \tfrac{1}{4} U'''}{\cos \tfrac{1}{2} a} \text{ und ebenso}$$

1. $$\frac{\sin \tfrac{1}{4} \triangle \,.\, \sin \tfrac{1}{4} \triangle''}{\cos \tfrac{1}{2} B} = \frac{\cos \tfrac{1}{4} U' \,.\, \cos \tfrac{1}{4} U'''}{\cos \tfrac{1}{2} b},$$

$$\frac{\sin \tfrac{1}{4} \triangle \,.\, \sin \tfrac{1}{4} \triangle'''}{\cos \tfrac{1}{2} C} = \frac{\cos \tfrac{1}{4} U' \,.\, \cos \tfrac{1}{4} U''}{\cos \tfrac{1}{2} c}.$$

Da ferner nach §. 170

$$\cos \tfrac{1}{4} \triangle = \sqrt{\frac{\cos \tfrac{1}{4} U \sin \tfrac{1}{4} U' \sin \tfrac{1}{4} U'' \sin \tfrac{1}{4} U'''}{\cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c}}$$

und $\cos \tfrac{1}{4} \triangle' = \sqrt{\frac{\cos \tfrac{1}{4} U' \sin \tfrac{1}{4} U \sin \tfrac{1}{4} U'' \sin \tfrac{1}{4} U'''}{\cos \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c}}$

ist, so findet man durch die Multiplication dieser beiden Formeln auf ähnliche Art, wie vorhin

$$\frac{\cos \tfrac{1}{4} \triangle \,.\, \cos \tfrac{1}{4} \triangle'}{\cos \tfrac{1}{2} A} = \frac{\sin \tfrac{1}{4} U'' \,.\, \sin \tfrac{1}{4} U'''}{\cos \tfrac{1}{2} a}, \text{ und ebenso}$$

2. $$\frac{\cos \tfrac{1}{4} \triangle \,.\, \cos \tfrac{1}{4} \triangle''}{\cos \tfrac{1}{2} B} = \frac{\sin \tfrac{1}{4} U' \,.\, \sin \tfrac{1}{4} U'''}{\cos \tfrac{1}{2} b},$$

$$\frac{\cos \tfrac{1}{4} \triangle \,.\, \cos \tfrac{1}{4} \triangle'''}{\cos \tfrac{1}{2} C} = \frac{\sin \tfrac{1}{4} U' \,.\, \sin \tfrac{1}{4} U''}{\cos \tfrac{1}{2} c}.$$

§. 174.

Lehrsatz. Das Product aus dem Sinus des Viertel-Umfanges eines Hauptdreiecks und dem Sinus des Viertel-Umfanges eines Nebendreiecks verhält sich zum Producte der Cosinus der Viertel-Inhalte der beiden anderen Nebendreiecke, wie der Sinus der halben gemeinschaftlichen Seite der beiden ersten Dreiecke zum Sinus des halben gemeinschaftlichen Winkels derselben, oder auch wie das Product der Cosinus der Viertel-Perimeter der beiden

ersten Dreiecke zum Producte der Sinus der Viertel-Inhalte der beiden anderen Dreiecke.

Beweis. Da nach §. 171 ist

$$\sin\tfrac{1}{4}U = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}\Delta\ \cos\frac{1}{4}\Delta'\ \cos\frac{1}{4}\Delta''\ \cos\frac{1}{4}\Delta'''}{\sin\frac{1}{2}A\ \sin\frac{1}{2}B\ \sin\frac{1}{2}C}}$$

und $\sin\frac{1}{4}U' = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}\Delta'.\cos\frac{1}{4}\Delta\ \cos\frac{1}{4}\Delta''\ \cos\frac{1}{4}\Delta'''}{\sin\frac{1}{2}A\ \cos\frac{1}{2}B\ \cos\frac{1}{2}C}}$

ist, so hat man $\sin\frac{1}{4}U\ .\ \sin\frac{1}{4}U' = \frac{\cos\frac{1}{4}\Delta''\ \cos\frac{1}{4}\Delta'''}{\sin\frac{1}{2}A}$.

$\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\ \sin\frac{1}{2}\Delta'}{\sin B\ \sin C}}$, und da nach §. 135

$\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\ \sin\frac{1}{2}\Delta'}{\sin B\ \sin C}}$ ist, so ist offenbar

$\frac{\sin\frac{1}{4}U\ .\ \sin\frac{1}{4}U'}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{4}\Delta''\ .\ \cos\frac{1}{4}\Delta'''}{\sin\frac{1}{2}A}$, und ebenso

1. $\frac{\sin\frac{1}{4}U\ .\ \sin\frac{1}{4}U''}{\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\cos\frac{1}{4}\Delta'\ .\ \cos\frac{1}{4}\Delta'''}{\sin\frac{1}{2}B}$,

$\frac{\sin\frac{1}{4}U\ .\ \sin\frac{1}{4}U'''}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{4}\Delta'\ \cos\frac{1}{4}\Delta''}{\sin\frac{1}{2}C}$.

Da ferner nach §. 192

$$\cos\tfrac{1}{4}U = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}\Delta\ .\ \sin\frac{1}{4}\Delta'\ \sin\frac{1}{4}\Delta''\ \sin\frac{1}{4}\Delta'''}{\sin\frac{1}{2}A\ \sin\frac{1}{2}B\ \sin\frac{1}{2}C}}$$

und $\cos\frac{1}{4}U = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}\Delta'\ \text{tin}\frac{1}{4}\Delta\ \sin\frac{1}{4}\Delta''\ \sin\frac{1}{4}\Delta'''}{\sin\frac{1}{2}A\ \cos\frac{1}{2}B\ \cos\frac{1}{2}C}}$

ist, so erhält man durch die Multiplication dieser Formel

$\frac{\cos\frac{1}{4}U\ .\ \cos\frac{1}{4}U'}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{4}\Delta''\ .\ \sin\frac{1}{4}\Delta'''}{\sin\frac{1}{2}A}$, und ebenso

2. $\frac{\cos\frac{1}{4}U\ .\ \cos\frac{1}{4}U''}{\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\sin\frac{1}{4}\Delta'\ .\ \sin\frac{1}{4}\Delta'''}{\sin\frac{1}{2}B}$,

$\frac{\cos\frac{1}{4}U\ .\ \cos\frac{1}{4}U'''}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{4}\Delta'\ .\ \sin\frac{1}{4}\Delta''}{\sin\frac{1}{2}C}$.

§. 175.

Zusätze. Werden die Formeln $\sin\frac{1}{4}\Delta$ und $\cos\frac{1}{4}\Delta'$ multiplicirt, so hat man

$\frac{\sin\frac{1}{4}\Delta\ \cos\frac{1}{4}\Delta'}{\sin\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{4}U\ \cos\frac{1}{4}U'}{\cos\frac{1}{2}a}$, und ebenso

1. $\frac{\sin\frac{1}{4}\Delta\ .\cos\frac{1}{4}\Delta''}{\sin\frac{1}{2}B} = \frac{\sin\frac{1}{4}U\ .\ \cos\frac{1}{4}U''}{\cos\frac{1}{2}b}$,

$\frac{\sin\frac{1}{4}\Delta\ \cos\frac{1}{4}\Delta'''}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{4}U\ .\ \cos\frac{1}{4}U'''}{\cos\frac{1}{2}c}$.

Werden die Formel für $\sin \frac{1}{4} \triangle'$ und $\cos \frac{1}{4} \triangle''$ multiplicirt, so hat man

$$\frac{\sin \frac{1}{4} \Delta' \,.\, \cos \frac{1}{4} \Delta''}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{1}{4} U' \cos \frac{1}{4} U''}{\sin \frac{1}{2} c}, \text{ und ebenso}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{4} \Delta' \,.\, \sin \frac{1}{4} \Delta''}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\cos \frac{1}{4} U' \,.\, \sin \frac{1}{4} U''}{\sin \frac{1}{2} c},$$

2. $$\frac{\sin \frac{1}{4} \Delta' \cos \frac{1}{4} \Delta'''}{\cos \frac{1}{2} B} = \frac{\sin \frac{1}{4} U' \cos \frac{1}{4} U'''}{\sin \frac{1}{2} b},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{4} \Delta' \,.\, \sin \frac{1}{4} \Delta'''}{\cos \frac{1}{2} B} = \frac{\cos \frac{1}{4} U' \sin \frac{1}{4} U'''}{\sin \frac{1}{2} b},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{4} \Delta'' \cos \frac{1}{4} \Delta'''}{\cos \frac{1}{2} A} = \frac{\sin \frac{1}{4} U'' \cos \frac{1}{4} U'''}{\sin \frac{1}{2} a}.$$

$$\frac{\cos \frac{1}{4} \Delta'' \sin \frac{1}{4} \Delta'''}{\cos \frac{1}{2} A} = \frac{\cos \frac{1}{4} U'' \sin \frac{1}{4} U'''}{\sin \frac{1}{2} a}.$$

§. 176.

Zusätze. Werden die Formeln (1) im §. 173 durch die Formeln (2) im §. 175 dividirt, so erhält man:

1. $$\text{tng} \tfrac{1}{2} c \,.\, \cot \tfrac{1}{4} U' = \frac{\sin \frac{1}{4} \Delta \,.\, \sin \frac{1}{4} \Delta'''}{\sin \frac{1}{4} \Delta' \,.\, \cos \frac{1}{4} \Delta''},$$

und $$\text{tng} \tfrac{1}{2} c \,.\, \cot \tfrac{1}{4} U'' = \frac{\sin \frac{1}{4} \Delta \,.\, \sin \frac{1}{4} \Delta'''}{\sin \frac{1}{4} \Delta'' \cos \frac{1}{4} \Delta'}.$$

Aus den Formeln (2) im §. 173 und den Formeln (2) im §. 175 erhält man

2. $$\text{tng} \tfrac{1}{2} c \,.\, \text{tng} \tfrac{1}{4} U' = \frac{\cos \frac{1}{4} \Delta \,.\, \cos \frac{1}{4} \Delta'''}{\cos \frac{1}{4} \Delta' \,.\, \sin \frac{1}{4} \Delta''},$$

$$\text{tng} \tfrac{1}{2} c \,.\, \text{tng} \tfrac{1}{4} U'' = \frac{\cos \frac{1}{4} \Delta \,.\, \cos \frac{1}{4} \Delta'''}{\cos \frac{1}{4} \Delta'' \,.\, \sin \frac{1}{4} \Delta'}.$$

Aus den Formeln (1) im §. 174 und den Formeln (2) im §. 175 erhält man

3. $$\cot \tfrac{1}{2} C \cot \tfrac{1}{4} \Delta' = \frac{\sin \frac{1}{4} U \,.\, \sin \frac{1}{4} U'''}{\sin \frac{1}{4} U' \,.\, \cos \frac{1}{4} U''} \text{ und}$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C \cot \tfrac{1}{4} \Delta'' = \frac{\sin \frac{1}{4} U \,.\, \sin \frac{1}{4} U'''}{\sin \frac{1}{4} U'' \,.\, \cos \frac{1}{4} U'}.$$

Endlich erhält man noch aus den Formeln (2) im §. 174 und den Formeln (2) im §. 175 die folgenden:

4. $$\cos \tfrac{1}{2} C \,.\, \text{tng} \tfrac{1}{4} \Delta' = \frac{\cos \frac{1}{4} U \,.\, \cos \frac{1}{4} U'''}{\cos \frac{1}{4} U' \,.\, \sin \frac{1}{4} U''},$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C \,.\, \text{tng} \tfrac{1}{4} \Delta'' = \frac{\cos \frac{1}{4} U \,.\, \cos \frac{1}{4} U'''}{\cos \frac{1}{4} U'' \,.\, \sin \frac{1}{4} U'}.$$

In einem späteren Abschnitte wird von dem Zusammenhange der Nebendreiecke noch in einer anderen Beziehung gehandelt werden.

Siebenter Abschnitt.

Grundzüge der sphärischen Situations-Geometrie.

Von den Lineal-Constructionen.

§. 177.

Sowie man sich in der Planimetrie zum Ziehen gerader Linien des Lineales bedient, ebenso kann man sich auch in der Sphärik eines geeigneten Lineales bedienen, um Hauptbogen auf einer Kugel zu ziehen, und diejenigen Constructionen, zu deren Ausführung der Gebrauch des Lineales ausreicht, können daher füglich Lineal-Constructionen heißen, um sie dadurch von denen zu unterscheiden, bei welchen die Beschreibung eines Kreises (Nebenkreises) oder gar mehrer Kreise nöthig wird, und auch von denen, welche durch die Beschreibung von krummen Linien auf der Kugel bedingt werden, die weder Haupt- noch Nebenkreise sind. Den Lineal-Constructionen kommt ein höherer Grad der Einfachheit zu, als den übrigen, denn ihre Ausführung kommt lediglich auf das Ziehen von Hauptbogen entweder in willkürlichen oder in gegebenen Richtungen zurück. Dabei werden sich nicht selten mehre Hauptbogen in Einem Punkte schneiden, und mehre Durchschnittspunkte werden sich mit einander oder mit gegebenen Punkten in Einem Hauptkreise befinden; die Entwickelung der Gesetze, nach welchen diese Erscheinungen Statt finden, macht den Inhalt dieses Abschnittes aus. Da es also hier auf die Durchschnitts-Punkte von Hauptkreisen ankommt, und sich zwei Hauptkreise immer in zwei Punkten schneiden, die Gegenpunkte sind, so wird eine große Vereinfachung dadurch gewonnen, daß man von den beiden Durchschnitts-Punkten zweier Hauptkreise in der Regel nur einen zeichnet, den andern aber, da seine Lage durch die des ersten völlig bestimmt ist, geradezu wegläßt, weil er nöthigen Falls sogleich nachgewiesen werden kann. Läßt man aber von je zwei Gegenpunkten jedesmal den einen weg, so gewinnen die sphärischen Constructionen auch mit den analogen planimetrischen eine größere Uebereinstimmung. Da weiter keine Linien, als Hauptbogen vorkommen, so werden diese der Kürze wegen häufig bloß Linien genannt werden.

§. 178.

Lehrsatz. Wenn drei von einem Punkte V ausgehende Linien VA, VB, VC Fig. 76 von einem vierten Hauptbogen geschnitten werden, so theilen sie ihn so, daß ist

$$\frac{\sin AB}{\sin AC} = \frac{\sin VB \,.\, \sin AVB}{\sin VC \,.\, \sin AVC};$$

$$\frac{\sin CB}{\sin CA} = \frac{\sin VB \,.\, \sin CVB}{\sin VA \,.\, \sin CVA} \text{ und}$$

$$\frac{\sin AB}{\sin CB} = \frac{\sin VA \,.\, \sin AVB}{\sin VC \,.\, \sin CVB}.$$

Beweis. Nach §. 124 ist im Dreiecke AVB, wenn von V das Loth VP auf XY gefället wird, $\sin AB \,.\, \sin VP = \sin VB \,.\, \sin AVB$, im Dreiecke BVC ist $\sin BC \,.\, \sin VP = \sin VB \,.\, \sin VC \sin BVC$ und im Dreiecke AVC ist $\sin AC \,.\, \sin VP = \sin VA \,.\, \sin VC \,.\, \sin AVC$; werden diese drei Gleichungen, je zwei durch Division mit einander verbunden, so erhält man die drei im Satze aufgestellten Proportionen.

§. 179.

Lehrsatz. Gehen in Fig. 77 von einem Punkte V aus drei Linien $V\alpha$, $V\beta$, $V\gamma$ und werden sie von zwei anderen in den Punkten A, B, C und A′ B′ C′ geschnitten, so gelten die drei folgenden Proportionen

$$\frac{\sin VA}{\sin VB} : \frac{\sin VA'}{\sin VB'} = \frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin A'C'}{\sin B'C'},$$

$$\frac{\sin VC}{\sin VB} : \frac{\sin VC'}{\sin VB'} = \frac{\sin CA}{\sin BA} : \frac{\sin C'A'}{\sin B'A'},$$

$$\frac{\sin VA}{\sin VC} : \frac{\sin VA'}{\sin VC'} = \frac{\sin AB}{\sin CB} : \frac{\sin A'B'}{\sin C'B'}.$$

Beweis. Da nach §. 178 ist

$$\frac{\sin AC}{\sin BC} = \frac{\sin VA \,.\, \sin AVC}{\sin VB \,.\, \sin BVC} \text{ und}$$

$$\frac{\sin A'C'}{\sin B'C'} = \frac{\sin VA' \,.\, \sin A'VC'}{\sin VB' \,.\, \sin B'VC'},$$

so erhält man, wenn die erste Proportion durch die zweite dividirt wird, auf der Stelle

$$\frac{\sin AC}{\sin BC} : \frac{\sin A'C'}{\sin B'C'} = \frac{\sin VA}{\sin VB} : \frac{\sin VA'}{\sin VB'}.$$

Auf ähnliche Art wird die Richtigkeit der zweiten und dritten Proportion gezeigt.

Zusatz. Werden in Fig. 77 die beiden Linien AC und A′C, durch eine Linie BB′ also getheilt, daß $\dfrac{\sin VA}{\sin VA'} : \dfrac{\sin VC}{\sin VC'}$

$= \frac{\sin AB}{\sin CB} : \frac{\sin A'B'}{\sin C'B'}$ ist, so geht die Linie BB' durch den Durchschnitts-Punkt V der beiden Linien AA' und CC'

§. 180.

Lehrsatz. Gehen in Fig. 78 vier Linien von einem Punkte V aus und werden sie von einer fünften in den Punkten a, b, c, d geschnitten, so finden zwischen ihren Stücken und den Winkeln an V, die auf dem aus V beschriebenen Kreisbogen $\alpha\beta\gamma\delta$ der Einfachheit wegen gemessen werden, die drei folgenden Proportionen Statt:

1. $\frac{\sin ab \cdot \sin cd}{\sin ac \cdot \sin bd} = \frac{\sin \alpha\beta \cdot \sin \gamma\delta}{\sin \alpha\gamma \cdot \sin \beta\delta}$,

2. $\frac{\sin bc \cdot \sin ad}{\sin ac \cdot \sin bd} = \frac{\sin \beta\gamma \cdot \sin \alpha\delta}{\sin \alpha\gamma \cdot \sin \beta\varrho}$,

3. $\frac{\sin ab \cdot \sin cd}{\sin bc \cdot \sin ad} = \frac{\sin \alpha\beta \cdot \sin \gamma\delta}{\sin \alpha\gamma \cdot \sin \alpha\delta}$.

Beweis. Da nach §. 178 $\frac{\sin ab}{\sin ac} = \frac{\sin Vb \sin \alpha\beta}{\sin Vc \sin \alpha\gamma}$ und $\frac{\sin cd}{\sin bd} = \frac{\sin Vc \cdot \sin \gamma\delta}{\sin Vb \cdot \sin \beta\delta}$ ist, so erhält man durch die Multiplication dieser beiden Proportionen auf der Stelle die Proportion (1). Die Proportion (2) findet man auf ähnliche Art, und auch die Proportion (3) ebenso; indessen erhält man diese auch schon dadurch, daß man die erste durch die zweite dividirt.

§. 181.

Erklärung. Zwei Kreisbogen $\alpha\beta\gamma\delta$ und abcd, in welchen die Punkte α, β, γ, δ des einen und die Punkte a, b, c, d des anderen so vertheilt sind, wie es die drei Porportionen im §. 180 ausdrücken, mögen einander ähnlich getheilt heißen, welches der Kürze wegen durch $\alpha\beta\gamma\delta \backsim abcd$ bezeichnet werden mag. Es heißen a und α homologe Punkte der Theilung, ebenso heißen b und β homologe Punkte, ferner c und γ, wie auch d und δ.

Zur ähnlichen Theilung gehören also acht Punkte, wovon vier sich im einen Bogen und die vier homologen Punkte im anderen Bogen den genannten Proportionen gemäß vertheilt befinden.

§. 182.

Hülfssatz. Sind vier Punkte a, b, c, d auf einem Kreisbogen in Fig. 79 beliebig in der angegebenen Folge vertheilt, so ist

$$\sin ab \cdot \sin cd + \sin bc \cdot \sin ad = \sin ac \cdot \sin bd.$$

Beweis. 1. Da sin ab = sin (ac — bc) = sin ac cos bc — cos ac sin bc und sin ad = sin (ac + cd = sin ac . cos cd + cos ac sin cd ist, so hat man, wenn diese Ausdrücke substituirt werden sin ab . sin cd + sin bc . sin ad = sin ac cos bc sin cd — cos ac sin bc sin cd + sin ac . cos cd . sin bc + cos ac . sin cd . sin bc = sin ac (cos bc sin cd + sin bc cos cd) = sin ac . sin bd.

Beweis. 2. Zieht man die Radien Va, Vb, Vc, Vd, und legt man durch sie eine Linie mnop, so ist

$$\frac{\sin ab \cdot \sin cd}{\sin ac \cdot \sin bd} = \frac{mn \cdot op}{mo \cdot np} \text{ und } \frac{\sin bc \cdot \sin ad}{\sin ac \cdot \sin bd} = \frac{no \cdot mp}{mo \cdot np}$$

und also durch Addition $\frac{\sin ab \cdot \sin cd + \sin bc \cdot \sin ad}{\sin ac \cdot \sin bd}$

$= \frac{mn \cdot op + no \cdot mp}{mo \cdot np}$; da aber mn . op + no . mp = mo . np ist, so ist auch sin ab . sin cd + sin bc . sin ad = sin ac . sin bd.

§. 183.

Lehrsatz. Die drei Proportionen für die ähnliche Theilung der Kreisbogen drücken nur soviel aus, als eine einzige unter ihnen.

Beweis. Ist in Fig. 78 $\frac{\sin ab \cdot \sin cd}{\sin bc \cdot \sin ad} = \frac{\sin \alpha\beta \cdot \sin \gamma\delta}{\sin \beta\gamma \cdot \sin \alpha\delta}$, so ist auch $\frac{\sin ab \cdot \sin cd}{\sin bc \cdot \sin ad} + 1 = \frac{\sin \alpha\beta \cdot \sin \gamma\delta}{\sin \beta\gamma \cdot \sin \alpha\delta} + 1$ oder

$$\frac{\sin ab \cdot \sin cd + \sin bc \cdot \sin ad}{\sin bc \cdot \sin ad} = \frac{\sin \alpha\beta \cdot \sin \gamma\delta + \sin \beta\gamma \cdot \sin \alpha\delta}{\sin \beta\gamma \cdot \sin \alpha\delta},$$

und also nach §. 182 $\frac{\sin ac \cdot \sin bd}{\sin bc \cdot \sin ad} = \frac{\sin \alpha\gamma \cdot \sin \beta\delta}{\sin \beta\gamma \cdot \sin \alpha\delta}$, wird diese Proportion durch die erste dividirt, so erhält man die dritte; daher folgen aus einer Proportion die beiden anderen.

Zusatz 1. Ist daher $\alpha\beta\gamma\delta \backsim$ abcd, so kann diese Theilung auf drei verschiedene Arten ausgedrückt werden.

Zusatz 2. Wenn $\alpha\beta\gamma\delta \backsim$ abcd sein soll, so kann man sieben von den acht Punkten α, β, γ, δ, a, b, c, d in den Linien willkührlich annehmen und die Lage des achten Punktes ist durch die Bedingung $\alpha\beta\gamma\delta \backsim$ abcd bestimmt.

§. 184.

Lehrsatz. Werden zwei Hauptbogen von vier anderen, welche durch Einen Punkt gehen, geschnitten, so sind sie in den acht Durchschnitts-Punkten ähnlich getheilt.

Beweis. In Fig. 78 werden abcd und ABCD in den homologen Punkten a und A, b und B, c und C, d und D geschnitten von den Linien Vα, Vβ, Vγ, Vδ, welche vom Punkte V ausgehen, und es ist also nach §. 180

$$\frac{\sin ab \cdot \sin cd}{\sin ac \cdot \sin bd} = \frac{\sin \alpha\beta \cdot \sin \gamma\delta}{\sin \alpha\gamma \cdot \sin \beta\delta} \text{ und}$$
$$\frac{\sin AB \cdot \sin CD}{\sin AC \cdot \sin BD} = \frac{\sin \alpha\beta \cdot \sin \gamma\delta}{\sin \alpha\gamma \cdot \sin \beta\delta},$$
$$\frac{\sin bc \cdot \sin ad}{\sin ac \cdot \sin bd} = \frac{\sin \beta\gamma \cdot \sin \alpha\delta}{\sin \alpha\gamma \cdot \sin \beta\delta} \text{ und}$$
$$\frac{\sin BC \cdot \sin AD}{\sin AC \cdot \sin BD} = \frac{\sin \beta\gamma \cdot \sin \alpha\delta}{\sin \alpha\gamma \cdot \sin \beta\delta},$$
$$\frac{\sin ab \cdot \sin cd}{\sin bc \cdot \sin ad} = \frac{\sin \alpha\beta \cdot \sin \gamma\delta}{\sin \beta\gamma \cdot \sin \alpha\delta} \text{ und}$$
$$\frac{\sin AB \cdot \sin CD}{\sin BC \cdot \sin AD} = \frac{\sin \alpha\beta \cdot \sin \gamma\delta}{\sin \beta\gamma \cdot \sin \alpha\delta}.$$

Unmittelbar hieraus folgen aber die drei folgenden Proportionen:

$$\frac{\sin ab \cdot \sin cd}{\sin ac \cdot \sin bd} = \frac{\sin AB \cdot \sin CD}{\sin AC \cdot \sin BD},$$
$$\frac{\sin bc \cdot \sin ad}{\sin ac \cdot \sin bd} = \frac{\sin BC \cdot \sin AD}{\sin AC \cdot \sin BD} \text{ und}$$
$$\frac{\sin ab \cdot \sin cd}{\sin bc \cdot \sin ad} = \frac{\sin AB \cdot \sin CD}{\sin BC \cdot \sin AD}.$$

Nach §. 183 drückt aber schon eine von diesen drei Proportionen aus, daß abcd ∽ ABCD sei.

Ganz ebenso ist der Beweis, daß in Fig. 80 abcd ∽ ABCD sei, obgleich sich diese Linien auf entgegengesetzten Seiten des Punktes V befinden und es ist auch hier A der homologe Punkt zu a, B zu b, C zu c und D zu d.

Zusatz. Wenn in Fig. 78 und Fig. 80 die Linien abcd und ABCD ähnlich getheilt sind, und wenn drei von den vier Linien Aa, Bb, Cc, Dd, wodurch die homologen Punkte der Theilung verbunden sind, sich in einem Punkte V schneiden, so geht die vierte durch eben diesen Punkt.

Denn schneiden sich z. B. Aa, Bb und Cc im Punkte V und ginge Dd nicht durch V, so könnte man VD ziehen, wovon abcd in d′ geschnitten werden mag, und es wäre dann nach dem Obigen abcd′ ∽ ABCD, und da auch der Annahme gemäß abcd ∽ ABCD ist, so wäre abcd ∽ abcd′, was nicht möglich ist, da d und d′ der Annahme gemäß keine Gegenpunkte sind.

Anmerkung. Die Bezeichnung abcd ∽ ABCD kann zugleich dazu dienen, die homologen Punkte der beiden Linien anzugeben, wenn man nur die Buchstaben a, b, c, d in derselben Reihe hinter einander setzt, in welcher sie in der Linie abcd auf einander folgen, und dann die Buchstaben für die homologen Punkte A, B, C, D in derselben Ordnung auf einander folgen läßt

§. 185.

Lehrsatz. Werden zwei Linien von drei anderen, die sich in einem Punkte vereinigen, geschnitten, so werden sie davon ähnlich getheilt, ihr Durchschnitts-Punkt ist der vierte Theilpunkt in ihnen und also der homologe Punkt zu sich selbst.

Beweis. Sind in Fig. 81 abcd und ABCD die beiden von AV, BV und CV geschnittenen Linien, so kann man, da sie den Punkt d oder D gemein haben, noch die vierte Linie DV ziehen und dann ist der Beweis, wie im §. 184.

Ebenso verhält es sich in Fig. 82; auch hier ist abcd ∽ ABCD, wenn die beiden Linien den Punkt D oder d gemein haben, obgleich die Punkte ABCD auf der Linie DC nicht in derselben Ordnung auf einander folgen, in welcher sie in der Gleichung abcd ∽ ABCD auf einander folgen. Die drei Proportionen sind hier

$$\frac{\sin ab \,.\, \sin cd}{\sin ac \,.\, \sin bd} = \frac{\sin AB \,.\, \sin CD}{\sin AC \,.\, \sin BD},$$

$$\frac{\sin bc \,.\, \sin ad}{\sin ac \,.\, \sin bd} = \frac{\sin BC \,.\, \sin AD}{\sin AC \,.\, \sin BD},$$

und
$$\frac{\sin ab \,.\, \sin cd}{\sin bc \,.\, \sin ad} = \frac{\sin AB \,.\, \sin CD}{\sin BC \,.\, \sin AD}.$$

Die letzte Proportion kann auch also gestellt werden:

$$\frac{\sin CD \,.\, \sin ad}{\sin AD \,.\, \sin cd} = \frac{\sin CB \,.\, \sin ab}{\sin AB \,.\, \sin cb}.$$

Zusatz 1. Wenn zwei Linien ähnlich getheilt sind und ein Theil-Punkt der homologe Punkt zu sich selbst ist, so schneiden sich die drei Linien, wodurch die drei übrigen Theil-Punkte der einen mit den drei homologen Punkten der ähnlich getheilten anderen Linie verbunden werden, in Einem Punkte.

Zusatz 2. Wenn man zwei Gegenseiten eines Vierecks verlängert, bis sie sich schneiden, und dann in Fig. 83 zwei Punkte C und C' auf ihnen so annimmt, daß

$$\frac{\sin PB \,.\, \sin PB'}{\sin PA \,.\, \sin PA'} = \frac{\sin BC \,.\, \sin B'C'}{\sin AC \,.\, \sin A'C'}$$

ist, so geht die Linie CC' durch den Durchschnitts-Punkt Q der Diagonalen BA' und AB' des Vierecks ABB'A'.

Denn nach der Annahme ist BCAP ∽ A'C'B'P. Die Linie CC' kann viele veränderte Lagen bekommen, in deren jeder sie der durch die aufgestellte Proportion ausgedrückten Bedingung Genüge leistet; sie kann z. B. auch die Lage von cc' haben, nur darf sie nicht durch den Punkt P selbst gehen.

§. 186.

Lehrsatz. Werden zwei Hauptkreise Qr und Rq Fig. 84 und 85, die sich in P schneiden, von zwei Linien QR und qr geschnitten, die sich in p schneiden, so gelten die drei folgenden Proportionen:

1. $\frac{\sin pq}{\sin pr} = \frac{\sin qR}{\sin PR} : \frac{\sin rQ}{\sin PQ}$,
2. $\frac{\sin pR}{\sin pQ} = \frac{\sin Rq}{\sin Pq} : \frac{\sin Qr}{\sin Pr}$,
3. $\frac{\sin pq}{\sin pr} : \frac{\sin pR}{\sin pQ} = \frac{\sin Pq}{\sin Pr} : \frac{\sin PR}{\sin PQ}$.

Beweis. Im Dreiecke PQR ist $\frac{\sin PR}{\sin PQ} = \frac{\sin Q}{\sin R}$, und im Dreiecke pRq ist $\frac{\sin qR}{\sin pq} = \frac{\sin p}{\sin R}$, also ist $\frac{\sin PR}{\sin PQ} \cdot \frac{\sin pq}{\sin qR} = \frac{\sin Q}{\sin p}$, und da im Dreiecke rQp auch $\frac{\sin rp}{\sin rQ} = \frac{\sin Q}{\sin p}$ ist, so hat man also $\frac{\sin PR}{\sin PQ} \cdot \frac{\sin pq}{\sin qR} = \frac{\sin rp}{\sin rQ}$ oder auch

$$\frac{\sin pq}{\sin pr} = \frac{\sin qR}{\sin PR} : \frac{\sin rQ}{\sin PQ},$$

und dieses ist die erste Proportion.

Im Dreiecke Pqr ist $\frac{\sin Pq}{\sin Pr} = \frac{\sin r}{\sin q}$, und im Dreiecke rQp ist $\frac{\sin rQ}{\sin pQ} = \frac{\sin p}{\sin r}$, also ist

$$\frac{\sin Pq}{\sin Pr} \cdot \frac{\sin rQ}{\sin pQ} = \frac{\sin p}{\sin q},$$

und da im Dreiecke qRp auch ist $\frac{\sin qR}{\sin pR} = \frac{\sin p}{\sin q}$, so hat man $\frac{\sin qR}{\sin pR} = \frac{\sin Pq}{\sin Pr} \cdot \frac{\sin rQ}{\sin pQ}$ oder auch

$$\frac{\sin pR}{\sin pQ} = \frac{\sin Rq}{\sin Pq} : \frac{\sin Qr}{\sin Pr},$$

und dieses ist die zweite Proportion; die dritte erhält man, wenn man die erste durch die zweite dividirt.

Man kann auch alle drei Proportionen aus denen im §. 179 herleiten, wenn man nur daselbst den Punkt C mit C′ zusammenfallen läßt. Die drei oben stehenden Proportionen sind sehr wichtig, sie gelten, wie alle vorhergehenden und nachfolgenden, auch in der Planimetrie in Bezug auf gerade Linien, wenn man nur die Vorsylben sin. sin. wegläßt.

Zusatz 1. Die Proportion (2) drückt aus, wann die drei Punkte p, q, r in den verlängerten Seiten des Dreiecks PQR in Einem Hauptbogen liegen, und kann auch also gestellt werden:

$$\frac{\sin pR}{\sin pQ} \cdot \frac{\sin rQ}{\sin rP} \cdot \frac{\sin qP}{\sin qR} = 1.$$

Zusatz 2. Die Proportion (1) drückt auch aus, wann die drei Punkte p, Q, R der Seiten des Dreiecks Prq in Einem Hauptkreise liegen; die Punkte Q und R befinden sich in den Seiten Pr und Pq selbst und der dritte Punkt p befindet sich in der Verlängerung der dritten Seite rq des genannten Dreiecks, und die Proportion kann auch also gestellt werden:

$$\frac{\sin pq}{\sin pr} \cdot \frac{\sin Qr}{\sin QP} \cdot \frac{\sin Rp}{\sin Rq} = 1.$$

§. 187.

Wenn man von den Scheiteln der drei Winkel eines Dreiecks PQR in Fig. 86 und Fig. 87 Linien nach einem Punkte O zieht, so werden die Winkel des Dreiecks (innerlich oder auch äußerlich) dadurch so getheilt, daß ist

$$1.\quad \frac{\sin PQO}{\sin RQO} = \frac{\sin PRO}{\sin QRO} : \frac{\sin RPO}{\sin QPO},$$

$$2.\quad \frac{\sin POQ}{\sin ROQ} = \frac{\sin PRQ}{\sin QRO} : \frac{\sin RPQ}{\sin QPO},$$

$$3.\quad \frac{\sin PQO}{\sin RQO} : \frac{\sin POQ}{\sin ROQ} = \frac{\sin PRO}{\sin PRQ} : \frac{\sin RPO}{\sin RPQ}.$$

Beweis. Im Dreiecke POQ ist $\frac{\sin PQO}{\sin OPQ} = \frac{\sin PO}{\sin QO}$, im Dreiecke QOR ist $\frac{\sin ORQ}{\sin RQO} = \frac{\sin QO}{\sin RO}$, also ist $\frac{\sin PQO}{\sin QPO} \cdot \frac{\sin QRO}{\sin RQO} = \frac{\sin PO}{\sin RO}$, und da im Dreiecke POR ist $\frac{\sin PRO}{\sin RPO}$

$= \frac{\sin PO}{\sin RO}$, so hat man $\frac{\sin PQO}{\sin QPO} \cdot \frac{\sin QRO}{\sin RQO} = \frac{\sin PRO}{\sin RPO}$

oder $\frac{\sin PQO}{\sin RQO} = \frac{\sin PRO}{\sin QRO} : \frac{\sin RPO}{\sin QPO}$,

und dieses ist die erste Proportion. Ferner ist im Dreiecke POQ ebenso $\frac{\sin PQ}{\sin QO} = \frac{\sin POQ}{\sin QPO}$ und im Dreiecke QOR ist $\frac{\sin QO}{\sin QR}$ $= \frac{\sin QRO}{\sin ROQ}$, also

$$\frac{\sin PQ}{\sin QR} = \frac{\sin POQ}{\sin QPO} \cdot \frac{\sin QRO}{\sin ROQ},$$

und da $\frac{\sin PQ}{\sin RQ} = \frac{\sin PRQ}{\sin RPQ}$ ist, so hat man $\frac{\sin PRQ}{\sin RPQ}$ $= \frac{\sin POQ}{\sin QPO} \cdot \frac{\sin QRO}{\sin ROQ}$ oder auch $\frac{\sin POQ}{\sin ROQ} = \frac{\sin PRQ}{\sin QRO} :$ $\frac{\sin RPQ}{\sin QPO}$, und dieses ist die zweite Proportion; die dritte erhält man, wenn man die erste durch die zweite dividirt.

Zusatz 1. Die erste Proportion kann auch also gestellt werden:

$$\frac{\sin PQq}{\sin RQq} \cdot \frac{\sin QRr}{\sin PRr} \cdot \frac{\sin RPp}{\sin QPp} = 1,$$

und sie drückt aus, wann die Linien Pp, Qq und Rr sich in einem Punkte O schneiden.

Zusatz 2. Die zweite Proportion kann auch also geschrieben werden:

$$\frac{\sin POq}{\sin ROq} \cdot \frac{\sin ORp}{\sin PRp} \cdot \frac{\sin RPr}{\sin OPr} = 1,$$

und sie drückt aus, daß die drei Scheitellinien Oq, Pr und Rp des Dreiecks POR sich in einem Punkte O schneiden.

§. 188.

Lehrsatz. Wenn in Fig. 76 die Linie XY von drei anderen VA, VB, VC, welche sich in V schneiden, geschnitten wird, so ist

1. $\frac{\sin AVB}{\sin AVC} = \frac{\sin AB \cdot \sin B}{\sin AC \cdot \sin C}$,

2. $\frac{\sin BVC}{\sin AVC} = \frac{\sin BC \cdot \sin B}{\sin AC \cdot \sin A}$,

3. $\frac{\sin AVB}{\sin CVB} = \frac{\sin AB \cdot \sin A}{\sin BC \cdot \sin C}$.

Beweis. Da im Dreiecke AVB ist sin AB . sin A sin B = sin AVB . sin VP, wenn VP ein Loth auf XY vorstellt, und im Dreiecke AVC ist sin AC . sin A . sin C = sin AVC sin VP nach §. 124, so erhält man durch Division auf der Stelle

$$\frac{\sin AVB}{\sin AXC} = \frac{\sin AB \;.\; \sin B}{\sin AC \;.\; \sin C},$$

und auf gleiche Art werden die beiden anderen Proportionen bewiesen.

Anmerkung. Da Nebenwinkel gleiche Sinus haben, so ist es gleichgültig, welcher von den vier Winkeln um A verstanden wird, und eine gleiche Bewandtniß hat es mit den übrigen Winkeln B und C.

§. 189.

Lehrsatz. Wenn in Fig. 88 und Fig. 89 drei Punkte A, B, C in Einem Hauptbogen XY liegen und man von zwei anderen Punkten P und Q Linien nach jenen drei Punkten zieht, nämlich PA, PB, PC, QA, QB, QC, so finden die drei folgenden Proportionen Statt:

$$1.\quad \frac{\sin APB}{\sin APC} : \frac{\sin AQB}{\sin AQC} = \frac{\sin PBY}{\sin PCY} : \frac{\sin QBY}{\sin QCY},$$

$$2.\quad \frac{\sin CPB}{\sin CPA} : \frac{\sin CQB}{\sin CQA} = \frac{\sin PBY}{\sin PAY} : \frac{\sin QBY}{\sin QAY},$$

$$3.\quad \frac{\sin APB}{\sin CPB} : \frac{\sin AQB}{\sin CQB} = \frac{\sin PAY}{\sin PCY} : \frac{\sin QAY}{\sin QCY}.$$

Beweis. Da nach §. 188 ist $\frac{\sin APB}{\sin APC} = \frac{\sin AB \,.\, \sin PBY}{\sin AC \,.\, \sin PCY}$ und $\frac{\sin AQB}{\sin AQC} = \frac{\sin AB \,.\, \sin QBY}{\sin AC \,.\, \sin QCY}$ ist, so erhält man, wenn die erste Proportion durch die zweite dividirt wird,

$$\frac{\sin APB}{\sin APC} : \frac{\sin AQB}{\sin AQC} = \frac{\sin PBY}{\sin PCX} : \frac{\sin QBY}{\sin QCY}.$$

Ebenso wird die Richtigkeit der beiden anderen Proportionen bewiesen.

Zusatz 1. Wenn von P und Q aus die Linien PB und QB so gezogen werden, daß die folgende Proportion Statt findet

$$\frac{\sin APB}{\sin CPB} : \frac{\sin AQB}{\sin CQB} = \frac{\sin PAY}{\sin PCY} : \frac{\sin QAY}{\sin QCY},$$

so schneiden sich PB und QB in einem Punkte B, welcher mit den Punkten A und C in Einem Hauptbogen liegt.

Zusatz 2. Wenn in Fig. 90 und Fig. 91 die drei Punkte A, P, Q in Einem Hauptbogen liegen, so ist $\sin OAY = \sin QAY$ und daher hat man nun die drei folgenden Proportionen

1. $$\frac{\sin QCY}{\sin PCY} = \frac{\sin CQB}{\sin BQP} : \frac{\sin CPB}{\sin BPQ} : \frac{\sin QCX}{\sin PCX},$$
und diese Proportion drückt aus, wie der Winkel PCQ (oder sein Nebenwinkel) durch eine Linie XY getheilt werden muß, wenn sie durch den Scheitel B des Dreiecks PBQ gehen soll.

2. $$\frac{\sin QBY}{\sin PBY} = \frac{\sin CQB}{\sin CQP} : \frac{\sin CPB}{\sin CPQ} = \frac{\sin QBX}{\sin PBX},$$
und diese Proportion drückt aus, wie der Winkel PBQ des Dreiecks PQB zu theilen ist, wenn die Theilungs-Linie XY durch den Scheitel C des Dreiecks PQC gehen soll.

3. $$\frac{\sin QPB}{\sin QPC} : \frac{\sin PQB}{\sin PQC} = \frac{\sin PBX}{\sin PCX} : \frac{\sin QBX}{\sin QCX},$$
und diese Proportion drückt aus, wie, wenn eine Linie XY den Winkel PBQ theilt, durch eben diese Linie der Winkel PCQ getheilt werde.

§. 190.

Lehrsatz. Wenn sich die drei Scheitel-Linien Pp, Qq, Rr eines Dreiecks PQR in Fig. 86 und Fig. 87 in Einem Punkte O schneiden, so theilen sie die Gegenseiten der Winkel P, Q, R in den Punkten p, q, r so, daß ist

$$\frac{\sin Pr}{\sin Qr} \cdot \frac{\sin Qp}{\sin Rp} \cdot \frac{\sin Rq}{\sin Pq} = 1.$$

Beweis. Da die Seiten des Dreiecks PQq von Rr geschnitten werden, so ist nach §. 186

$$\frac{\sin Rq}{\sin RP} = \frac{\sin qO}{\sin QO} \cdot \frac{\sin Qr}{\sin Pr},$$

und da die Seiten des Dreiecks qQR von Pp geschnitten werden, so ist nach demselben Satze $\frac{\sin Pq}{\sin RP} = \frac{\sin qO}{\sin QO} \cdot \frac{\sin Qp}{\sin Rp}$, und wird die erste Proportion durch die zweite dividirt, so erhält man $\frac{\sin Rq}{\sin Pq} = \frac{\sin Qr}{\sin Pr} \cdot \frac{\sin Rp}{\sin Qp}$ oder auch

$$\frac{\sin Pr}{\sin Qr} \cdot \frac{\sin Qp}{\sin Rp} \cdot \frac{\sin Rq}{\sin Pq} = 1.$$

Zusatz 1. Wenn umgekehrt diese Proportion befriedigt ist, so schneiden sich die drei Scheitellinien Pp, Qq, Rr in Einem Punkte.

Zusatz 2. Wenn man die Gleichung $\frac{\sin Rq}{\sin RP} = \frac{\sin qO}{\sin QO} \cdot \frac{\sin Qr}{\sin Pr}$ mit cos Pq und ebenso die Gleichung $\frac{\sin Pq}{\sin RP} = \frac{\sin qO}{\sin QO} \cdot \frac{\sin Qp}{\sin Rp}$ mit cos Rq multiplicirt, dann die beiden Gleichungen addirt, so erhält man die folgende Gleichung

$$\frac{\sin QO}{\sin qO} = \frac{\sin Qr}{\sin Pr} \cdot \cos Pq + \frac{\sin Qp}{\sin Rp} \cdot \cos Rq.$$

Anmerkung. Im analogen Falle der Planimetrie hat man die noch einfachere Formel

$$\frac{QO}{qO} = \frac{Qr}{Pr} + \frac{Qp}{Rp},$$

und ihr gemäß kann man durch eine planimetrische Lineal-Construction ein Verhältniß construiren, welches entweder der Summe oder auch dem Unterschiede zweier gegebenen anderen Verhältnisse gleichkommt. Die Addition und Subtraction der Brüche überhaupt ist also einer Lineal-Construction fähig, wie es auch die Multiplication und Division der Verhältnisse ist nach der Formel

$$\frac{pq}{pr} = \frac{qR}{PR} : \frac{rQ}{PQ} \text{ oder } \frac{qR}{PR} = \frac{pq}{pr} \cdot \frac{rQ}{PQ},$$

welche sich auf Fig. 84 und Fig. 85 bezieht, wenn statt der Hauptbogen gerade Linien genommen werden.

§. 191.

Lehrsatz 1. Werden die drei Scheitellinien in Fig. 86 so gezogen, daß Pq = Rq, Rp = Qp und Pr = Qr ist, so schneiden sich also nach dem Zusatze 1 zu §. 190 in Einem Punkte.

Lehrsatz 2. Werden die drei Scheitellinien in Fig. 86 so gezogen, daß die Winkel des Dreiecks PQR dadurch halbirt werden, so schneiden sich die drei Scheitellinien nach §. 187 in Einem Punkte, und nach §. 178 ist nun

$$\frac{\sin Pq}{\sin Rq} = \frac{\sin PQ}{\sin RQ}, \frac{\sin Pr}{\sin Qr} = \frac{\sin PR}{\sin QR} \text{ und}$$

$$\frac{\sin Qp}{\sin Rp} = \frac{\sin QP}{\sin RP}.$$

Das Schneiden dieser Scheitellinien in Einem Punkte wurde auch schon im §. 64 rein geometrisch bewiesen.

Lehrsatz 3. Wenn Pp senkrecht auf QR, Qq senkrecht auf Pr und Rr senkrecht auf PQ ist, so ist cos P = cos Qq . sin PQq

und cos R = cos Qq . sin RQq und also $\frac{\cos P}{\cos R} = \frac{\sin PQq}{\sin RQq}$, ebenso ist $\frac{\cos R}{\cos Q} = \frac{\sin RPp}{\sin QPp}$ unn $\frac{\cos Q}{\cos P} = \frac{\sin QRr}{\sin PRr}$ und also, wenn diese drei Gleichungen multiplicirt werden $\frac{\sin PQq}{\sin RQq} \cdot \frac{\sin RPp}{\sin QPp} \cdot \frac{\sin QRr}{\sin PRr} = 1$, daher schneiden sich die drei Scheitel-Linien nach §. 187 in Einem Punkte, was auch schon im §. 68 rein geometrisch bewiesen wurde.

Da ferner cos PQ = cos Pq . cos Qq und cos RQ = cos Rq . cos Qq ist, so hat man $\frac{\cos PQ}{\cos RQ} = \frac{\cos Pq}{\cos Rq}$, ebenso $\frac{\cos RQ}{\cos PR} = \frac{\cos Qr}{\cos Pr}$ und $\frac{\cos RP}{\cos QP} = \frac{\cos Rp}{\cos Qp}$; werden diese drei Proportionen multiplicirt, so hat man

1. $\frac{\cos Pq}{\cos Rq} \cdot \frac{\cos Rp}{\cos Qp} \cdot \frac{\cos Qr}{\cos Pr} = 1.$

Ferner ist tng Qq = tng P . sin Pq und tng Qq = tng R . sin Rq, also hat man die Proportion $\frac{\text{tng } P}{\text{tng } R} = \frac{\sin Rq}{\sin Pq}$; ebenso ist $\frac{\text{tng } R}{\text{tng } Q} = \frac{\sin Qp}{\sin Rp}$ und $\frac{\text{tng } Q}{\text{tng } P} = \frac{\sin Pr}{\sin Qr}$; werden diese drei Proportionen multiplicirt, so hat man

2. $\frac{\sin Rq}{\sin Pq} \cdot \frac{\sin Qp}{\sin Rp} \cdot \frac{\sin Pr}{\sin Qr} = 1,$

und wird diese Gleichung mit der vorigen multiplicirt, so erhält man

3. $\frac{\text{tng } Rq}{\sin Pq} \cdot \frac{\text{tng } Qp}{\text{tng } Rp} \cdot \frac{\text{tng } Pr}{\text{tng } Qr} = 1.$

Aus der Gleichung (2) folgt ebenfalls, daß sich die drei Perpendikel Pp, Qq, Rr in Einem Punkte schneiden.

§. 192.

Lehrsatz 1. Zieht man von jeder Ecke eines sphärischen Dreiecks einen Hauptbogen so, daß er die Fläche des Dreiecks halbirt, so schneiden sich diese drei Scheitellinien in Einem Punkte.

Beweis. Ist in Fig. 92 das Dreieck ACB durch jeden der drei Hauptbogen CD, AE, BF halbirt worden, so hat man nach §. 132 Zus. 1.

$\sin \frac{1}{2} ADC = \frac{\sin \frac{1}{2} AD \sin \frac{1}{2} CD \sin D}{\cos \frac{1}{2} AC}$ und $\sin \frac{1}{2} BDC$
$= \frac{\sin \frac{1}{2} BD \,.\, \sin \frac{1}{2} CD \sin D}{\cos \frac{1}{2} BC}$;
es ist also wegen der Gleichheit dieser Ausdrücke

$$\frac{\sin \frac{1}{2} AD}{\sin \frac{1}{2} BD} = \frac{\cos \frac{1}{2} AC}{\cos \frac{1}{2} BC},$$ ebenso ist
$$\frac{\sin \frac{1}{2} BE}{\sin \frac{1}{2} CE} = \frac{\cos \frac{1}{2} BA}{\cos \frac{1}{2} CA}$$ und
$$\frac{\sin \frac{1}{2} CF}{\sin \frac{1}{2} AF} = \frac{\cos \frac{1}{2} BC}{\cos \frac{1}{2} AB};$$

durch die Multiplikation dieser drei Proportionen erhält man die Gleichung

1. $\sin \frac{1}{2} AD \,.\, \sin \frac{1}{2} BE \,.\, \sin \frac{1}{2} CF = \sin \frac{1}{2} BD \,.\, \sin \frac{1}{2} CE \,.\, \sin \frac{1}{2} AF.$

Weil ferner die beiden Dreiecke ACE und BCF einen Winkel gemein haben, und gleich groß sind, so ist nach §. 151 Zusatz 5

$\operatorname{tng} \frac{1}{2} CF \,.\, \operatorname{tng} \frac{1}{2} CB = \operatorname{tng} \frac{1}{2} CE \,.\, \operatorname{tng} \frac{1}{2} CA$; in ähnlicher Weise ist $\operatorname{tng} \frac{1}{2} BE \operatorname{tng} \frac{1}{2} BA = \operatorname{tng} \frac{1}{2} BD \operatorname{tng} \frac{1}{2} BC$ und $\operatorname{tng} \frac{1}{2} AD \,.\, \operatorname{tng} \frac{1}{2} AC = \operatorname{tng} \frac{1}{2} AF \,.\, \operatorname{tng} \frac{1}{2} AB$, und durch die Multiplikation dieser drei Gleichungen erhält man

2. $\operatorname{tng} \frac{1}{2} AD \,.\, \operatorname{tng} \frac{1}{2} BE \,.\, \operatorname{tng} \frac{1}{2} CF = \operatorname{tng} \frac{1}{2} BD \,.\, \operatorname{tng} \frac{1}{2} CE \,.\, \operatorname{tng} \frac{1}{2} AE.$

Wird die Gleichung (1) durch (2) dividirt, so entsteht die Gleichung

3. $\cos \frac{1}{2} AD \,.\, \cos \frac{1}{2} BE \,.\, \cos \frac{1}{2} CF = \cos \frac{1}{2} BD \,.\, \cos \frac{1}{2} CE \,.\, \cos \frac{1}{2} AF$; aus den Gleichungen (1) und (3) schließt man aber leicht die Gleichung

4. $\sin AD \,.\, \sin BE \,.\, \sin CF = \sin BD \,.\, \sin CE \,.\, \sin AF$, und die Folge hiervon ist, daß sich die drei Hauptbogen CD, AE und BF in Einem Punkte M schneiden.

Lehrsatz 2. Wenn man die drei Scheitellinien in einem Dreiecke so zieht, daß der Umfang des Dreiecks durch eine jede in zwei gleiche Theile getheilt wird, so schneiden sich die drei Scheitellinien in Einem Punkte.

Beweis. Soll in Fig. 92 AC + CE = AB + BE sein, so hat man AC + CE = AB + BC — CE, oder auch CE = $\frac{1}{2}$ (AB + BC — AC); ebenso findet man AD = $\frac{1}{2}$ (AB + BC — AC und es ist also CE = AD; ebenso ist AF = BE und BD = CF, und es ist also überhaupt

$$\frac{\sin AD}{\sin BD} \cdot \frac{\sin BE}{\sin CE} \cdot \frac{\sin CE}{\sin AF} = 1;$$

daher schneiden sich nach §. 190 die drei Linien CD, AE und BF in Einem Punkte.

§. 193.

Erklärung. Theilt man einen Winkel zweier Hauptkreise so, daß die Sinus seiner beiden Theile ein gegebenes Verhältniß haben, so kann man, da zwei Hauptkreise im Allgemeinen zwei verschiedene Winkel mit einander machen, welche Nebenwinkel sind, beide Nebenwinkel nach dem gegebenen Verhältnisse theilen und der Winkel heißt dann harmonisch getheilt. Die beiden Theilungs-Linien der Winkel machen mit den beiden gegebenen Hauptkreisen ein System von vier Hauptkreisen aus, welche durch denselben Punkt gehen und ein solches System heißt ein System von Harmonikalen, da eine einzige von diesen vier Linien in Bezug auf die harmonische Theilung eine Harmonikale heißt.

Ist in Fig. 93 der Winkel AVB so getheilt durch VC, daß $\frac{\sin AVC}{\sin BVC} = \frac{m}{n}$ ist, und theilt man den Nebenwinkel A'VB durch VD ebenfalls so, daß $\frac{\sin A'VD}{\sin BVD} = \frac{m}{n}$ ist, so machen die vier Linien AVA', VC, VB und VD ein System von Harmonikalen aus, jeder von diesen vier Hauptbogen heißt eine Harmonikale, und man sagt, der Winkel AVB (oder auch A'VB) sei harmonisch durch VC und VD getheilt.

Erhält die Linie VC im Winkel AVB eine andere Neigung gegen die Schenkel des Winkels AVB, so ändert auch VD seine Richtung, denn wird der Winkel AVB anders getheilt, so muß auch sein Nebenwinkel A'VB anders getheilt werden, weil sein soll

$$\frac{\sin AVC}{\sin BVC} = \frac{\sin A'VD}{\sin BVD}.$$

Beschreibt man aus dem Centrum V den Hauptbogen ACBDA', so ist er ein Halbkreis, und A' der Gegenpunkt von A; ferner ist AC das Maaß des Winkels AVC, CB von CVB, AB von AVB, BD von BVD, DA' von DVA', BA' von BVA', daher heißt ein Bogen AB durch die Punkte C und D harmonisch getheilt, wenn der eine Punkt C den Bogen AB und der andere D sein Supplement, oder den Bogen A'B so theilt, daß die Sinus der Theile des einen sich zu einander verhalten, wie die Sinus der Theile des anderen Bogens, also wenn ist

$$\frac{\sin AC}{\sin BC} = \frac{\sin A'D}{\sin BD}.$$

Zusatz 1. Weil $A'VD + AVD = 180^0$ und $A'D + AD = 180^0$ ist, so können die beiden vorigen Proportionen auch also angegeben werden

$$\frac{\sin AVC}{\sin BVC} = \frac{\sin AVD}{\sin BVD} \text{ und}$$
$$\frac{\sin AC}{\sin BC} = \frac{\sin AD}{\sin BD},$$

und wenn man die Nenner in ihnen fortschafft, so hat man die beiden Gleichungen

$$\sin AVC \, . \sin BVD = \sin BVC \, . \sin AVD \text{ und}$$
$$\sin AC \, . \sin BD = \sin BC \, . \sin AD.$$

Zusatz 2. Ist der Winkel AVB harmonisch durch VC und VD getheilt, so ist auch umgekehrt der Winkel DVC harmonisch getheilt durch VB und VA; ist ferner der Bogen AB harmonisch getheilt durch C und D, so ist auch umgekehrt der Bogen DC harmonisch getheilt durch B und A, denn es ist auch $\frac{\sin CVB}{\sin CVB} = \frac{\sin DVA}{\sin CVA}$ und $\frac{\sin DB}{\sin CB} = \frac{\sin DC}{\sin CA}$.

Zusatz 3. Von den beiden Linien VC und VD, wodurch der Winkel AVB getheilt wird, heißt VC die innere und VD die äußere Theilungslinie, weil sich VC im Inneren des Winkels AVB und VD im Inneren seines Nebenwinkels A′VD und also außerhalb des Winkels AVB befindet. Für den Winkel DVC ist VB die innere und VA die äußere Theilungslinie. Ebenso heißt von den Punkten C und D, welche den Bogen AB harmonisch theilen, der Punkt C der innere und der Punkt D der äußere Theilpunkt, weil sich der Punkt C im Bogen AB selbst, und der Punkt D im Supplemente von AB, nämlich im Bogen BA′ und also außerhalb AB befindet.

Zusatz 4. So wie man VA, VC, VB, VD ein System von Harmonikalen nennt, so wird man auch die vier Punkte A, C, B, D des Hauptbogens AA′ ein System von vier harmonischen Theilpunkten nennen.

Anmerkung. Um auszudrücken, daß der Bogen AB harmonisch durch C und D, oder der Bogen CD harmonisch durch B und A getheilt sei, werden wir der Kürze wegen alle vier Theilpunkte A, B, C, D der getheilten Linie hintereinander nennen, wir werden schreiben und sagen, die Linie ACBD sei harmonisch getheilt, und es ist dann gleichgültig, ob man verstehe, daß AB durch C und D oder daß CD durch B und A harmonisch getheilt sei.

§. 194.

Lehrsatz. Ist in Fig. 94 die Linie ABCD harmonisch getheilt, so ist das Product aus den Sinus der beiden äußeren Stücke, wenn jedes um das mittlere Stück vermehrt wird, gleich dem doppelten Producte der Sinus der beiden äußeren Stücke

oder auch gleich dem doppelten Producte aus dem Sinus der ganzen Linie und dem Sinus ihres mittleren Stückes.

Beweis. Da ABCD harmonisch getheilt ist, so ist sin AB . sin CD = sin BC . sin AD (nach §. 193); nun ist aber nach §. 182 sin AC . sin BD = sin AB . sin CD + sin BC . sin AD, also hat man auch sin AC . sin BD = 2. sin AB . sin CD und auch sin AC . sin BD = 2 sin BC . sin AD.

Zusatz. Wenn sin AC . sin BD = 2. sin AB sin CD oder sin AC . sin BD = 2. sin BC . sin AD ist, so ist ABCD harmonisch getheilt.

§. 195.

Lehrsatz. Nimmt man in einer harmonisch getheilten Linie ABCD willkührlich einen fünften Punkt X an, so ist

1) 2. (tng XA . tng XC + tng XB . tng XD)
  = (tng XA + tng XC) (tng XB + tng XD) und
2) 2. (cot XA . cot XC + cot XB . cot XD)
  = (cot XA + cot XC) (cot XB + cot XD).

Beweis. Da sin AB . sin CD = sin BC. sin AD und also sin (XB — XA) . sin (XD — XC) = sin (XC — XB) . sin (XD — XA) ist, so hat man, wenn man auf beiden Seiten durch cos XA . cos XB . cos XC . cos XD dividirt, auf der Stelle

(tng XB — tng XA) (tng XD — tng XC)
= (tng XC — tng XB) (tng XD — tng ZA);

wenn man aber auf beiden Seiten durch sin XA . sin XB . sin XC sin XD dividirt, so erhält man

(cot XA — cot XB) (cot XC — cot XD)
= (cot XB — cot XC) (cot XA — cot XD);

aus diesen beiden Gleichungen gehen die beiden gesuchten Formeln hervor, wenn man die Klammern auflöset und gehörig reducirt.

Zusatz 1. Wird der Punkt X der Reihe nach mit A, B, C, D identificirt, so erhält man die vier folgenden Formeln:

1. cot AC = $\frac{1}{2}$ (cot AB + cot AD),
2. cot BD = $\frac{1}{2}$ (cot BC — cot AB),
3. cot CA = $\frac{1}{2}$ (cot BC — cot CD),
4. cot BD = $\frac{1}{2}$ (cot AD + cot CD),

und auch durch eine jede von diesen vier Gleichungen ist die harmonische Theilung von ABCD ausgedrückt.

Zusatz 2. In einer harmonisch getheilten Linie ist das mittlere Stück BC so groß, als ein äußeres Stück, wenn es mit dem andern äußeren Stücke einen Quadranten ausmacht.

Denn wenn BD = 90°, also cot BD = o ist, so ist nach der Formel 2 im Zusatze 1 auf der Stelle cot BC = cot AB oder BC = AB, und wenn cot CA = o ist, so folgt aus der Formel 3 ebenso, daß BC = CD sei.

Zusatz 3. Wenn in einer harmonisch getheilten Linie das mittlere Stück mit einem äußeren Stücke 90° ausmacht, so ist das mittlere Stück dem anderen äußeren Stücke gleich.

§. 196.

Lehrsatz. Wenn die Linie ABCD in Fig. 95 harmonisch getheilt ist und der Punkt m das aus einem äußeren Stücke AB und dem mittleren BC zusammengesetzte Stück AC halbirt, so ist

$$\text{tng } mC^2 = \text{tng } mA^2 = \text{tng } mB \,.\, \text{tng } mD.$$

Beweis. Da nach §. 195, wenn der Punkt m auch die Linie AC nicht halbirt, ist

$$2\,(\text{tng } mB \text{ tng } mD - \text{tng } mA \text{ tng } mC)$$
$$= (\text{tng } mB + \text{tng } mD)\,(\text{tng } mC - \text{tng } mA),$$

so ist jetzt tng m C = tng m A und also tng m B tng m D — tng m A . tng m C = o oder auch $\text{tng } mC^2 = \text{tng } mB \,.\, \text{tng } mD$.

Zusatz. Wenn $\text{tng } mC^2 = \text{tng } mB \,.\, \text{tng } mD$ ist, und man m A = m C macht, so hat der dadurch bestimmte Punkt A eine solche Lage, daß ABCD harmonisch getheilt ist.

§. 197.

Lehrsatz. Wenn ABCD in Fig. 95 harmonisch getheilt, und m die Mitte von AC ist, so ist

$$\frac{\sin 2 \,.\, mB}{\sin 2 \,.\, mD} = \left(\frac{\sin CB}{\sin CD}\right)^2 = \left(\frac{\sin AB}{\sin AD}\right)^2.$$

Beweis. Da

$$\frac{\sin CB}{\sin CD} = \frac{\sin (mC - mB)}{\sin (mD - mC)} \text{ und}$$

$$\frac{\sin AB}{\sin AD} = \frac{\sin (mA + mB)}{\sin (mA + mD)} = \frac{\sin (mC + mB)}{\sin (mD + mC)} \text{ ist, so ist}$$

$$\frac{\sin CB}{\sin CD} \cdot \frac{\sin AB}{\sin AD} = \frac{\sin (mC - mB) \,.\, \sin (mC + mB)}{\sin (mD - mC) \,.\, \sin (mD + mC)}$$

oder auch, weil $\frac{\sin CB}{\sin CD} = \frac{\sin AB}{\sin AD}$ ist,

$$\left(\frac{\sin CB}{\sin CD}\right)^2 = \frac{\cos mB^2}{\cos mD^2} \cdot \frac{(\text{tng} mC - \text{tng} mB)\,(\text{tng} mC + \text{tng} mB)}{(\text{tng} mD - \text{tng} mC)\,(\text{tng} mD + \text{tng} mC)},$$

und also $$\left(\frac{\sin CB}{\sin CD}\right)^2 = \frac{\cos mB^2}{\cos mD^2} \cdot \frac{\text{tng} mC^2 - \text{tng} mB^2}{\text{tng} mD^2 - \text{tng} mC^2}.$$

Da aber $\text{tng}\ mC^2 = \text{tng}\ mB \cdot \text{tng}\ mD$ ist, so erhält man, wenn dieser Werth substituirt wird,

$$\frac{\sin CB^2}{\sin CD^2} = \frac{\cos mB^2 \cdot \text{tng}\, mB}{\cos mD^2 \cdot \text{tng}\, mD} = \frac{2 \sin mB \cdot \cos mB}{2 \sin mD \cdot \cos mD} \text{ und}$$

$$\text{also } \left(\frac{\sin CB}{\sin CD}\right)^2 = \left(\frac{\sin AB}{\sin AD}\right)^2 = \frac{\sin 2 \cdot mB}{\sin 2 \cdot mD}.$$

Zusatz 1. Wenn umgekehrt $\left(\frac{\sin CB}{\sin CD}\right)^2 = \frac{\sin 2 \cdot mB}{\sin 2 \cdot mD}$ ist, und man macht $mA = mC$, so ist ABCD harmonisch getheilt.

Zusatz 2. Wenn $\left(\frac{\sin AB}{\sin AD}\right)^2 = \frac{\sin 2 \cdot mB}{\sin 2 \cdot mD}$ ist, und man macht $mC = mA$, so ist ABCD harmonisch getheilt.

§. 198.

Lehrsatz. Wenn vier Linien einen Punkt mit den vier Theilpunkten einer harmonisch getheilten Linie verbinden, so sind sie ein System von Harmonikalen.

Beweis. Ist in Fig. 78 ABCD harmonisch getheilt, und gehen von einem Punkte V aus nach den Punkten A, B, C, D die Linien VA, VB, VC, VD, so ist nach §. 180

$$\frac{\sin AB \cdot \sin CD}{\sin BC \cdot \sin AD} = \frac{\sin \alpha\beta \cdot \sin \gamma\delta}{\sin \beta\gamma \cdot \sin \alpha\delta},$$

und weil nach der Annahme $\sin AB \cdot \sin CD = \sin BC \cdot \sin AD$ ist, so ist auch $\sin \alpha\beta \cdot \sin \gamma\delta = \sin \beta\gamma \cdot \sin \alpha\delta$.

Zusatz 1. Wenn VA, VB, VC, VD ein System von Harmonikalen ausmachen und eine Linie in A, B, C, D schneiden, so ist ABCD harmonisch getheilt.

Zusatz 2. Wenn von einem Punkte V aus nach den Theilpunkten A, B, C, D einer harmonisch getheilten Linie die Linien VA, VB, VC, VD gehen und eine andere Linie in a, b, c, d schneiden, so ist auch abcd harmonisch getheilt.

Zusatz 3. Wenn zwei Linien harmonisch getheilt sind, so sind sie ähnlich getheilt.

§. 199.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreiecke drei Scheitellinien zieht, welche sich in Einem Punkte schneiden, und man durch die Theilpunkte zweier Seiten eine Linie zieht, so schneidet sie die dritte Seite des Dreiecks in einem Punkte so, daß sie dadurch harmonisch getheilt wird.

Beweis. In Fig. 96 α und 96 β sei ABC das Dreieck und die drei Scheitellinien AF, BD und CE mögen sich in M

schneiden; wird dann DF gezogen, wovon AB in G getroffen wird, so ist zu beweisen, daß AEBG harmonisch getheilt sei.

Weil sich die drei Scheitellinien in Einem Punkte schneiden, so ist $\frac{\sin AE}{\sin EB} \cdot \frac{\sin BF}{\sin CE} \cdot \frac{\sin CD}{\sin AD} = 1$, nach §. 190; weil ferner $\frac{\sin GB}{\sin GA} = \frac{\sin BF}{\sin CF} \cdot \frac{\sin CD}{\sin AD}$ ist nach §. 186, so hat man einfacher $\frac{\sin AE}{\sin EB} \cdot \frac{\sin GB}{\sin GA} = 1$ oder $\sin AF \cdot \sin GB = \sin EB \cdot \sin GA$, und es ist also AEBG harmonisch getheilt.

Zusatz 1. Wenn AEBG harmonisch getheilt ist und man zieht von G aus eine Linie, wovon die Seiten AC und BC des Dreiecks ABC in D und F geschnitten werden, so schneiden sich die drei Scheitellinien BD, AF und CE in Einem Punkte M.

Zusatz 2. Wird noch die Linie CG gezogen, so machen CA, CE, CB und CG ein System von vier Harmonikalen aus, nach §. 198.

Zusatz 3. Zieht man von einem Punkte G aus zwei Linien, wovon zwei andere CA und CB in A, D, B, F geschnitten werden und zieht man nach dem Durchschnittspunkte M der Diagonalen des Vierecks ADFB die Linie CM und noch CG und GvMw, so sind die Linien AEBG, wMvG, DeFG harmonisch getheilt, und es machen die vier Linien CA, CE, CB, CG überhaupt ein System von Harmonikalen aus.

Zusatz 4. Zieht man in Fig. 97 von einem Punkte p aus mehre Linien pA′, pB′, pC′, pD ꝛc., wovon zwei andere VX und VY geschnitten werden, so befinden sich die Durchschnittspunkte der Diagonalen in den Vierecken ABB′A′, BCC′B′, ACC′A, CDD′C′, BDD′B′, ADD′A′, u. s. w. sämmtlich in Einem Hauptbogen VQ, welcher durch den Durchschnittspunkt V der beiden Linien VX und VY geht.

Wenn man ferner VP durch p zieht, so machen die vier Linien VX, VQ, VY und VP ein System von Harmonikalen aus.

Anmerkung. Der Punkt p heißt auch wohl der Pol und die Linie VQ die ihm im Bezug auf die Linien VX und VY zukommende Polare.

§. 200.

Aufgabe 1. Man soll eine Linie AB, die schon innerlich in einem Punkte E getheilt ist, auch äußerlich so theilen, daß sie in den beiden Punkten harmonisch getheilt sei.

Auflösung. Man construire über AB in Fig. 96 ein willkührliches Dreieck ACB und ziehe CE; von A und B ziehe man zwei Scheitellinien AF und BD, welche sich auf CE schneiden, durch D und F ziehe man DF, wovon AEB in G geschnitten werde, und es ist dann AEBG harmonisch getheilt, also G der gesuchte äußere harmonische Theilpunkt von AB.

Aufgabe 2. Man soll eine Linie AB, welche schon äußerlich durch einen Punkt G getheilt ist, noch durch einen inneren Theilpunkt harmonisch theilen.

Auflösung. Man construire über AB das beliebige Dreieck ABC, und ziehe von G aus eine Linie, wovon die Seiten CA und CB in D und F geschnitten werden; werden dann noch BD und AF gezogen, welche sich in M schneiden, und dann noch CM, wovon AB in E getroffen wird, so ist E der gesuchte innere Theilpunkt, und AEBG harmonisch getheilt.

Aufgabe 3. Man soll einen Winkel ACB, welcher schon innerlich durch CE getheilt ist, auch noch äußerlich harmonisch theilen.

Auflösung. Man ziehe von zwei beliebigen Punkten im Schenkel CA durch einen Punkt M in CE die Linien AMF und DMB und noch DF und AB, welche sich in G schneiden; die Linie CG ist dann die gesuchte vierte Harmonikale.

Aufgabe 4. Man soll einen Winkel ACB, welcher schon äußerlich durch CG getheilt ist, auch noch innerlich harmonisch theilen.

Auflösung. In der Theillinie CG wähle man beliebig einen Punkt G, ziehe von ihm aus zwei Linien, wovon die Schenkel des Winkels ACB in A, D, F, B geschnitten werden, im Vierecke ADFB ziehe man die Diagonalen AF und BD, welche sich in M schneiden, die Linie CM ist dann die gesuchte vierte Harmonikale.

Anmerkung. Wenn man jeden Durchschnittspunkt von zwei Seiten eines Vierecks eine Ecke des Vierecks nennt, so hat ein Viereck sechs Ecken und wenn man diejenigen Verbindungslinien der Ecken, welche keine Seiten sind, Diagonalen nennt, so hat ein Viereck drei Diagonalen, und das Viereck selbst heißt bei dieser Ansicht desselben ein vollständiges Viereck. In Fig. 96 α und 96 β ist also ABFDGC ein vollständiges Viereck; AF, BD und CG sind seine drei Diagonalen.

§. 201.

Lehrsatz. Die drei Diagonalen eines vollständigen Vierecks theilen einander harmonisch.

Beweis. In Fig. 98 sei ABEFCD das vollständige Viereck; AOEG, BOFH und DGCH seien seine drei Diagonalen (der

Richtung, nicht der Größe nach); man ziehe noch DPOR und CSOQ, so sind nach §. 199 nicht nur diese beiden Linien, sondern auch CFRA, CEPB, DBQA und DESF harmonisch getheilt; daher machen aber DA, DR, DF und DC ein System von Harmonikalen aus, und weil die Diagonale AG davon in A, O, E, G geschnitten wird, so ist nach §. 198 AOEG harmonisch getheilt; weil von demselben Systeme von Harmonikalen die Diagonale BH in B, O, F, H geschnitten wird, so ist auch BOFH harmonisch getheilt. Weil ferner AQBD harmonisch getheilt ist, so machen auch OA, OQ, OB und OD ein System von Harmonikalen aus, und da DH davon in G, C, H, D geschnitten wird, so ist auch HCGD harmonisch getheilt.

§. 202.

Lehrsatz. Wenn man in Fig. 99 *α* und Fig. 99 *β* die drei Scheitellinien AF, BD und CE zieht, welche sich in Einem Punkte schneiden, und dann jede innerlich getheilte Seite noch einmal äußerlich, hingegen eine jede äußerlich getheilte Seite noch einmal innerlich harmonisch theilt, so liegen die drei dadurch bestimmten Punkte jedesmal in Einem Hauptkreise.

Beweis. Da sich nach der Annahme die drei Linien AF, BD und CE in Einem Punkte schneiden, so ist nach §. 190 $\frac{\sin AE}{\sin BE} \cdot \frac{\sin BF}{\sin CF} \cdot \frac{\sin CD}{\sin AD} = 1$; weil ferner AEBc, CDAb und CFBa harmonisch getheilt sind, so ist $\frac{\sin AE}{\sin BE} = \frac{\sin Ac}{\sin Bc}$, $\frac{\sin BF}{\sin CF} = \frac{\sin Ba}{\sin Ca}$, $\frac{\sin CD}{\sin AD} = \frac{\sin Cb}{\sin Ab}$, werden diese Werthe benutzt, so hat man

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc} \cdot \frac{\sin Ba}{\sin Ca} \cdot \frac{\sin Cb}{\sin Ab} = 1,$$

und nach §. 186 befinden sich also die drei Punkte a, b, c in Einem Hauptbogen.

§. 203.

Lehrsatz. Wenn sich Fig. 99 *α* und Fig. 99 *β* die drei Scheitellinien AF, BD, AC des Dreiecks ABC in Einem Punkte O schneiden und man die Fußpunkte derselben durch Hauptbogen verbindet, so schneiden sie die Seiten des Dreiecks ABC in drei Punkten a, b, c, welche in Einem Hauptkreise liegen.

Beweis. Wenn BC von DE in a, AC von EF in b, und AB von DF in c geschnitten wird, so sind nach §. 199 die drei Linien bADC, aBFC und cBEA harmonisch getheilt, und also liegen nach §. 202 die Punkte a, b, c in Einem Hauptbogen.

Zusatz. Die Seiten des Dreiecks DEF werden von den Scheitellinien AF, BD und CE in den Punkten α, β, γ geschnitten und bestimmen ein Dreieck $\alpha\beta\gamma$; da nun aber nach §. 199 bEβF harmonisch getheilt ist, und auch nach §. 199 $\alpha\gamma$ die Seite EβF in einem vierten Punkte so schneidet, daß die harmonische Theilung Statt findet, so geht $\alpha\gamma$ verlängert durch den Punkt b; aus gleichem Grunde geht $\beta\gamma$ durch den Punkt a und $\alpha\beta$ durch Punkt c. Daher hat es eine gleiche Bewandtniß mit dem Dreiecke ABC in Beziehung auf das Dreieck DEF, wie mit dem Dreiecke DEF in Beziehung auf das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ und die Zahl dieser also auf einander folgender Dreiecke kann ins Unendliche fortgesetzt werden, von jedem solchen Dreiecke geht immer eine Seite durch den Punkt a, eine zweite durch b und die dritte durch den Punkt c; zahllose Linienpaare schneiden sich also in den Punkten a, b, c.

§. 204.

Aufgabe. Wenn sich die drei Scheitellinien eines Dreiecks ABC in Fig. 99 α und Fig. 99 β in Einem Punkte schneiden, so bestimmen die Fußpunkte derselben ein zweites Dreieck DEF, und man soll die Verhältnisse der Theile der Winkel des Dreiecks DEF bestimmen, in welche sie durch die genannten Scheitellinien getheilt werden.

Auflösung. Da bADC harmonisch getheilt ist, so machen die vier Linien Eb, EA, ED, EC nach §. 198 ein System von Harmonikalen aus und es ist also

$$\sin bEA \,.\, \sin DEC = \sin AED \,.\, \sin bEC.$$

Da aber bEA = BEF und bEC + CEF = 180°, so hat man auch sin BEF . sin DEC = sin AED sin CEF, und also

$$\frac{\sin DEC}{\sin FEC} = \frac{\sin AED}{\sin BEF}.$$

Zusatz. Stehen CE, AF und BD auf den Seiten des Dreiecks ABC senkrecht, so ist sin AED = cos DEO und sin BEF = cos FEO, also hat man

$$\frac{\sin DEO}{\sin FEO} = \frac{\cos DEO}{\cos FEO},$$

und es ist also tng DEO = tng FEO oder DEO = FEO; also halbirt nun EC den Winkel DEF; aus gleichem Grunde halbirt aber auch AF den Winkel DFE und BD den Winkel EDF; daher ist nun O der Punkt, welcher von den Seiten des Dreiecks DEF gleichen Abstand hat, was im §. 68 rein geometrisch bewiesen worden ist.

§. 205.

Lehrsatz. Wenn man durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines Vierecks Hauptbogen zieht nach den Durchschnitts-Punkten seiner Gegenseiten, so schneiden sie die Gegenseiten des Vierecks in vier Punkten, welche ein neues Viereck bilden, und die Gegenseiten dieses Vierecks gehen durch die Punkte, in welchen die dritte Diagonale des ersten Vierecks von den beiden anderen Diagonalen geschnitten wird.

Beweis. In Fig. 98 sei ABEF das erste und PQRS das zweite Viereck, dann ist $\frac{\sin HC}{\sin HD} = \frac{\sin CF}{\sin AF} : \frac{\sin DB}{\sin AB}$ nach §. 186; weil aber ARFC und AQBD harmonisch getheilt sind, so ist nach §. 194 $\sin AF \,.\, \sin CR = 2 \sin AR \sin FC$ und $\sin AB \,.\, \sin QD = 2 \sin AQ \,.\, \sin BD$, also $\frac{\sin CF}{\sin AF} = \frac{\sin CR}{2 \sin AR}$, und $\frac{\sin DB}{\sin AB} = \frac{\sin QD}{2 \sin AQ}$; werden diese Verhältnisse benutzt, so ist

$$\frac{\sin HC}{\sin HD} = \frac{\sin CR}{\sin AR} : \frac{\sin QD}{\sin AQ},$$

daher geht nach §. 186 die Linie QR durch den Punkt H; auf ähnliche Art wird bewiesen, daß auch PS durch H geht; von den Seiten RS und QP beweiset man ebenfalls so, daß sie beide durch G gehen. Daher ist GH die dritte Diagonale des Vierecks PQRS.

Zusatz. Die Seiten des Vierecks PQSR werden von den Diagonalen BF und AE in den Punkten α, β, γ, δ geschnitten, diese bestimmen ein drittes Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$, und es kann auf ähnliche Art, wie vorhin, bewiesen werden, daß wieder CD die dritte Diagonale des Vierecks $\alpha\beta\gamma\delta$ ist, und so fortfahrend, kann man unzählige, immer kleiner werdende, Vierecke nachweisen, deren Diagonalen sich sämmtlich im Punkte O schneiden, und deren dritte Diagonale abwechselnd bald CD, bald GH ist; daher schneiden sich in den Punkten D, G, C, H unzählige Seitenpaare dieser Vierecke.

§. 206.

Lehrsatz. Wenn man in Fig. 100 die drei Diagonalen AE, BF und CD des vollständigen Vierecks AFEBDC durch die Punkte p, q, r halbirt, darauf ein zweites Dreieck H′O′G′ construirt, dessen Seiten doppelt so groß sind, als die Seiten des Dreiecks HOG, welches die drei Diagonalen einschließen, und in den Verlängerungen der Seiten des neuen Dreiecks die Punkte p′, q′, r′ so bestimmt werden, daß $p'O' = 2 \,.\, pO$, $q'O' = 2 \,.\, qO$ und

$r'G' = 2 \, . \, rG$ ist, so liegen die drei Punkte p', q', r' in Einem Hauptbogen.

Beweis. Da die Punkte A, B, D der Seiten des Dreiecks HOG in Einem Hauptkreise liegen, so ist nach §. 186 $\frac{\sin AO}{\sin AG} \cdot \frac{\sin DG}{\sin DH} \cdot \frac{\sin BH}{\sin BO} = 1$ und da p die Mitte von AE, ferner AOEG harmonisch getheilt ist, so ist $\frac{\sin AO^2}{\sin AG^2} = \frac{\sin 2.\, pO}{\sin 2.\, pG}$ nach §. 197; ferner ist $\frac{\sin DG^2}{\sin DH^2} = \frac{\sin 2.\, rG}{\sin 2.\, rH}$ und $\frac{\sin BH^2}{\sin BO^2} = \frac{\sin 2.\, qH}{\sin 2.\, qO}$, also $\frac{\sin 2.\, pO}{\sin 2.\, pG} \cdot \frac{\sin 2.\, rG}{\sin 2.\, rH} \cdot \frac{\sin 2.\, qH}{\sin 2.\, qO}$
$= \left(\frac{\sin AO \,.\, \sin DG \,.\, \sin BH}{\sin AG \,.\, \sin DH \,.\, \sin BO}\right)^2$ oder auch
$= \frac{\sin 2.\, pO \,.\, \sin 2.\, rG \,.\, \sin 2.\, qH}{\sin 2.\, pG \,.\, \sin 2.\, rH \,.\, \sin 2.\, qO} = 1$; da nun aber $2.\, pO = p'O'$; $2.\, rG = r'G'$; $2.\, qH = q'H'$; $2.\, pG = p'G'$; $2.\, rH = r'H'$ und $2.\, qO = q'O'$ ist, so hat man $\frac{\sin p'O'}{\sin p'G'} \cdot \frac{\sin r'G'}{\sin r'C'} \cdot \frac{\sin q'H'}{\sin q'O'} = 1$, und also liegen nach §. 186 die Punkte p', q', r' in Einem Hauptkreise.

Anmerkung. Im analogen Falle der Planimetrie befinden sich die Punkte p, q, r selbst in Einer geraden Linie.

§. 207.

Erklärung. Wenn man jede Seite einer Figur durch einen Punkt (innerlich oder auch äußerlich) so theilt, so daß das Product der Sinus der ersten Abschnitte, auf welche man beim Fortgange im Umfange der Figur stößt, gleich ist dem Producte der Sinus der zweiten Abschnitte, so heiße die Figur eine Proportional-Figur, weil die genannte Haupteigenschaft einer sochen Figur durch eine Proportion ausgedrückt werden kann. Die Theilpunkte der Seiten mögen die Proportional-Punkte heißen. In jeder Seite oder in ihrer Verlängerung befindet sich also ein Proportional-Punkt, und wenn einige Proportional-Punkte sich in den Verlängerungen der Seiten befinden, so ist die Anzahl dieser Punkte immer eine gerade Zahl. Die Anzahl aller Proportional-Punkte stimmt offenbar mit der Menge der Seiten der Figur überein.

Zusatz 1. Fällt man in einem Dreiecke auf die Gegenseiten Scheitellinien, welche sich in Einem Punkte schneiden, so

ist das Dreieck ein Proportional-Dreieck und die Fußpunkte der drei Scheitellinien sind die drei Proportional-Punkte. Der Durchschnitts-Punkt der drei Scheitellinien mag der Proportional-Mittelpunkt des Dreiecks heißen.

Zusatz 2. Viel wichtiger, als bei den Dreiecken, ist der Begriff einer Proportional-Figur in seiner Anwendung auf das Viereck. Sind in Fig. 101 in den Seiten des Vierecks ABCD die vier Punkte E, F, G, H so angenommen, daß ist:

$$\frac{\sin AF}{\sin BF} \cdot \frac{\sin BG}{\sin CG} \cdot \frac{\sin CH}{\sin DH} \cdot \frac{\sin DE}{\sin AE} = 1,$$

so heißt ABCD ein Proportional-Viereck, und die Punkte E, F, G, H, wovon sich in jeder Seite des Vierecks eine befindet, sind die Proportial-Punkte des Vierecks.

Die Figur ist so bezeichnet, daß sich die Proportional-Punkte in den Seiten selbst befinden; es können aber zwei Proportional-Punkte, und auch alle vier sich in den Verlängerungen der Seiten befinden, nie aber einer allein, und auch nie drei derselben.

Der Bogen EG, welcher die Proportial-Punkte zweier Gegenseiten AD und BC verbindet, heiße eine Proportional-Mediale, oder auch schlechtweg eine Mediale des Vierecks; der Bogen FH, welcher die Proportional-Punkte der beiden anderen Gegenseiten verbindet, ist die andere Mediale des Vierecks; der Durchschnittspunkt O der beiden Medialen heiße der Proportional-Mittelpunkt, oder auch schlecht weg, der Mittelpunkt des Vierecks.

Anmerkung. Wenn ABCD ein Parallelogramm ist, und seine Seiten durch die Punkte E, F, G, H halbirt werden, so sind EG und FH die Mittelbogen der beiden Paare von Gegenkreisen, zwischen welchen das Parallelogramm enthalten ist, ihr Durchschnittspunkt O ist dann auch der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen des Parallelogrammes, und also überhaupt der Mittelpunkt des Parallelogrammes.

Ist aber ABCD kein Parallelogramm, oder sind E, F, G, H nicht die Mitten der Seiten des Vierecks, so kann die ähnliche Benennung für die Bogen EG und FH und für den Punkt O gleich wohl beibehalten werden, da kein Mißverständniß zu befürchten ist, obgleich die Form des Vierecks und die Lage der vier Punkte E, F, G, H in seinen Seiten nun einen hohen Grad von Unbestimmtheit hat. Die einzige Einschränkung in der Lage der vier Punkte E, F, G, H findet Statt durch die Gleichung

$$\frac{\sin AF}{\sin BF} \cdot \frac{\sin BG}{\sin CG} \cdot \frac{\sin CH}{\sin DH} \cdot \frac{\sin DE}{\sin AE} = 1,$$

und ihr kann man offenbar auf unzählig verschiedene Arten Genüge leisten.

§. 208.

Lehrsatz. Wenn in Fig. 102 ADC und ABC zwei Proportional-Dreiecke sind, welche eine Seite AC und in ihr einen Proportional-Punkt R gemein haben, so machen die beiden Dreiecke ein Proportional-Viereck aus, und die Proportional-Punkte der Dreiecke sind mit Weglassung des gemeinschaftlichen Proportional-Punktes auch die Proportional-Punkte des Vierecks, die beiden Dreiecke mögen sich auf derselben Seite von AC oder auf entgegengesetzten Seiten von AC dieser Linie befinden.

Beweis. Da nach der Annahme ADC und ABC Pr. Dreiecke sind, so ist

$$\frac{\sin AR}{\sin CR} \cdot \frac{\sin CH}{\sin DH} \cdot \frac{\sin DE}{\sin AE} = 1 \text{ und}$$

$$\frac{\sin AR}{\sin CR} \cdot \frac{\sin CG}{\sin BG} \cdot \frac{\sin BF}{\sin AF} = 1,$$

wird die erste Gleichung durch die zweite dividirt, so hat man auf der Stelle

$$\frac{\sin AF}{\sin BF} \cdot \frac{\sin BG}{\sin CG} \cdot \frac{\sin CH}{\sin DH} \cdot \frac{\sin DE}{\sin AE} = 1,$$

und es sind also E, F, G, H die P. Punkte des Vierecks ABCD.

Zusatz 1. Hiernach kann man zu drei gegebenen P. Punkten eines Vierecks leicht den vierten P. Punkt durch einfache Construction finden.

Zusatz 2. Wenn umgekehrt ABCD ein P. Viereck und E, F, G, H seine P. Punkte sind, so kann es durch jede Diagonale in zwei P. Dreiecke getheilt werden, welche den P. Punkt in der Diagonale gemein haben.

Zieht man also die Scheitellinien AH, CE und durch ihren Durchschnittspunkt P die dritte CP; ferner die Scheitellinien CF und AG und durch ihren Durchschnittspunkt die dritte BQ, so schneiden diese dritten Scheitellinien CP und BQ die Diagonale AC in demselben Punkte R.

Wenn man ebenso das Viereck ABCD durch die Diagonale BD theilt, die Scheitellinien DF und BE und durch ihren Durchschnittspunkt die dritte Scheitellinie AS zieht; ferner die Scheitellinien BH und DG und durch ihren Durchschnittspunkt die dritte Scheitellinie CS zieht, so schneiden sich AS und CS auf der Diagonale BD in Einem

Punkte S, welcher der gemeinschaftliche P. Punkt der Dreiecke BAD und BCD ist.

Anmerkung. Folgende Abkürzung mag erlaubt sein: P. Punkt für Proportional-Punkt; P. Viereck für Proportional-Viereck; P. M. Punkt für Proportional-Mittel-Punkt, ꝛc.

§. 209.

Lehrsatz. Die vier P. Punkte eines Vierecks bestimmen ein zweites Viereck, dessen Gegenseiten sich auf den Diagonalen des ersten Vierecks schneiden

Beweis. Sind in Fig. 102 E, F, G, H die P. Punkte des Vierecks EFGH, so theile man es nach §. 208 zunächst in die beiden P. Dreiecke ADC und ABC, deren gemeinschaftliche P. Punkt R sein mag.

Die Linie FH schneidet nun nach §. 199 die Seite AC in einem Punkte x so, daß xARC harmonisch getheilt ist, aus demselben Grunde schneidet die Linie FG die Seite AC des Dreiecks ABC in einem Punkte y so, daß yARC harmonisch getheilt ist, weil aber die Linien xARC und yARC harmonisch getheilt sind, und drei Theilpunkte gemein haben, so ist der Punkt x mit y derselbe. Daher schneiden sich die Seiten FG und EH des Vierecks EFGH auf der Diagonale AC.

Aus gleichem Grunde schneiden sich aber die beiden anderen Gegenseiten EF und GH des Vierecks EFGH auf der Diagonale BD in einem Punkte z so, daß zBSD harmonisch getheilt ist, wenn wieder unter S der gemeinschaftliche P. Punkt der beiden Dreiecke DAB und DCB verstanden wird.

§. 210.

Lehrsatz. Theilt man ein Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke und zieht man von einem beliebigen Punkte der Diagonale aus zwei Hauptbogen, wovon der eine die beiden übrigen Seiten des einen und der andere die beiden übrigen Seiten des andern Dreiecks schneidet, so sind die vier genannten Durchschnitts-Punkte ein System von vier Proportial-Punkten des Vierecks.

Beweis. Zieht man von einem Punkte X der Diagonale AC, welcher entweder zwischen A und C oder in der Verlängerung von AC enthalten ist, zwei Hauptbogen, wovon der eine die Seiten AD und CD in E und H, und der andere die Seiten AB und CB in F und G schneiden mag, und theilt man XAC durch R harmonisch, so ist nach §. 186 $\frac{\sin XA}{\sin XC} = \frac{\sin AE}{\sin DE} : \frac{\sin CH}{\sin DH}$ und da auch $\frac{\sin XA}{\sin XC} = \frac{\sin RA}{\sin RC}$ ist, so ist $\frac{\sin RA}{\sin RC} \cdot \frac{\sin CH}{\sin DH} \cdot$

$\frac{\sin DE}{\sin AE} = 1$; daher sind E, R, H P. Punkte des Dreiecks ACD; aus gleichem Grunde sind auch F, R, G P. Punkte des Dreiecks ABC; daher sind nach §. 208 E, F, G, H P. Punkte des Vierecks ABCD.

In Ansehung der anderen Diagonale kann der Beweis ebenso geführt werden.

Anmerkung. Ein Anfänger thut wohl, sich verschiedene Figuren zu zeichnen nach den Hauptverschiedenheiten in der Lage der Punkte der Construction, weil diese Verschiedenheiten nicht selten auffallend sind; er wird sich dann überzeugen, daß der Beweis ungeachtet aller genannten Verschiedenheiten immer auf fast gleiche Weise geführt werden kann.

§. 211.

Lehrsatz. Befinden sich die Ecken eines Dreiecks mit den Ecken eines anderen in drei Hauptbogen, welche sich in Einem Punkte schneiden, so schneiden sich die correspondirenden Seiten der beiden Dreiecke in drei Punkten, welche in Einem Hauptbogen liegen.

Beweis. Sind in Fig. 103 ABC und abc die beiden Dreiecke und schneiden sich Aa, Bb, Cc in Einem Punkte S, so liegt der Durchschnitts-Punkt P von ca und CA, der Durchschnitts-Punkt Q von cb und CB und der Durchschnitts-Punkt R von ab und AB in Einem Hauptbogen. Denn nach §. 210 ist PcQC ein P. Viereck in Ansehung der Punkte a, A, B, b; also schneiden sich ab und AB nach §. 209 auf der Diagonale PQ des Vierecks.

Zusatz. Wenn umgekehrt die Punkte P, Q, R sich in Einem Hauptbogen befinden, so schneiden sich Aa, Bb, Cc in Einem Punkte S.

Anmerkung. Der Beweis dieses Satzes für eine andere Gestalt der Figur kommt noch einmal im §. 234 vor.

§. 212.

Lehrsatz. Theilt man ein P. Viereck durch die beiden Diagonalen in zwei Paare von P. Dreiecken, indem man für jedes Paar den gemeinschaftlichen P. Punkt bestimmt, so hat man, indem man jedesmal zwei Gegenseiten des Vierecks wegläßt, und dafür die beiden Diagonalen als Seiten ansieht, zwei neue P. Vierecke.

Beweis. Ist in Fig. 104 ABCD das Viereck mit den P. Punkten E, F, G, H, ist ferner K der gemeinschaftliche P. Punkt der beiden Dreiecke ADC und ABC, ferner L der gemein-

schaftliche P. Punkt der beiden Dreiecke DAB und DCB, so ist auch DACB ein P. Viereck in Ansehung der Punkte E, K, G, L und DBAC ein P. Viereck in Ansehung der Punkte L, F, K, H. Denn nach der Annahme ist

$$1.\quad \frac{\sin AE}{\sin DE} \cdot \frac{\sin DH}{\sin CH} \cdot \frac{\sin CG}{\sin BG} \cdot \frac{\sin BF}{\sin AF} = 1,$$

$$2.\quad \frac{\sin AE}{\sin DE} \cdot \frac{\sin DH}{\sin CH} \cdot \frac{\sin CK}{\sin AK} = 1,$$

$$3.\quad \frac{\sin AF}{\sin BF} \cdot \frac{\sin BG}{\sin CG} \cdot \frac{\sin CK}{\sin AK} = 1,$$

$$4.\quad \frac{\sin BF}{\sin AF} \cdot \frac{\sin AE}{\sin DE} \cdot \frac{\sin DL}{\sin BL} = 1,$$

$$5.\quad \frac{\sin DH}{\sin CH} \cdot \frac{\sin CG}{\sin BG} \cdot \frac{\sin BL}{\sin DL} = 1;$$

und die Proportion 1 kann man aus 2 und 3 oder auch aus 4 und 5 herleiten; wenn man aber 2 durch 4 dividirt, so erhält man

$$6.\quad \frac{\sin DH}{\sin CH} \cdot \frac{\sin CK}{\sin AK} \cdot \frac{\sin AF}{\sin BF} \cdot \frac{\sin BL}{\sin DL} = 1,$$

und hiernach ist das Viereck, dessen Seiten sind, DHC, CKA, AFB, BLD, ein P. Viereck; H, K, F, L sind seine P. Punkte.

Wenn man 2 durch 5 dividirt, so hat man $\frac{\sin AE}{\sin DE} \cdot \frac{\sin DL}{\sin BL} \cdot \frac{\sin BG}{\sin CG} \cdot \frac{\sin CK}{\sin AK} = 1$ und hiernach ist das Viereck, dessen Seiten sind AED, DLB, BGC, CKA, ein P. Viereck und die Punkte E, L, G, K sind seine P. Punkte. Die noch übrigen Combinationen führen zu denselben Resultaten.

Zusatz 1. Zieht man also EK und LG, so schneiden sie sich (verlängert) nach §. 210 auf DC; zieht man noch LE und KG, so schneiden sie sich aus demselben Grunde auf AB; KF und LH schneiden sich auf BC; KH und FL schneiden sich auf AD.

Zusatz 2. Da EG und FH Medialen des P. Vierecks heißen, so ist KL die dritte Mediale des P. Vierecks, denn KL verbindet in beiden nachgewiesenen neuen P. Vierecken die P. Punkte der Gegenseiten AC und DB.

§. 213.

Lehrsatz. Werden drei Hauptbogen, welche sich in Einem Punkte schneiden, geschnitten von drei anderen Hauptbogen, welche ebenfalls durch Einen Punkt gehen, so entstehen neun Proportional-Vierecke, und jeder von den neun Durchschnitts-Punkten ist der Reihe nach ein P. M. Punkt für eines der neun P. Vierecke,

welches die acht übrigen Punkte zum Theil zu seinen Ecken, zum Theil zu seinen P. Punkten hat.

Beweis. Nach §. 179 ist in Fig. 105

$$\frac{\sin PA}{\sin PD} : \frac{\sin PB}{\sin PC} = \frac{\sin AE}{\sin DE} : \frac{\sin BG}{\sin CG}$$

und $$\frac{\sin QA}{\sin QD} : \frac{\sin QB}{\sin QC} = \frac{\sin AF}{\sin BF} : \frac{\sin DH}{\sin CH},$$

da aber nach §. 186 ist $\frac{\sin PA}{\sin PD} : \frac{\sin PB}{\sin PC} = \frac{\sin QA}{\sin QD} : \frac{\sin QB}{\sin QC}$, so hat man auf der Stelle die Proportion

$$1. \quad \frac{\sin DE}{\sin AE} \cdot \frac{\sin AF}{\sin BF} \cdot \frac{\sin BG}{\sin CG} \cdot \frac{\sin CH}{\sin DH} = 1,$$

und hiernach ist ABCD ein P. Viereck mit den P. Punkten E, F, G, H und dem P. M. Punkte O.

Ferner ist $\frac{\sin PA}{\sin PF} : \frac{\sin PD}{\sin PH} = \frac{\sin AE}{\sin DE} : \frac{\sin FO}{\sin HO}$, $\frac{\sin QA}{\sin QF} : \frac{\sin QD}{\sin QH} = \frac{\sin AB}{\sin FB} : \frac{\sin DC}{\sin HC}$ und $\frac{\sin PA}{\sin PF} : \frac{\sin PD}{\sin PH} = \frac{\sin QA}{\sin QF} : \frac{\sin QD}{\sin QH}$ und hieraus folgt

$$2. \quad \frac{\sin AE}{\sin DE} \cdot \frac{\sin DC}{\sin HC} \cdot \frac{\sin HO}{\sin FO} \cdot \frac{\sin FB}{\sin AB} = 1,$$

daher ist ADHF ein P. Viereck mit den Proportional-Punkten E, C, O, B und dem P. M. Punkte G. Ganz ebenso findet man

$$3. \quad \frac{\sin BG}{\sin CG} \cdot \frac{\sin CD}{\sin HD} \cdot \frac{\sin HO}{\sin FO} \cdot \frac{\sin FA}{\sin BA} = 1,$$

daher ist FBCH ein P. Viereck mit den P. Punkten G, D, O, A und dem P. M. Punkte E. Ferner ist

$$4. \quad \frac{\sin CH}{\sin DH} \cdot \frac{\sin DA}{\sin EA} \cdot \frac{\sin EO}{\sin GO} \cdot \frac{\sin GB}{\sin CB} = 1,$$

daher ist DEGC ein P. Viereck mit den P. Punkten H, A, O, B und dem P. M. Punkte F. Ferner ist

$$5. \quad \frac{\sin AF}{\sin BF} \cdot \frac{\sin BC}{\sin GC} \cdot \frac{\sin GO}{\sin EO} \cdot \frac{\sin ED}{\sin AD} = 1,$$

also ist AEGB ein P. Viereck mit den P. Punkten F, C, O, D und dem P. M. Punkte H.

Weiter ist $\frac{\sin PA}{\sin PE} : \frac{\sin PF}{\sin PO} = \frac{\sin AD}{\sin ED} : \frac{\sin FH}{\sin OH}$, $\frac{\sin QA}{\sin QE} : \frac{\sin QF}{\sin QO} = \frac{\sin AB}{\sin FB} : \frac{\sin EG}{\sin OG}$ und noch $\frac{\sin PA}{\sin PE} : \frac{\sin PF}{\sin PO} = \frac{\sin QA}{\sin QE} : \frac{\sin QF}{\sin QA}$, also hat man die folgende Proportion:

6. $\frac{\sin AB}{\sin FB} \cdot \frac{\sin FH}{\sin OH} \cdot \frac{\sin OG}{\sin EG} \cdot \frac{\sin ED}{\sin AD} = 1,$

und hiernach ist AFOE ein P. Viereck mit den P. Punkten B, G, H, D und dem P. M. Punkte C. Ganz ebenso findet man

7. $\frac{\sin FA}{\sin BA} \cdot \frac{\sin BC}{\sin GC} \cdot \frac{\sin GE}{\sin OE} \cdot \frac{\sin OH}{\sin FH} = 1,$

und hiernach ist FBGO ein P.-Viereck mit den P. Punkten A, C, E, H und dem P. M. Punkte D. Ferner ist

8. $\frac{\sin OE}{\sin GE} \cdot \frac{\sin GB}{\sin CB} \cdot \frac{\sin CD}{\sin HD} \cdot \frac{\sin HF}{\sin OF} = 1,$

und hiernach ist OGCH ein P. Viereck mit den P. Punkten E, B, D, H und dem P. M. Punkte A. Endlich ist noch

9. $\frac{\sin EA}{\sin DA} \cdot \frac{\sin DC}{\sin HC} \cdot \frac{\sin HF}{\sin OF} \cdot \frac{\sin OG}{\sin EG} = 1,$

und es also EDHO ein P. Viereck mit den P. Punkten A, C, F, G und dem P. M. Punkte B.

Zusatz 1. Die beiden Medialen EG und FG theilen also das P.-Viereck ABCD so, daß noch acht neue P.-Vierecken entstehen; diese beiden Medialen gehen durch die Durchschnitts-Punkte P und Q der Gegenseiten des Vierecks ABCD. So allgemein dieses Theorem und so häufig die Anwendung desselben auch sein mag, so wird dasselbe gleichwohl noch in seiner Allgemeinheit gesteigert werden.

Zusatz 2. Verbindet man den Satz im §. 212 mit dem vorstehenden, so hat man 27 P. Vierecke, unter welchen sich das gegebene ABCD wieder mit befindet.

§. 214.

Lehrsatz. Jedes P. Viereck wird durch zwei Medialen in acht neue P. Vierecke getheilt, wenn auch die Medialen nicht durch die Durchschnitts-Punkte der Gegenseiten des Vierecks gehen.

Beweis. Es sei in Fig. 106 ABCD ein P. Viereck für die P. Punkte E, F, G, H und den P. Mittelpunkt O; man vollende das Viereck EFGH, so schneiden sich seine Gegenseiten nach §. 209 auf den Diagonalen des Vierecks ABCD, etwa in P und Q und die Medialen dieses Vierecks erscheinen nun als Diagonalen des Vierecks EFGH. Nach ihrem Durchschnitts-Punkte O ziehe man QO, wovon GH in a und EF in c geschnitten werden mag; ebenso ziehe man PO, wovon FG in b und EH in d geschnitten werde. Es sind nun die sechs Linien PHaG, PdOb, PEcF, QEdH, QcOa und QFbG nach §. 199 harmonisch getheilt.

Da nun die Hauptbogen EG und EF von QO und QG geschnitten werden, so ist

$$\frac{\sin QF}{\sin QG} = \frac{\sin Fc}{\sin Ec} : \frac{\sin GO}{\sin EO} = \frac{\sin Fc}{\sin Ec} \cdot \frac{\sin EO}{\sin GO},$$

und weil BC und BA von QC und QG geschnitten werden, so ist auch

$$\frac{\sin QF}{\sin QG} = \frac{\sin FA}{\sin BA} : \frac{\sin GC}{\sin BC},$$

und also $\frac{\sin Fc}{\sin Ec} \cdot \frac{\sin EO}{\sin GO} = \frac{\sin FA}{\sin BA} \cdot \frac{\sin BC}{\sin GC}$; weil aber PEcF harmonisch getheilt ist, so ist $\frac{\sin Fc}{\sin Ec} = \frac{\sin PF}{\sin PE}$ und weil endlich AD und AB von PB und PF geschnitten werden, so ist

$$\frac{\sin PF}{\sin PE} = \frac{\sin FB}{\sin AB} : \frac{\sin ED}{\sin AD} = \frac{\sin Fc}{\sin Ec},$$

und wird dieser Werth substituirt, so hat man $\frac{\sin FB}{\sin AB} \cdot \frac{\sin AD}{\sin ED} \cdot \frac{\sin EO}{\sin GO} = \frac{\sin FA}{\sin BA} \cdot \frac{\sin BC}{\sin GC}$, oder auch

$$\frac{\sin EO}{\sin GO} \cdot \frac{\sin GC}{\sin BC} \cdot \frac{\sin BF}{\sin AF} \cdot \frac{\sin AD}{\sin ED} = 1,$$

und hiernach ist EABG ein P. Viereck für die Punkte O, C, F, D und den P. M. Punkt H. Ganz ebenso wird bewiesen, daß FADH ein P. Viereck für die Punkte E, C, O, B und den P. M. Punkt G sei, daß EDCG ein P. Viereck für die Punkte H, B, O, A und den P. M. Punkt F und daß HCBF ein P. Viereck für die P. Punkte G, A, O, D und den P. Mittelpunkt E sei.

Ferner ist $\frac{\sin QF}{\sin QG} = \frac{\sin FA}{\sin BA} : \frac{\sin GC}{\sin BC}$ und auch $\frac{\sin QF}{\sin QG} = \frac{\sin FH}{\sin OH} : \frac{\sin GE}{\sin OE}$ nach §. 186, daher hat man $\frac{\sin FA}{\sin BA} \cdot \frac{\sin BC}{\sin GC} \cdot \frac{\sin GE}{\sin OE} \cdot \frac{\sin OH}{\sin FH} = 1$, und hiernach ist OFBG ein P. Viereck für die Punkte A, H, E, C und den Mittelpunkt D. Ebenso wird aber bewiesen, daß OHCG ein P. Viereck für die P. Punkte D, E, F, B und den P. M. Punkt A, daß OEDH ein P. Punkt für die P. Punkte C, G, F, A und den P. M. Punkt B und daß endlich OFAE ein P. Viereck für die P. Punkte D, H, G, B und den P. M. Punkt C sei.

Zusatz 1. Wenn überhaupt eines von den in Rede stehenden neun Vierecken ein P. Viereck ist, so sind es auch die acht übrigen.

Zusatz 2. Wenn in Fig. 101 auf den Seiten eines Vierecks ABCD die Punkte E, F, G, H so angenommen wor-

den, daß $\frac{\sin AF}{\sin BF} \cdot \frac{\sin BG}{\sin CG} \cdot \frac{\sin CH}{\sin DH} \cdot \frac{\sin DE}{\sin AE} = 1$ ist, und die Verbindungslinie EG durch den Punkt O so getheilt wird, daß ist

$$\frac{\sin GO}{\sin EO} = \frac{\sin CH}{\sin DH} \cdot \frac{\sin DA}{\sin CB} \cdot \frac{\sin BG}{\sin EA} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin GO}{\sin EO} = \frac{\sin BF}{\sin AF} \cdot \frac{\sin DA}{\sin CB} \cdot \frac{\sin GC}{\sin ED},$$

so liegt der Punkt O mit den Punkten F und H in Einem Hauptbogen FOH und der Punkt O ist überhaupt der P. M. Punkt des Vierecks ABCD.

Anmerkung. In der Planimetrie gelten dieselben Sätze mit ihren Folgerungen, und man braucht in den Proportionen nur die Vorsylben sin. sin. wegzulassen. Auch gelten diese Sätze dann noch, wenn das Viereck ABCD zwar geradlinig, aber uneben ist; die vier Proportional-Punkte E, F, G, H liegen aber immer mit dem P. M. Punkte in einer Ebene. Daher kann die Gleichung $\frac{DH}{CH} \cdot \frac{CG}{BG} \cdot \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{DE} = 1$, dann in gewissem Sinne als die Gleichung einer Ebene angesehen werden. Wenn dann CB und DA so getheilt werden, daß ist $\frac{CG}{BH} = \frac{DE}{AE}$ und auch DC und AC so getheilt werden, daß ist $\frac{DH}{CH} = \frac{AF}{BF}$, so folgt nach dem obigen Satze auf der Stelle, daß auch $\frac{HO}{FO} = \frac{DE}{AE}$ und $\frac{EO}{GO} = \frac{DH}{CH}$ sei, denn in diesem partikulären Falle ist ABCD ein P. Viereck für die Punkte E, F, G, H und den P. M. Punkt O. Dieser partikuläre Fall des analogen planimetrischen Satzes war aber längst bekannt.

§. 215.

Lehrsatz. Theilt man ein P. Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, so liegt der P. Mittelpunkt eines solchen Dreiecks mit dem nicht an der Diagonale befindlichen Scheitel des anderen Dreiecks und dem P. Mittelpunkte des Vierecks in Einem Hauptbogen.

In Fig. 107 seien E, F, G, H die P. Punkte des Vierecks ABCD und O sein P. Mittelpunkt; zieht man nun die Scheitel-Linien DF und BE im Dreiecke DAB, so ist P der P. M. Punkt

dieses Dreiecks und es ist zu beweisen, daß die Punkte P, O, C in Einem Hauptbogen liegen.

Da nach §. 214 HOGC ein P. Viereck für die Punkte D, F, E, B ist, so verbindet DF die P. Punkte in zwei benachbarten Seiten CH und HO, und BE die P. Punkte in den beiden anderen Seiten, daher schneiden sich DF und EB nach §. 209 auf der Diagonale OC des Vierecks HOGC.

Zusatz 1. Zieht man CE und AH, so befindet sich ihr Durchschnittspunkt mit O und B in Einem Hauptbogen; zieht man DG und BH, so liegt ihr Durchschnittspunkt mit O und A in Einem Hauptbogen; zieht man endlich CF und AG, so liegt ihr Durchschnittspunkt mit O und D in Einem Hauptbogen.

Zusatz 2. Zu drei P. Punkten E, F, G eines Vierecks findet man den vierten, indem man BE und DF und durch ihren Durchschnittspunkt P noch CP zieht; wird EG von CP in O geschnitten, und FO gezogen, so trifft sie die Seite DC im gesuchten vierten P. Punkte H.

Zusatz 3. Theilt man ein P. Viereck durch eine Diagonale in zwei P. Dreiecke und verbindet man den P. Mittelpunkt eines jeden mit dem nicht in der Diagonale befindlichen Scheitel des anderen Dreiecks durch einen Hauptbogen, so schneiden sich diese beiden Hauptbogen in P. M. Punkte des Vierecks.

§. 216.

Lehrsatz. Die drei Medialen eines jeden Proportional-Vierecks schneiden sich in Einem Punkte.

Beweis. In Fig. 108 sei ABCD das P. Viereck mit den P. Punkten E, F, G, H und dem P. M. Punkte O; man theile es durch die Diagonale BD in die P. Dreiecke ABD und BDC, so befindet sich in der Diagonale BD der gemeinschaftliche P. Punkt dieser beiden Dreiecke, deren P. M. Punkte P und Q sein mögen. Man ziehe CP und AQ, so gehen sie nach §. 215 durch O; weil nun vom Punkte B der Diagonale DR des Vierecks ADCR die Linien BPE und BQH gezogen sind, so ist nach §. 210 dieses Viereck ADCR eine P. Figur für die Punkte E, P, Q, H und also

$$\frac{\sin AP}{\sin RP} \cdot \frac{\sin RQ}{\sin CQ} \cdot \frac{\sin CH}{\sin DH} \cdot \frac{\sin DE}{\sin AE} = 1;$$

ist nun aber RS die dritte Mediale des Vierecks ABCD, so ist nach §. 212 $\frac{\sin CH}{\sin DH} \cdot \frac{\sin DE}{\sin AE} \cdot \frac{\sin AS}{\sin CS} = 1$, und wird diese Proportion mit der vorigen verbunden, so hat man $\frac{\sin AP}{\sin RP}$.

$\frac{\sin RQ}{\sin CQ} \cdot \frac{\sin CS}{\sin AS} = 1$; daher schneiden sich nach §. 190 die Linien CP, AQ und RS in Einem Punkte, und da der Durchschnitts-Punkt der beiden ersten auch der Durchschnitts-Punkt der beiden Medialen EG und FH des Vierecks ABCD ist, so schneiden sich die drei Medialen EG, FH und RS in Einem Punkte, dem P. M. Punkte des Vierecks ABCD.

Zusatz. Sowie ADCR ein P. Viereck für die Punkte E, P, Q, H ist, so ist auch ABCR ein P. Viereck für die P. Punkte P, Q, G, F; auf ähnliche Art lassen sich offenbar noch zwei andere P. Vierecke nachweisen.

Anmerkung. Wendet man überhaupt die vom P. Vierecke ABCD bewiesenen Sätze auf die übrigen Proportional-Vierecke an, so erhält man eine Reihe von Constructionen, bei denen sich mehre Hauptkreise in Einem Punkte schneiden, oder mehre Durchschnitts-Punkte in Einem Hauptkreise liegen; überhaupt kann man gerade durch diese Constructionen noch mehre neue P. Vierecke nachweisen, und die ihnen entsprechenden Constructionen lassen sich sämmtlich als Eigenschaften des ursprünglichen P. Vierecks ABCD darstellen. Ein Anfänger findet hierin einen reichen Stoff zu seiner Uebung, dessen Behandlung hier aber zu weit führen würde.

§. 217.

Lehrsatz. Werden die vier Seiten eines Vierecks von einem Hauptbogen geschnitten, so ist es ein P. Viereck, und die vier Durchschnitts-Punkte der Seiten sind seine P. Punkte.

Beweis. In Fig. 109 werden die Seiten des Vierecks ABCD von einem Hauptbogen geschnitten in F, E, H, G; man verlängere BC, bis AD davon in L geschnitten wird, und es ist

$$\frac{\sin EL}{\sin ED} = \frac{\sin LG}{\sin CG} \cdot \frac{\sin CH}{\sin DH}, \text{ ferner}$$

$$\frac{\sin EL}{\sin EA} = \frac{\sin LG}{\sin BG} \cdot \frac{\sin BF}{\sin AF};$$

wird die erste Proportion durch die zweite dividirt, so hat man

$$\frac{\sin AE}{\sin DE} = \frac{\sin BG}{\sin CG} \cdot \frac{\sin AF}{\sin BF} \cdot \frac{\sin CH}{\sin DH} \text{ oder auch } \frac{\sin AE}{\sin DE} \cdot$$

$\frac{\sin DH}{\sin CH} \cdot \frac{\sin CG}{\sin BG} \cdot \frac{\sin BF}{\sin AF} = 1$ und es ist also ABCD ein P. Viereck für die P. Punkte E, H, G, F seiner Seiten.

Zusatz 1. Auf ähnliche Art kann man noch zwei andere Proportionen herleiten. Ferner sind EG und FH die beiden

Medialen des Vierecks ABCD, und da sich die beiden genannten Medialen in Einem Hauptbogen befinden und sich also nicht schneiden, so befindet sich der P. M. Punkt des Vierecks ABCD im Bogen EF und es muß seine Lage in ihm noch bestimmt werden. Construirt man die dritte Mediale des Vierecks, so schneidet sie den Bogen EF nach §. 216 im gesuchten P. M. Punkte.

Zusatz 2. Die Kenntniß, daß ABCD ein P. Viereck sei, führt nun zu der folgenden interessanten Construction. Theilt man das Viereck in Fig. 110 durch die Diagonale AC in die Dreiecke ADC und ABC, und zieht man die Scheitel-Linien CE und AH, welche sich in Q′ schneiden, so ist Q′ der P. M. Punkt des Dreiecks ADC, und wird DQ′ gezogen, wovon AC in S geschnitten wird, so ist S der dritte P. Punkt des Dreiecks ADC, welchen es mit dem Dreiecke ABC gemein hat. Zieht man für dieses Dreieck die Scheitel-Linien CF und AG, welche sich in P′ schneiden, und dann BP′, so wird die Diagonale AC davon ebenfalls in S getroffen und P′ ist der P. M. Punkt des Dreiecks ABC. Werden ferner BQ′ und DP′ gezogen, so schneiden sie sich auf dem Hauptbogen EF im P. M. Punkte O des Vierecks ABCD.

Theilt man dasselbe Viereck durch die Diagonale BD in die Dreiecke BDC und BDA, so läßt sich in Ansehung dieser Diagonale die vorige Construction wiederholen und es lassen sich überhaupt nun alle Linien so ziehen, wie es die Figur 108 durch die daran gesetzten Buchstaben angibt. Dadurch werden die P. M. Punkte P und Q der beiden Dreiecke BAD und BCD mit ihrem gemeinschaftlichen P. Punkte R construirt, und es gehen dann noch die Linien AQ, CP und die dritte Mediale RS durch den P. Mittelpunkt O des Vierecks ABCD; es sind also im Ganzen sechs Linien nachgewiesen, welche sich in diesem Punkte schneiden.

Die Allgemeinheit dieser Sätze verdient eine besondere Beachtung, denn das Viereck ABCD ist völlig willkührlich, und der Hauptbogen EGHF, welcher seine Seiten schneidet, kann eine willkührliche Lage haben, wenn er nur nicht durch den Durchschnittspunkt zweier Seiten des Vierecks ABCD geht; eine andere einschränkende Annahme gibt es aber hier nicht.

§. 218.

Lehrsatz. Theilt man ein beliebiges Viereck ABCD Fig. 110* durch eine Linie FH, welche durch den Durchschnitts-Punkt O der

Diagonalen von ABCD geht, in zwei neue Vierecke AFHD und BFHC, und schneiden ihre Diagonalen die Diagonalen des ersten Vierecks in den Punkten α, β, γ, δ, so schneiden sich $C\delta$ und $B\alpha$ in Einem Punkte E der Seite AD, ebenso $D\gamma$ und $A\beta$ in Einem Punkte G der Seite BC, und es ist ABCD ein P. Viereck mit den P. Punkten E, F, G, H und dem P. Mittelpunkte O.

Beweis. Läßt man vorläufig die Linien $A\beta$ und $C\delta$ weg, so ist DBC ein P. Dreieck mit den P. Punkten H, G, O und dem P. M. Punkte γ und DAB ein P. Dreieck mit den P. Punkten E, F, O und den P. M. Punkte α, und da diese Dreiecke den P. Punkt O der Diagonale BD gemein haben, so ist ABCD ein P. Viereck mit den P. Punkten E, F, G, H und dem P. M. Punkte O; zieht man nun AG, so geht sie nach §. 215 durch den Punkt β und also umgekehrt $A\beta$ durch G; zieht man ferner CE, so geht sie nach §. 215 durch δ und also umgekehrt $C\delta$ durch E.

Zusatz 1. Geht eine von den beiden Medialen eines P.-Vierecks durch den Durchschnittspunkt seiner Diagonalen, so geht auch die andere durch diesen Punkt, und die dritte Mediale hat keine Länge.

Zusatz 2. Soll eine Mediale eines Vierecks durch den Durchschnittspunkt seiner Diagonalen gehen, so ist die Lage der anderen Mediale völlig bestimmt, und kann nach dem vorstehenden Lehrsatze gefunden werden.

Die Richtung der ersten Mediale kann beliebig gewählt werden.

§. 219.

Lehrsatz. Theilt man ein Viereck durch einen willkührlichen Hauptbogen in zwei Vierecke, so liegen die drei Durchschnitts-Punkte der Diagonalen dieser Vierecke in Einem Hauptbogen.

In Fig. 111 sei AA′CC′ das Viereck, welches durch die Linie BB′ in zwei Vierecke AA′BB′ und BB′C′C getheilt ist; D sei der Durchschnittspunkt der Diagonalen des Vierecks AA′B′B, E der Durchschnittspunkt der Diagonalen des Vierecks AA′C′C und F der Durchschnittspunkt der Diagonalen des Vierecks BB′C′C. Zieht man nun einen Hauptbogen PP′ durch D und F, so ist, insofern er durch D geht, nach §. 185,

$$\frac{\sin VA \,.\, \sin VA'}{\sin VB \,.\, \sin VB'} = \frac{\sin PA \,.\, \sin P'A'}{\sin PB \,.\, \sin P'B'},$$

und insofern er durch den Punkt F geht, ist ebenso

$$\frac{\sin VB \,.\, \sin VB'}{\sin VC \,.\, \sin VC'} = \frac{\sin PB \,.\, \sin P'B'}{\sin PC \,.\, \sin P'C'};$$

wird nun die erste Proportion mit der zweiten multiplicirt, so erhält man eine ähnliche dritte Proportion

$$\frac{\sin VA \cdot \sin VA'}{\sin VC \cdot \sin VC'} = \frac{\sin PA \cdot \sin P'A'}{\sin PC \cdot \sin P'C'},$$

und wegen dieser Proportion geht nach dem Zusatze 2 zu §. 185 die Linie DF auch durch den Punkt F.

Zusatz. Da die Lage der drei Punkte A, B, C auf der Linie VC und auch die Lage der drei Punkte A′, B′, C′ auf der Linie VC′ völlig willkührlich ist, so kann man die drei Punkte A, B, C permutiren und so erhält man im Ganzen sechs Linien, auf deren jeder sich drei Durchschnitts-Punkte von ebenso vielen Linien-Paaren befinden. Auf der ersten schneiden sich die Linien-Paare AB′, BA′; AC′, CA′; BC′, CB′; auf der zweiten schneiden sich die drei Linien-Paare AC′, BA′; AB′, CA′; BB′, CC′; auf der dritten schneiden sich die Paare AA′ BB′; AC′, CB′; BC′, CA′; auf der vierten schneiden sich die Paare AC′, BB′; AA′, CB′; BA′, CC′; auf der fünften schneiden sich die Paare AA′, BC′; AB′, CC′; BA′, CA′; auf der sechsten endlich schneiden sich die Paare AB′, BC′; AA′, CC′; BA′, CB′.

Der Beweis ist für alle Behauptungen derselbe, wenn nur in den früher gebrauchten Proportionen die Buchstaben verändert werden.

§. 220.

Aufgabe. Man soll aus den Abständen VA, VB, VC, VA′, VB′, VC′ die Verhältnisse für die Sinus der Theile der Linien AA′, BB′, CC′ herleiten, in welche sie von der im §. 219 behandelten Linie DEF geschnitten werden, und auch die Lagen-Bestimmungen der Punkte P und P′ finden.

Es werde von der Linie DEF die AA′ in L, die BB′ in M und die CC′ in N geschnitten. Weil sich die Linien A′V, A′A, AB′, A′C in A′ schneiden, so ist nach §. 184 VABC ∽ P′LDE; weil ferner die Linien AP′, AA′, AB′, AC′ sich in A schneiden, so ist auch P′A′B′C′ ∽ P′LDE und daher ist offenbar

1. P′A′B′C′ ∽ VABC

und durch diese Proportion, welche bekanntlich in drei verschiedenen Formen ausgedrückt werden kann, ist die Lage des Punktes P′ bestimmt.

Ferner ist, wenn man sich noch A′P gezogen denkt, PABC ∽ PLDE und VA′B′C′ ∽ PLDE, daher hat man

2. PABC ∽ VA′B′C′,

und hierdurch ist auch die Lage des Punktes P bestimmt.

Weil ferner das Dreieck CAA′ von PE geschnitten wird, so ist nach §. 186

$$\frac{\sin PA}{\sin PC} = \frac{\sin AL}{\sin A'L} : \frac{\sin CE}{\sin A'E} \text{ oder } \frac{\sin AL}{\sin A'L} = \frac{\sin PA}{\sin PC}.$$

$\frac{\sin CE}{\sin A'E}$, weil ferner das Dreieck CVA' von AC' geschnitten wird, so ist $\frac{\sin C'A'}{\sin C'V} = \frac{\sin A'E}{\sin CE} : \frac{\sin VA}{\sin CA}$ oder $\frac{\sin CE}{\sin A'E} =$ $\frac{\sin C'V}{\sin C'A'} \cdot \frac{\sin CA}{\sin VA}$ und wird dieser Werth substituirt, so hat man

$$3.\quad \frac{\sin AL}{\sin A'L} = \frac{\sin VC'}{\sin VA} \cdot \frac{\sin PA}{\sin PC} \cdot \frac{\sin AC}{\sin A'C'}.$$

Weil ferner nach der Proportion (2) $\frac{\sin PA \,.\, \sin BC}{\sin PC \,.\, \sin AB} =$ $\frac{\sin VA' \,.\, \sin B'C'}{\sin VC' \,.\, \sin A'B'}$ und also $\frac{\sin PA}{\sin PC} = \frac{\sin VA'}{\sin VC'} \cdot \frac{\sin AB}{\sin A'B'} \cdot$ $\frac{\sin B'C'}{\sin BC}$ ist, so hat man, wenn dieser Werth in (3) gesetzt wird,

$$\frac{\sin AL}{\sin A'L} = \frac{\sin VA'}{\sin VA} \cdot \frac{\sin AB}{\sin A'B'} \cdot \frac{\sin AC}{\sin A'C'} \cdot \frac{\sin B'C'}{\sin BC},$$

ebenso ist

$$\frac{\sin BM}{\sin B'M} = \frac{\sin VB'}{\sin VB} \cdot \frac{\sin BA}{\sin B'A'} \cdot \frac{\sin BC}{\sin B'C'} \cdot \frac{\sin A'C'}{\sin AC},$$

$$\frac{\sin CN}{\sin C'N} = \frac{\sin VC'}{\sin VC} \cdot \frac{\sin CA}{\sin C'A'} \cdot \frac{\sin CB}{\sin C'B'} \cdot \frac{\sin A'B'}{\sin AB}.$$

Diese drei Ausdrücke, welche später zur Anwendung kommen, haben aber die verlangte Eigenschaft.

Aber auch die Verhältnisse, wodurch die Lage der Punkte P und P' bestimmt ist, können in Gebrauch kommen, und daher mögen sie hier aufgestellt werden; sie sind die folgenden:

$$\frac{\sin PA}{\sin PB} = \frac{\sin VA'}{\sin VB'} \cdot \frac{\sin AC}{\sin A'C'} \cdot \frac{\sin B'C'}{\sin BC} \text{ und}$$

$$\frac{\sin P'A'}{\sin P'B'} = \frac{\sin VA}{\sin VB} \cdot \frac{\sin A'C'}{\sin AC} \cdot \frac{\sin BC}{\sin B'C'},$$

$$\frac{\sin PB}{\sin PC} = \frac{\sin VB'}{\sin VC'} \cdot \frac{\sin AB}{\sin A'B'} \cdot \frac{\sin A'C'}{\sin AC} \text{ und}$$

$$\frac{\sin P'B'}{\sin P'C'} = \frac{\sin VB}{\sin VC} \cdot \frac{\sin A'B'}{\sin AB} \cdot \frac{\sin AC}{\sin A'C'},$$

$$\frac{\sin PA}{\sin PC} = \frac{\sin VA'}{\sin VC'} \cdot \frac{\sin AB}{\sin A'B'} \cdot \frac{\sin B'C'}{\sin BC} \text{ und}$$

$$\frac{\sin P'A'}{\sin P'C'} = \frac{\sin VA}{\sin VC} \cdot \frac{\sin A'B'}{\sin AB} \cdot \frac{\sin BC}{\sin B'C'}.$$

Zusatz. Aus den obigen Ausdrücken folgt nun durch Multiplication die Gleichung

$$\frac{\sin AL}{\sin A'L} \cdot \frac{\sin A'B'}{\sin C'B'} \cdot \frac{\sin C'N}{\sin CN} \cdot \frac{\sin CB}{\sin AB}$$
$$= \frac{\sin VA' \sin C'B'}{\sin A'B' \cdot \sin VC'} \cdot \frac{\sin VA \cdot \sin CB}{\sin AB \cdot \sin VC};$$

daher ist AA'C'C kein Proportional-Viereck in Ansehung der Punkte L, B', N, B, ausgenommen in dem besonderen Falle, wenn VABC und VA'B'C' ähnlich getheilt sind und sich also die drei Linien AA', BB', CC' in Einem Punkte schneiden. Von diesem besonderen Falle ist aber schon im 4. Zusatze zu §. 199 gehandelt worden.

§. 221.

Lehrsatz. Zieht man in Fig. 112 von zwei beliebigen Punkten P und P' eines Bogens PP' aus Hauptbogen nach den Punkten u. v, w, x, y :c. eines Hauptkreises mm und wird von den aus P gezogenen Linien ein Hauptkreis M'M' in A', B', C', D', E', F', und von den aus P' gezogenen Linien ein Hauptkreis MM in A, B, C, D, E, F geschnitten, so ist ABCD ∽ A'B'C'D', BCDE ∽ B'C'D'E', CDEF ∽ C'D'E'F', oder überhaupt ABCDEF ∽ A'B'C'D'E'F'.

Beweis. Wird PP' von mm in p geschnitten, so ist nach §. 184 erstens uvwpxy ∽ ABCDEF und auch uvwpxy ∽ A'B'C'D'E'F'; daher ist ABCDEF ∽ A'B'C'D'E'F', und diese zusammengesetzte Bestimmung kann in mehreren einzelnen Proportionen ausgedrückt werden. Nimmt man irgend vier Theil-Punkte auf dem Bogen MM, etwa A, C, E, F und die homologen Punkte A', C', E', F' auf dem Bogen M'M', so ist jedesmal ACEF ∽ A'C'E'F'.

Zusatz 1. Beschreibt man aus den Punkten P und P' die Kreisbogen $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\eta'$ und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta$ zur Messung der Winkel an P und P', so folgt auch noch nach §. 180, daß $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta$ ∽ $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\eta'$ sei.

Zusatz 2. Zu ähnlichen Resultaten gelangt man auch, wenn man die Punkte P und P' verwechselt, wobei man also auf die Punkte seine Aufmerksamkeit richtet, in welchen MM von den aus P gezogenen Linien und in welchen M'M' von den aus P' gezogenen Linien geschnitten wird.

Zusatz 3. Der Punkt P kann auch in der Linie MM selbst und P' in der Linie M'M' selbst angenommen werden, wobei sich also P und P' mit D und D' identificiren.

§. 222.

Aufgabe. Man soll zu vier Punkten D, C, B, A einer Linie MM und drei Punkten D', C', B' einer anderen Linie M'M'

einen achten Punkt A', und zwar in der Linie M'M', so bestimmen, daß ABCD ∽ A'B'C'D' sei, wenn die Linien MM und M'M eine gegebene Lage haben.

Auflösung. Man wähle zwei homologe Punkte D und D' in Fig. 113, ziehe die Linien DC' und D'C, welche sich in w schneiden, ferner DB' und D'B', welche sich in v schneiden, dann vw und D'A, welche sich in u schneiden und endlich Du, wovon M'M' in A' getroffen werde: so ist A'B'C'D' ∽ ABCD.

Die Richtigkeit der Auflösung erhellet aus §. 221.

§. 223.

Lehrsatz. Sind zwei Linien ABCDEF und A'B'C'D'E'F' in Fig. 112 ähnlich getheilt und nimmt man auf einem Bogen PP', welcher irgend zwei homologe Punkte verbindet, die Punkte P und P' willkührlich an, um von dem einen nach den Punkten A, B, C, D, E, F, und von dem anderen nach den Punkten A', B', C', D', E', F' Linien zu ziehen, so schneiden sich die correspondirenden Paare dieser Linien sämmtlich auf Einem Hauptkreise.

Beweis. Schneiden sich PC' und P'C in w; P'B und PB' in v, so ziehe man vw, wovon PP' in p geschnitten werden mag. Wird nun pwv von D'A in u und von DA' in u' geschnitten, so ist nach §. 184 DCBA ∽ pwvu und D'C'B'A' ∽ pwvu', und da DCBA ∽ D'C'B'A' ist, so ist pwvu ∽ pwvu', daher fällt der Punkt u' mit u zusammen. Wie aber jetzt bewiesen ist, daß sich P'A und PA' auf mm schneiden, ebenso kann auch der Beweis geführt werden, daß sich P'E und PE', ferner P'F und PF' ebenfalls auf mm schneiden.

§. 224.

Lehrsatz. Werden durch ein Viereck zwei oder mehre Hauptbogen so gelegt, daß zwei Gegenseiten desselben dadurch ähnlich getheilt worden, so wird das Viereck dadurch in andere Vierecke zerlegt und die Durchschnitts-Punkte der Diagonalen aller dieser Vierecke befinden sich in Einem Hauptkreise.

Beweis. In Fig. 114 sei ABCD ∽ A'B'C'D'; die vier Linien AA', BB', CC', DD' bestimmen sechs Vierecke und die Durchschnitts-Punkte a, b, c, d, e, f der Diagonalen dieser Vierecke befinden sich in Einem Hauptkreise mm. Die Durchschnitts-Punkte a, b, d der Diagonalen der drei Vierecke CDD'C', BCC'B und DBB'D' befinden sich nach §. 219 in Einem Hauptbogen mm und nach §. 223 befinden sich, wenn man die Punkte P und P' in D und D' annimmt, die Punkte a, b, c in Einem Hauptbogen, also liegen die vier Punkte a, b, c, d im Bogen mm. Weil die Linie BB' das Viereck AA'D'D theilt, so befinden sich nach §. 219

die Punkte b, c, f im Bogen mm, also die Punkte a, b, c, d, f und nun liegt nach §. 223 endlich auch noch der Punkt e im Bogen mm.

Zusatz 1. Da die Lage der Punkte A, B, C, D, und A', B', C', D' völlig willkührlich ist, wenn nur ABCD ∽ A'B'C'D' ist, so können sich auch einige von diesen Punkten in Vergleich mit den anderen auf entgegengesetzten Seiten des Durchschnitts-Punktes der beiden Hauptkreise MM und M'M' befinden, wodurch die Vierecke eine sehr veränderte Form erhalten, der Durchschnitts-Punkt der Diagonalen eines solchen Vierecks ist dann nicht mehr im Inneren desselben enthalten. Der Beweis bleibt aber immer derselbe.

Zusatz 2. Wenn noch mehre Linien AA' BB', CC', DD', EE', FF' etc. zwischen MM und MM' so gezogen werden, daß ABCDEF etc. ∽ A'B'C'D'E'F' etc. ist, so entstehen noch mehr als sechs Vierecke und es ist offenbar, daß die Durchschnitts-Punkte der Diagonalen aller dieser Vierecke sich in Einem Hauptkreise mm befinden, dessen Lage im §. 220 bestimmt worden ist.

Anmerkung. Wenn in der Planimetrie die Punkte A, B, C, D ꝛc. und A', B', C', D', ꝛc. auf den geraden Linien MM und M'M' so genommen werden, daß $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} =$ ꝛc. ist, so liegen die Durchschnitts-Punkte der Diagonalen der ebenen Vierecke AA'B'B, BB'C'C, ꝛc. in Einer geraden Linie mm und es gibt eine zweite gerade Linie, wodurch die geraden Linien AA', BB', CC', DD', ꝛc. halbirt werden; diese gerade Linie ist parallel der geraden Linie mm. Dieses interessante planimetrische Theorem wurde mir im Jahre 1828 von seinem Erfinder, dem Herrn Bodenmiller, mündlich mitgetheilt, der schon damals die Ueberzeugung aussprach, daß es sich mit dem im vierten Zusatze zu §. 199 behandelten Theoreme, oder vielmehr mit dem analogen planimetrischen, zu Einem allgemeineren Theoreme der Planimetrie werde vereinigen lassen. Dieses allgemeinere Theorem der Planimetrie wurde von Beiden, unabhängig von einander gefunden; dasselbe gilt, wie hier gezeigt worden ist, auch auf der Kugel; der Herr Bodenmiller, durch dessen Mittheilung ich auf diese Untersuchung gekommen bin, hat also einen großen Antheil an der Entdeckung dieses einfachen und allgemeinen Gesetzes, welches hier, seiner Wichtigkeit wegen, noch auf eine andere Art hergeleitet werden mag.

Zusatz 3. Wenn sich die Durchschnittspunkte a, d, f der Diagonalen der drei Vierecke AA'B'B, BB'C'C und CC'D'D in Einem Hauptbogen mn befinden, so ist ABCD $\backsim$ A'B'C'D', und hiernach kann die Aufgabe im §. 222 ebenfalls sehr einfach aufgelöset werden.

§. 225.

In Fig. 115 sei WABCDE $\backsim$ W'A'B'C'D'E', dann schneiden sich W'A und WA', W'B und WB', W'C und WC', W'D und WD', W'E und WE' in den Punkten a, b, c, d, e auf Einem Hauptbogen mm nach §. 222 und nach §. 213 ist VEeE' ein Proportional-Viereck mit den P. Punkten D, D' q, p und dem P. M. Punkte d, die Diagonale EE' dieses Vierecks theilt es in zwei Dreiecke, und zieht man die Scheitellinien ED' und E'D, welche die Diagonalen des Vierecks DD'E'E sind, und sich in α schneiden mögen, so ist α der P.. M. Punkt des Dreiecks EVE' und dieser liegt nach §. 215 mit der Ecke e des Dreiecks EeE und dem Proportional-Mittelpunkte d des P. Vierecks EVE'e in Einem Hauptbogen mm; was aber vom Durchschnitts-Punkte α der Diagonalen des Vierecks DD'E'E bewiesen worden ist, kann ebenso von den Durchschnitts-Punkten der Diagonalen der übrigen Vierecke CC'D'D, BB'C'C, AA'B'B und auch der aus ihnen zusammengesetzten Vierecke bewiesen werden.

Zusatz. Es ist WPVABCDE $\backsim$ rPP'abcde und W'VP'A'B'C'D' $\backsim$ rPP'abcde nach §. 184, und hieraus folgt noch WPVABCDE $\backsim$ W'V'P'A'B'C'D', und für diese metrischen Bestimmungen kann man also unmittelbar eine Reihe von Proportionen und zwar jede derselben in drei verschiedenen Formen nach §. 183 angeben.

§. 226.

Lehrsatz. Wenn in Fig. 116 die Vierecke AA'B'B und BB'C'C sich zum Vierecke AA'C'C ergänzen und die Linie PP', welche durch die Durchschnitts-Punkte D, F, E der Diagonalen der genannten Vierecke geht, die Seiten AA', BB', CC' in L, M, N schneidet, und man ferner vom Durchschnitts-Punkte V der Seiten ABC und A'B'C' die Linie VD zieht, welche die Seiten AA' und BB' des zu D gehörigen Vierecks in l und m schneidet, ebenso die Linie VE zieht, welche die Seiten AA' und CC' des zu E gehörigen Vierecks in l' und n, und auch noch VF zieht, wovon die Seiten BB' und CC' des zu F gehörigen Vierecks in m' und n' geschnitten werden, so liegen die Punkte L, m, n, ferner l, M, n' endlich l' m' N jedesmal in einem Hauptbogen, welcher eine Mediale des Vierecks AA'C'C ist (BB' ist die andere Me-

diale), welches also auf drei verschiedene Weisen als ein P. Viereck angesehen werden kann.

Beweis. Da das Dreieck VCC′ ein P. Dreieck ist für die Punkte A, A′, n und den P. M. Punkt E, so ist

$$\frac{\sin CA}{\sin VA} \cdot \frac{\sin VA'}{\sin C'A'} \cdot \frac{\sin C'n}{\sin Cn} = 1 \text{ und also}$$

$$\frac{\sin C'n}{\sin Cn} = \frac{\sin VA}{\sin VA'} \cdot \frac{\sin A'C'}{\sin AC},$$

und danach §. 220 ist $\frac{\sin AL}{\sin A'L} = \frac{\sin VA'}{\sin VA} \cdot \frac{\sin AC}{\sin A'C'} \cdot \frac{\sin AB}{\sin A'B'} \cdot \frac{\sin B'C'}{\sin BC}$, so erhält man $\frac{\sin AL}{\sin A'L} \cdot \frac{\sin C'n}{\sin Cn} = \frac{\sin AA}{\sin A'B'} \cdot \frac{\sin B'C'}{\sin BC}$ oder auch

$$\frac{\sin AL}{\sin A'L} \cdot \frac{\sin A'B'}{\sin C'B'} \cdot \frac{\sin C'n}{\sin Cn} \cdot \frac{\sin CB}{\sin AB} = 1,$$

d. h. AA′C′C ist ein P. Viereck für die Punkte L, B′, n, B. Da ferner BVB′ ein P. Dreieck für die Punkte A, A′, m und den P. M. Punkt D ist, so ist

$$\frac{\sin BA}{\sin VA} \cdot \frac{\sin VA'}{\sin B'A'} \cdot \frac{\sin B'm}{\sin Bm} = 1 \text{ und also } \frac{\sin Bm}{\sin B'm}$$
$$= \frac{\sin VA'}{\sin VA} \cdot \frac{\sin BA}{\sin B'A'} \text{ und also } \frac{\sin Bm}{\sin B'm} \cdot \frac{\sin C'n}{\sin Cn} = \frac{\sin BA}{\sin B'A'} \cdot \frac{\sin A'C'}{\sin AC}$$ oder auch

$$\frac{\sin Bm}{\sin B'm} \cdot \frac{\sin B'A'}{\sin C'A'} \cdot \frac{\sin C'n}{\sin Cn} \cdot \frac{\sin CA}{\sin BA} = 1,$$

daher ist m der P. M. Punkt des Vierecks AA′C′C und die drei Punkte L, m, n befinden sich also in Einem Hauptbogen.

Wie aber bewiesen ist, daß AA′C′C ein P. Viereck mit den Medialen B m B′ und L m n sei, ebenso wird bewiesen, daß es auch ein P. Viereck mit den Medialen BMB′ und lMn′ und auch ein P. Viereck mit den Medialen Bm′B′ und l′m′N sei.

Anmerkung. Da das Viereck AA′C′C in dreifacher Hinsicht ein P. Viereck ist, so kann es nach §. 213 Zusatz 2 in 81. Prop.-Vierecke zerlegt werden und es wird sich bald zeigen, daß diese Zahl noch beträchtlich gesteigert werden kann.

Wenn die Linien VABC und V′A′B′C′ ähnlich getheilt sind, so fallen die Linien VD, VE, VF mit der Linie DEF zusammen und die vorhin bewiesenen Sätze verlieren alle Bedeutung.

§. 227.

Lehrsatz. Wenn das Viereck AA'D'D Fig. 116* ein Proportional-Viereck sowohl für die Medialen BbB' und abd, als auch für die Medialen CcC' und acd ist, so hat man im Ganzen 36 Proportional-Vierecke, und die drei Linien ABCD, abcd und A'B'C'D' sind ähnlich getheilt, wenn sich auch AA', BB', CC', DD' nicht in Einem Punkte schneiden.

Beweis. Wenn sich AA', BB', CC', DD' in Einem Punkte, und also auch die drei Linien AD, ad, A'D' in Einem Punkte schneiden, so erhellet die Wahrheit der Behauptung unmittelbar nach §. 213 und §. 184. Wenn sich aber AA', BB', CC', DD' nicht in Einem Punkte schneiden, so ist doch nach der Annahme

1. $\frac{\sin Aa}{\sin A'a} \cdot \frac{\sin A'B'}{\sin D'B'} \cdot \frac{\sin D'd}{\sin 'Dd} \cdot \frac{\sin EB}{\sin AB} = 1$ und

2. $\frac{\sin Aa}{\sin A'a} \cdot \frac{\sin A'C'}{\sin D'C'} \cdot \frac{\sin D'd}{\sin Dd} \cdot \frac{\sin DC}{\sin AC} = 1,$

und wird die erste Proportion durch die zweite dividirt, so hat man

3. $\frac{\sin AB \,.\, \sin DC}{\sin AC \,.\, \sin DB} = \frac{\sin A'B' \,.\, \sin D'C'}{\sin A'C' \,.\, \sin D'B'}$; daher ist ABCD ∽ A'B'C'D'.

Ferner folgt aus den Proportionen (1) und (2) nach §. 214

$\frac{\sin ab}{\sin db} \cdot \frac{\sin dD'}{\sin DD'} \cdot \frac{\sin DB}{\sin AB} \cdot \frac{\sin AA'}{\sin aA'} = 1,$ und

$\frac{\sin ac}{\sin dc} \cdot \frac{\sin dD'}{\sin DD'} \cdot \frac{\sin DC}{\sin AC} \cdot \frac{\sin AA'}{\sin aA'} = 1,$

und wird wieder die erste Proportion durch die zweite dividirt, so hat man

4. $\frac{\sin ab \,.\, \sin dc}{\sin ac \,.\, \sin db} = \frac{\sin AB \,.\, \sin DC}{\sin AC \,.\, \sin DB}$ und es ist also abcd ∽ ABCD und da ABCD ∽ A'B'C'D' ist, so ist auch abcd ∽ A'B'C'D,. Es bleibt noch zu beweisen, daß BB'D'D ein P. Viereck mit den P. Punkten b, C', d, C und ACC'A' ein P. Viereck mit den P. Punkten a, B', c, B sei. Da ABCD ∽ A'B'C'D' ist, so ist $\frac{\sin DC \,.\, \sin AB}{\sin BC \,.\, \sin AD} = \frac{\sin D'C' \,.\, \sin A'B'}{\sin B'C' \,.\, \sin A'D'}$ und da aus der Proportion (1) nach §. 214 folgt, daß BB'D'D ein P. Viereck für die Punkte A, b, A' d sei, so hat man

$\frac{\sin DA}{\sin BA} \cdot \frac{\sin Bb}{\sin B'b} \cdot \frac{\sin B'A'}{\sin D'A} \cdot \frac{\sin D'd}{\sin Dd} = 1,$

und wird diese Proportion mit der vorigen verbunden, so hat man

$\frac{\sin DC}{\sin BC} \cdot \frac{\sin Bb}{\sin B'b} \cdot \frac{\sin B'C'}{\sin D'C'} \cdot \frac{\sin D'd}{\sin Dd} = 1,$

d. h. DBB′D′ ist ein P. Viereck für die Punkte C, b, C′, d und den P. M. Punkt c.

Da ferner aus der Proportion (2) folgt, daß ACC′A′ ein P. Viereck mit den P. Punkten D, c, D′, a sei, so hat man

$$\frac{\sin CD}{\sin AD} \cdot \frac{\sin Aa}{\sin A'a} \cdot \frac{\sin A'D'}{\sin C'D'} \cdot \frac{\sin C'c}{\sin Cc} = 1$$ und wird

diese Gleichung mit der Gleichung $\frac{\sin CD \,.\, \sin AB}{\sin CB \,.\, \sin AD}$

$= \frac{\sin C'D' \,.\, \sin A'B'}{\sin B'C' \,.\, \sin A'D'}$ verbunden, so erhält man

$$\frac{\sin CB}{\sin AB} \cdot \frac{\sin Aa}{\sin A'a} \cdot \frac{\sin A'B'}{\sin C'B'} \cdot \frac{\sin C'c}{\sin Dc} = 1,$$

und hiernach ist ACC′A′ ein P. Viereck für die Punkte B, a, B, c und den P. M. Punkt b.

Da nun nach der Annahme AA′D′D ein P. Viereck mit den Medialen BbB′ und abd, ferner ein P. Viereck mit den Medialen CcC′ und acd, und nach dem Beweise BB′D′D ein P. Viereck mit den Medialen CcC′ und bcd, ferner AA′C′C ein P. Viereck mit den Medialen BbB′ und abc ist, so bestehen diese vier P. Vierecke nach §. 214 überhaupt aus 36 P. Vierecken.

Zusatz 1. Kommt noch eine dritte und vierte Proportional-Theilung durch die Linien EE′, FF′ rc. hinzu, so ist überhaupt ABCDEF rc. ∽ abcdef rc. ∽ A′B′C′D′E′F′ rc. und die Menge der P. Vierecke ist dann noch beträchtlich größer.

Zusatz 2. Von den drei Linien ABCD, abcd und A′B′C′D′ kann jede als Mediale angesehen werden.

Zusatz 3. Wenn AA′D′D ein P. Viereck mit den Medialen BbB′ und abd, ferner CC′ zwischen AD und A′D′ so gezogen wird, daß ABCD ∽ A′B′C′D′ ist, so ist auch AA′D′D ein P. Viereck mit den Medialen CcC′ und acd.

Zusatz 4. Wird von dem bewiesenen Satze auf die im §. 226 behandelte Construction Anwendung gemacht, so folgt, daß in Fig. 116

Al′lLA′ ∽ Bm′MmB′ ∽ CNn′nC′ sei,

und daß durch die Linien ABC, l′m′N, lMn′, Lmn, A′B′C′, AA′, BB′, CC′ eine große Menge von P. Vierecken bestimmt wird. Unter diesen findet sich namentlich das P. Viereck l′LnN mit den Medialen mMm′ und lMn′.

§. 228.

Lehrsatz. Wenn in Fig. 117 dieselben P. Vierecke vorkommen, wie im §. 227, und man eine Seite AaA′ verlängert, so

werden dadurch die Linien BbB', CcC', DdD' ꝛc. in den Punkten b', c', d', ꝛc. einander ähnlich getheilt.

Beweis. Es ist $\frac{\sin c'C'}{\sin c'C} = \frac{\sin C'A'}{\sin UA'} \cdot \frac{\sin UA}{\sin CA}$ und $\frac{\sin b'B'}{\sin b'B} = \frac{\sin B'A'}{\sin UA'} \cdot \frac{\sin UA}{\sin BA}$; wird also die erste Proportion durch die zweite dividirt, so hat man

$$\frac{\sin c'C'}{\sin c'C} : \frac{\sin b'B'}{\sin b'B} = \frac{\sin C'A'}{\sin B'A'} \cdot \frac{\sin BA}{\sin CA},$$

und da BB'C'C ein P. Viereck für die P. Punkte A, b, A', c und also

$$\frac{\sin C'A'}{\sin B'A'} \cdot \frac{\sin B'b}{\sin Bb} \cdot \frac{\sin BA}{\sin CA} \cdot \frac{\sin Cc}{\sin C'c} = 1$$

ist, so erhält man aus diesen beiden Proportionen $\frac{\sin c'C'}{\sin c'C}$: $\frac{\sin b'B'}{\sin b'B} = \frac{\sin Bb \,.\, \sin C'c}{\sin B'b \,.\, \sin Cc}$, oder auch $\frac{\sin c'C' \,.\, \sin cC}{\sin c'C \,.\, \sin cC'}$ $= \frac{\sin b'B' \,.\, \sin bB}{\sin b'B \,.\, \sin bB'}$, und es sind also die beiden Linien BbB'b' und CcC'c' einander ähnlich getheilt. Ebenso wird der Beweis geführt, daß auch DdD'd' der Linie BbB'b' und also auch der Linie CcC'c' ähnlich getheilt sei.

§. 229.

Lehrsatz. Wenn in Fig. 118 ein Viereck AA'C'C durch eine Linie BB', die aber nicht durch den Durchschnitts-Punkt zweier Seiten desselben geht, in zwei Vierecke AA'B'B und BB'C'C getheilt wird, und die Linie PP' durch die Durchschnitts-Punkte der Diagonalen dieser drei Vierecke geht, so kann man BB' als eine Mediale des Vierecks AA'C'C ansehen und unzählige zweite Medialen construiren; für jede solche Mediale abc gibt es immer einen Hauptbogen a'b'c', welcher die Lage hat, daß die drei Linien AaA'a', BbB'b', CcC'c' dadurch harmonisch getheilt werden — endlich schneiden sich jede zwei solche zusammengehörige Hauptbogen auf der Linie PP'.

Beweis. Man verlängere abc, bis PP' davon in α geschnitten wird, und wenn PP' die Linien AA', BB', CC' in L, M, N schneidet, so bestimme man auf ABC einen Punkt x so, daß xABC ∽ αabc ist, ziehe xα, wovon A'B'C' in x' getroffen werden mag; dann ist nach §. 227 überhaupt xABC ∽ x'A'B'C' ∽ αabc.

Man bestimme auch noch auf ABC und A'B'C' den Punkt y beliebig, und den Punkt y' so, daß ABCy ∽ A'B'C'y' sei, und

ziehe yy', welche von abc in β getroffen werde. Dann ist nach §. 227 überhaupt xABCy ∽ αabcβ ∽ x'A'B'C'y', und nach §. 224 oder auch §. 225 schneiden sich die Diagonalen der beiden Vierecke xx'A'A und xx'y'y auf der Linie PP' in den Punkten D und E. Zieht man nun VD und VE, so geht nach §. 226 die Linie VD durch a und VE durch β. Werden nun xx' und yy' verlängert, bis sie sich in z schneiden, so ist zy'βy nach §. 199 harmonisch getheilt. Werden AA', BB', CC' von xx'z in a', b', c' geschnitten, so sind nach §. 228 die Linien AaA'a', BbB'b', CcC'c' der Linie yβy'z ähnlich, und also auch sie harmonisch getheilt; die beiden Linien abc und a'b'c' schneiden sich aber im Punkte α der Linie PP'.

§. 230.

Lehrsatz. Wenn überhaupt zwei Hauptbogen ABCDE ꝛc. und A'B'C'D'E' ꝛc. in Fig. 119 ähnlich getheilt sind, und die Linien AA', BB', CC', DD', EE', ꝛc., wodurch die homologen Punkte mit einander werden, sich nicht in Einem Punkte schneiden, so kann man diese Verbindungs-Linien auf unendlich viele Arten durch zwei Hauptbogen abcde ꝛc. und a'b'c'd'e' ꝛc., welche selbst ähnlich getheilt sind, harmonisch theilen und die Durchschnitts-Punkte aller dieser Linienpaare befinden sich in Einem Hauptbogen mm, und zwar in demjenigen, welcher durch die Durchschnitts-Punkte der Diagonalen der Vierecke AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E, ꝛc. und auch der daraus zusammengesetzten Vierecke AA'C'C, BB'D'D, CC'E'E, AA'D'D, BB'E'E, AA'E'E ꝛc. geht.

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet aus §. 229, aus §. 227 und aus §. 224 oder auch §. 225, wenn nur die Linie abcde so gezogen wird, daß AA'B'B ein P. Viereck in Ansehung der Punkte B, a, B', c wird, was auf unendlich viele Arten möglich ist.

Zusatz. Da auch umgekehrt die Linien abcde ꝛc. und a'b'c'd'e' ꝛc. ähnlich getheilt sind, und die Verbindungslinien aa', bb', cc', dd', ee', ꝛc. von den Linien ABCDE ꝛc. und A'B'C'D'E' ꝛc. harmonisch getheilt werden, so befindet sich der Durchschnitts-Punkt V dieser Linien in demjenigen Hauptbogen, welcher durch die Durchschnitts-Punkte der Diagonalen der Vierecke aa'b'b, bb'c'c cc'd'd, dd'e'e ꝛc. und auch der daraus zusammengesetzten Vierecke geht.

Anmerkung. Das vorstehende allgemeine Gesetz ist unstreitig das interessanteste, was die Lehre von den Lineal-Constructionen aufzuweisen hat; es hat auch in der Planimetrie eine ebenso allgemeine Geltung und eine ebenso große Einfachheit.

§. 231.

Lehrsatz. Wenn in einem P. Vierecke die beiden Medialen gezogen werden, so wird es dadurch in vier Vierecke zerlegt, und

jedes derselben ist wieder ein P. Viereck in Hinsicht auf zwei Medialen, deren Richtungen man dadurch erhält, daß man den Durchschnitts-Punkt der Diagonalen eines solchen Vierecks mit den Durchschnitts-Punkten der Diagonalen der beiden Vierecke verbindet, welche mit jenem Vierecke eine Seite gemein haben.

Beweis. In Fig. 120 seien FKH und EKG die beiden Medialen des Vierecks ABCD, und e, i, m, n seien die Durchschnitts-Punkte der Diagonalen der Vierecke AFKE, EDHK, CHKG, GKFB, dann ist eimn ein zweites Viereck, wovon die Seiten und Medialen des Vierecks ABCD in a, b, c, d, f, g, h, k, l, o, p, q geschnitten werden; ferner mögen sich AD und FH in V, AB und EG aber in W schneiden; dann ist nach §. 220

$$\frac{\sin Aa}{\sin Fa} = \frac{\sin VF}{\sin VA} \cdot \frac{\sin AE}{\sin FK} \cdot \frac{\sin AD}{\sin FH} \cdot \frac{\sin KH}{\sin ED} \text{ und}$$

$$\frac{\sin Ec}{\sin Kc} = \frac{\sin VK}{\sin VE} \cdot \frac{\sin AE}{\sin FK} \cdot \frac{\sin ED}{\sin KH} \cdot \frac{\sin FH}{\sin AD},$$

und also

$$1. \quad \frac{\sin Aa}{\sin Fa} \cdot \frac{\sin Kc}{\sin Ec} = \frac{\sin VF \cdot \sin VE}{\sin VA \cdot \sin VK} \cdot \left(\frac{\sin AD \cdot \sin KH}{\sin FH \cdot \sin ED}\right)^2.$$

Ferner hat man

$$\frac{\sin Fb}{\sin Kb} = \frac{\sin WK}{\sin WF} \cdot \frac{\sin BF}{\sin GK} \cdot \frac{\sin FA}{\sin KE} \cdot \frac{\sin GE}{\sin AB} \text{ und}$$

$$\frac{\sin Ad}{\sin Ed} = \frac{\sin WE}{\sin WA} \cdot \frac{\sin FA}{\sin KE} \cdot \frac{\sin AB}{\sin EG} \cdot \frac{\sin GK}{\sin FB}, \text{ also}$$

$$2. \quad \frac{\sin Fb}{\sin Kb} \cdot \frac{\sin Ed}{\sin Ad} = \frac{\sin WA \cdot \sin WK}{\sin WF \cdot \sin WE} \cdot \left(\frac{\sin BF \cdot \sin GE}{\sin GK \cdot \sin AB}\right)^2.$$

Da nun aber $\frac{\sin VA}{\sin VE} : \frac{\sin VF}{\sin VK} = \frac{\sin WA}{\sin WE} : \frac{\sin WF}{\sin WK}$ ist nach §. 186, so erhält man, wenn die Proportion (1) multiplicirt wird mit der Proportion (2), offenbar

$$3. \quad \frac{\sin Aa}{\sin Fa} \cdot \frac{\sin Fb}{\sin Kb} \cdot \frac{\sin Kc}{\sin Ec} \cdot \frac{\sin Ed}{\sin Ad}$$
$$= \left(\frac{\sin AD}{\sin ED} \cdot \frac{\sin EG}{\sin KG} \cdot \frac{\sin KH}{\sin FH} \cdot \frac{\sin FB}{\sin AB}\right)^2.$$

Weil nun aber nach der Annahme und nach §. 214 AFKE ein P. Viereck mit den P. Punkten D, G, H, B, und also $\frac{\sin AD}{\sin ED} \cdot \frac{\sin EG}{\sin KG} \cdot \frac{\sin KH}{\sin FH} \cdot \frac{\sin FB}{\sin AB} = 1$ ist, so ist auch $\frac{\sin Aa}{\sin Fa} \cdot \frac{\sin Fb}{\sin Kb} \cdot \frac{\sin Kc}{\sin Ec} \cdot \frac{\sin Ed}{\sin Ad} = 1$, und also auch AFKE ein P. Viereck mit den Medialen ac und bd, welche sich der Annahme gemäß im Durchschnitts-Punkte e der Diagonalen

dieses Vierecks schneiden. Dieses Proportional-Viereck hat also die im §. 218 behandelte Eigenschaft.

Ebenso wird der Beweis von den drei übrigen Vierecken FKGB, EDHK und CGKH geführt.

Zusatz. Wenn umgekehrt eines dieser vier Vierecke in dem bezeichneten Sinne ein P. Viereck ist, so ist auch ABCD ein P. Viereck mit den P. Punkten E, F, G, H.

§. 232.

Lehrsatz. Wenn in Fig. 121 die Linie mm durch die Durchschnitts-Punkte α, β, γ, δ ꝛc. der Diagonalen der Vierecke AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E, u. s. w. geht und man construirt in diesen Vierecken die zweiten Medialen FαF', GβG', HγH', IδI' ꝛc. nach §. 218, so läßt sich die vorige Construction auf folgende Art wiederholen: man wähle in AA' einen beliebigen Punkt A'', ziehe A''B', wovon FF' in α' geschnitten wird, und dann A'α', wovon BB' in B'' getroffen wird; dann B''C', wovon GG' in β' getroffen wird, und dann B'β', wovon CC' in C'' getroffen wird; dann C''D', wovon HH' in γ' getroffen wird, und dann C'γ', welche DD' in D'' trifft; ferner D''E', welche HH' in δ' trifft und dann D'δ', wovon EE' in E'' getroffen wird, u. s. w.: und es liegen dann die Punkte α', β', γ', δ' ꝛc. in Einem Hauptbogen; ferner liegen auch die Punkte A'', B'', C'', D'', E'', ꝛc. in Einem Hauptbogen; endlich kann diese Construction nach allen vier Seiten hin ohne Ende fortgesetzt oder auch wiederholt werden.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen erhellet unmittelbar aus §. 231.

Zusatz. Man kann auch zwei oder mehrere von den Vierecken AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E ꝛc., welche sich durch ihre Lage dazu eignen, zu einem Vierecke zusammenfassen, und indem man in Beziehung auf sie die vorige Construction wiederholt, über das vorige Netz von Figuren ein neues verbreiten. Unzählige Vierecke lassen sich hiernach construiren, wovon jedes in mehr als einer Hinsicht ein Proportional-Viereck ist.

§. 233.

Lehrsatz. Wenn in Fig. 122 EG und FH die Medialen des P. Vierecks ABCD sind, ferner aa'a'' die Linie ist, welche durch die Durchschnitts-Punkte der Diagonalen der drei Vierecke AFOE, EOHD und AFHD geht, ebenso bb'b'' durch die Durchschnitts-Punkte der Diagonalen der drei Vierecke FBGO, OGCH und FBCH geht, endlich cc'c'' durch die Durchschnitts-Punkte der drei Vierecke ABGE, EGCD und ABCD geht, so schneiden sich die drei Linien aa'a'', bb'b'', cc'c'' jedesmal in Einem Punkte.

Beweis. Man verlängere DA und HF bis zum Durchschnitts-Punkte V, ferner AB und DC bis zum Durchschnitts-Punkte W, dann ist nach §. 220

$$\frac{\sin Aa}{\sin Fa} = \frac{\sin VF}{\sin VA} \cdot \frac{\sin AE}{\sin FO} \cdot \frac{\sin AD}{\sin FH} \cdot \frac{\sin OH}{\sin ED},$$

ferner ist nach §. 186 $\frac{\sin WH}{\sin WD} = \frac{\sin HF}{\sin DA} \cdot \frac{\sin VA}{\sin VF}$, und wird dieser Werth benutzt, so hat man offenbar

$$\frac{\sin Aa}{\sin Fa} = \frac{\sin WD}{\sin WH} \cdot \frac{\sin AE}{\sin FO} \cdot \frac{\sin OH}{\sin DE}.$$

Ganz ebenso findet man $\frac{\sin Fb}{\sin Bb} = \frac{\sin WH}{\sin WC} \cdot \frac{\sin FO}{\sin BG} \cdot \frac{\sin GC}{\sin OH}$

und auch noch $\frac{\sin Ac}{\sin Bc} = \frac{\sin WD}{\sin WC} \cdot \frac{\sin AE}{\sin BG} \cdot \frac{\sin CG}{\sin DE}$, und da aus den beiden ersten Proportionen durch Multiplikation folgt $\frac{\sin Aa}{\sin Fa} \cdot \frac{\sin Fb}{\sin Bb} = \frac{\sin WD}{\sin WC} \cdot \frac{\sin AE}{\sin BG} \cdot \frac{\sin CG}{\sin DE}$, so ist

1. $\frac{\sin Aa}{\sin Fa} \cdot \frac{\sin Fb}{\sin Bb} = \frac{\sin Ac}{\sin Bc}$; ebenso findet man

2. $\frac{\sin Ea'}{\sin Oa'} \cdot \frac{\sin Ob'}{\sin Gb'} = \frac{\sin Ec'}{\sin Gc'}$ und

3. $\frac{\sin Da''}{\sin Ha''} \cdot \frac{\sin Hb''}{\sin Cb''} = \frac{\sin Dc''}{\sin Cc''}$;

diese drei Proportionen gelten immer, wenn auch ABCD kein P. Viereck ist.

Weil nun aber dieses Viereck ein P. Viereck ist, so kann man in AD einen beliebigen Punkt P wählen und in CB einen Punkt R so bestimmen, daß RBGC ∽ PAED ist; dann ist aber nach §. 227 überhaupt PAED ∽ QFOH ∽ RBGC, wenn FH von PR in Q geschnitten wird, und die Linien aa'a'', bb'b'', cc'c'', wovon PQR in α, β, γ getroffen werden mag, gehen nun auch nach §. 224 oder §. 225 durch die Durchschnitts-Punkte der Diagonalen der Vierecke PQFA, QRBF und PRBA; daher ist nun auch noch

$$\frac{\sin P\alpha}{\sin Q\alpha} \cdot \frac{\sin Q\beta}{\sin R\beta} = \frac{\sin P\gamma}{\sin R\gamma},$$

welche Lage auch immer die Linie PR haben mag, wenn nur jedesmal PAED ∽ RBGC ist.

Schneiden sich aber aa'a'' und bb'b'' in einem Punkte, so kann man die Linie PR durch diesen Punkt α legen und es ist dann $Q\beta = Q\alpha$ und $R\beta = R\alpha$; daher ist jetzt die Proportion

einfacher die folgende $\frac{\sin Pa}{\sin Ra} = \frac{\sin P\gamma}{\sin R\gamma}$, d. h. der Punkt γ ist mit a und also auch mit β derselbe. Daher schneiden sich aa′a″, bb′b″ und cc′c″ in Einem Punkte.

Zusatz 1. Man kann offenbar dem obigen Satze gemäß noch drei solche Linien construiren, welche sich in Einem Punkte schneiden; die erste geht durch die Durchschnittspunkte der Diagonalen der drei Vierecke AFOE, FBGO und ABGE, die zweite geht durch die Durchschnitts-Punkte der Diagonalen der drei Vierecke EOHD, OGCH und EGCD, die dritte endlich geht durch die Durchschnitts-Punkte der Diagonalen der drei Vierecke AFHD, FBCH und ABCD.

Zusatz 2. Zerlegt man ein P. Viereck durch zwei Medialen in acht neue P. Vierecke, so hat man neue P. Vierecke und construirt man für jedes den Durchschnitts-Punkt seiner Diagonalen, so bestimmen diese neuen Punkte nach §. 213 wieder neue andere Proportional-Vierecke. Nach derselben Regel kann man aus diesen wieder neun neue P. Vierecke finden, und hiermit bis ins Unendliche fortfahren.

§. 234.

Lehrsatz. Wenn die Ecken zweier Dreiecke ABC und A′B′C′ in Fig. 123 auf drei Hauptbogen AA′, BB′, CC′ liegen, welche sich in Einem Punkte schneiden, so schneiden sich ihre Seiten in den sechs Punkten a, a′, b, b′, c, c′ so, daß ist

$$1.\ \frac{\sin Ac \cdot \sin Ac'}{\sin Bc \cdot \sin Bc'} \cdot \frac{\sin Ba \cdot \sin Ba'}{\sin Ca \cdot \sin Ca'} \cdot \frac{\sin Cb \cdot \sin Cb'}{\sin Ab \cdot \sin Ab'} = 1,$$

$$2.\ \frac{\sin A'a' \cdot \sin A'b}{\sin B'a' \cdot \sin B'b} \cdot \frac{\sin B'b' \cdot \sin B'c}{\sin C'c \cdot \sin C'b'} \cdot \frac{\sin C'c' \cdot \sin C'a}{\sin A'a \cdot \sin A'c'} = 1.$$

Beweis. Da nach der Annahme die Verbindungslinien AA′, BB′, CC′ der beiden Dreiecke ABC und A′B′C′ sich in Einem Punkte Q schneiden, so schneiden sich die correspondirenden Seiten BC und B′C′, AB und A′B′, AC und A′C′ nach §. 211 in drei Punkten F, G, H, welche in Einem Hauptbogen liegen. Da indessen die Figur jetzt eine sehr veränderte Beschaffenheit hat, so wird es Anfängern, welche die aufgestellten wichtigen Proportionen gehörig begreifen wollen, nicht unlieb sein, hier den Beweis noch einmal zu finden. Es ist nach §. 186

$$\frac{\sin B'A'}{\sin B'G} = \frac{\sin A'Q}{\sin AQ} : \frac{\sin GB}{\sin AB} \text{ und}$$

$$\frac{\sin C'A'}{\sin C'H} = \frac{\sin A'Q}{\sin AQ} : \frac{\sin HC}{\sin AC},$$

und wird die erste Proportion durch die zweite dividirt, so hat man

$$\frac{\sin B'A'}{\sin B'G} \cdot \frac{\sin C'H}{\sin C'A'} = \frac{\sin HC}{\sin AC} \cdot \frac{\sin AB}{\sin GB}$$ oder auch
$$\frac{\sin HC}{\sin AC} \cdot \frac{\sin AB}{\sin GB} \cdot \frac{\sin GB'}{\sin A'B'} \cdot \frac{\sin A'C'}{\sin HC'} = 1;$$
daher ist AGA'H ein Proportional-Viereck mit den P. Punkten C, B, B', C'; die beiden Diagonalen dieses Vierecks sind AA' und GH.

Wird nun GH von BC in F und von B'C' in F' geschnitten, so ist
$$\frac{\sin F'G}{\sin F'H} = \frac{\sin GB'}{\sin A'B'} \cdot \frac{\sin A'C'}{\sin HC'} \text{ und } \frac{\sin FG}{\sin FH} = \frac{\sin GB}{\sin AB} \cdot \frac{\sin AC}{\sin HC} \text{ und also } \frac{\sin F'G}{\sin F'H} \cdot \frac{\sin FH}{\sin FG} = \frac{\sin HC}{\sin AC} \cdot \frac{\sin AB}{\sin GB} \cdot \frac{\sin GB'}{\sin A'B'} \cdot \frac{\sin A'C'}{\sin HC'} = 1 \text{ oder } \frac{\sin FG}{\sin FH} = \frac{\sin F'G}{\sin F'H},$$
es fallen also die beiden Punkte F und F' zusammen; daher schneiden sich die correspondirenden Seiten der beiden Dreiecke ABC und A'B'C' in den drei Punkten F, G, H eines Hauptbogens FGH.

Nun aber ist der Beweis des eigentlichen Satzes leicht. Es finden nämlich nach §. 186 noch die drei folgenden Proportionen Statt:

1. $\frac{\sin FB}{\sin FC} = \frac{\sin Bc}{\sin Ac} \cdot \frac{\sin Ab'}{\sin Cb'}$,
2. $\frac{\sin HC}{\sin HA} = \frac{\sin Ca}{\sin Ba} \cdot \frac{\sin Bc'}{\sin Ac'}$,
3. $\frac{\sin GA}{\sin GB} = \frac{\sin Ab}{\sin Cb} \cdot \frac{\sin Ca'}{\sin Ba'}$.

Werden sie multiplicirt, so hat man
$$\frac{\sin FB}{\sin FC} \cdot \frac{\sin HC}{\sin HA} \cdot \frac{\sin GA}{\sin GB} = \frac{\sin BC \,.\, \sin Bc'}{\sin Ac \,.\, \sin Ac'} \cdot \frac{\sin Ab \,.\, \sin Ab'}{\sin Cb \,.\, \sin Cb'} \cdot \frac{\sin Ca \,.\, \sin Ca}{\sin Ba \,.\, \sin Ba'},$$
und da die drei Punkte F, G, H in Einem Hauptbogen liegen, so ist $\frac{\sin FB}{\sin FC} \cdot \frac{\sin HC}{\sin HA} \cdot \frac{\sin GA}{\sin GB} = 1$, daher ist auch das Product der Verhältnisse auf der rechten Seite $= 1$, und hiermit ist die erste im Satze aufgestellte Proportion bewiesen. Ebenso wird aber auch die zweite bewiesen.

Zusatz 1. Wenn sich die beiden Dreiecke ABD und A'B'C' nach dem durch eine von den beiden Proportionen ausge-

drückten Gesetze schneiden, so liegen die drei Punkte F, G, H in einem Hauptbogen und es schneiden sich also dann die Linien AA″, BB′, CC′ in Einem Punkte Q.

Zusatz 2. Wenn die Punkte a und a′ zusammenfallen, ferner b und b′, und noch c und c′, so befinden sich die Ecken des Dreiecks A′B′C′ in den Punkten α, β, γ der Seiten des Dreiecks ABC, und der Satz ist dann mit dem im §. 190 behandelten Satze einerlei.

Anmerkung. Die sechs Punkte a, a′, b, b′, c, c′, bestimmen ein Sechseck aa′bb′cc′ und diese Ecken liegen immer im Umfange eines sphärischen Kegelschnitts, so daß ein Kugelschnitt, welcher durch fünf von diesen Punkten geschrieben ist, immer auch durch den sechsten geht. Und in der That ist jede von den beiden im Satze aufgestellten Proportionen mit den in meinem Grundrisse der analytischen Sphärik §. 65 und §. 66 für die sphärischen Kegelschnitte hergeleiteten Proportionen im Wesen dieselbe. Das Sechseck aa′bb′cc′, dessen Gegenseiten sich in den drei Punkten F, G, H Eines Hauptkreises schneiden, kann auch in der Sphärik das mystische Sechseck heißen, da das analoge Sechseck der Planimetrie diesen Namen führt.

§. 235.

Lehrsatz. Wenn in Fig. 124 aa′bb′cc′ ein mystisches Sechseck ist, so bestimmen die Seiten cc′, bb′, aa′ die Seiten eines Dreiecks ABC, und werden die Linien Aa, Aa′, Bb, Bb′, Cc, Cc′ gezogen, so ist immer

$$\frac{\sin ACc \,.\, \sin ACc'}{\sin BCc \,.\, \sin BCc'} \cdot \frac{\sin BAa \,.\, \sin BAa'}{\sin CAa \,.\, \sin CAa'} \cdot \frac{\sin CBb \,.\, \sin CBb'}{\sin ABb \,.\, \sin ABb'} = 1.$$

Beweis. Nach §. 178 gelten die folgenden sechs Proportionen:

$$\frac{\sin Ac}{\sin Bc} = \frac{\sin AC \,.\, \sin ACc}{\sin BC \,.\, \sin BCc},$$
$$\frac{\sin Ac'}{\sin Bc'} = \frac{\sin AC \,.\, \sin ACc'}{\sin BC \,.\, \sin BCc'},$$
$$\frac{\sin Ba}{\sin Ca} = \frac{\sin AB \,.\, \sin BAa}{\sin AC \,.\, \sin CAa},$$
$$\frac{\sin Ba'}{\sin Ca'} = \frac{\sin AB \,.\, \sin BAa'}{\sin AC \,.\, \sin CAa'},$$
$$\frac{\sin Cb}{\sin Ab} = \frac{\sin BC \,.\, \sin CBb}{\sin BA \,.\, \sin ABb},$$

$$\frac{\sin Cb'}{\sin Ab'} = \frac{\sin BC \,.\, \sin CBb}{\sin BA \,.\, \sin ABb'};$$

werden diese sechs Proportionen multiplicirt, so ist das Product der Verhältnisse auf der linken Seite = 1, und so geht unmittelbar die gesuchte Proportion hervor.

Zusatz. Wenn umgekehrt die im Satze aufgestellte Proportion gilt, so schneiden sich AA', BB', CC' in Einem Punkte, oder es ist aa'bb'cc' ein mystisches Sechseck.

§. 236.

Lehrsatz. Wenn in Fig. 125 aa'bb'cc' ein mystisches Sechseck ist, und man die drei Hauptdiagonalen ab', bc', ca' desselben zieht, so werden die Seiten AB, BC, AC des Dreiecks ABC davon in drei Punkten G', F', H' geschnitten, welche in Einem Hauptbogen liegen.

Beweis. Es ist $\frac{\sin G'B}{\sin G'A} = \frac{\sin Ba}{\sin Ca} \,.\, \frac{\sin Cb'}{\sin Ab'}$; $\frac{\sin H'A}{\sin H'C} = \frac{\sin Ac}{\sin Bc} \,.\, \frac{\sin Ba'}{\sin Ca'}$ und noch $\frac{\sin F'C}{\sin F B} = \frac{\sin Cb}{\sin Ab} \,.\, \frac{\sin Ac'}{\sin Bc'}$; werden aber diese drei Proportionen multiplicirt, so hat man

$$\frac{\sin Ac \,.\, \sin Ac'}{\sin Bc \,.\, \sin Bc'} \,.\, \frac{\sin Ba \,.\, \sin Ba'}{\sin Ca \,.\, \sin Ca'} \,.\, \frac{\sin Cb \,.\, \sin Cb'}{\sin Ab \,.\, \sin Ab'}$$

$$= \frac{\sin BG'}{\sin AG'} \,.\, \frac{\sin AH'}{\sin CH'} \,.\, \frac{\sin CF'}{\sin BF'},$$

und da der Ausdruck auf der linken Seite nach der Annahme, oder auch nach §. 234 gleich Eins ist, so ist auch der Ausdruck auf der rechten Seite = 1, und die Punkte F', G', H' befinden sich also in Einem Hauptkreise.

Zusatz 1. Ganz ebenso wird bewiesen, daß die Seiten A'B', B'C', A'C' des Dreiecks A'B'C' von den Haupt-Diagonalen ab', bc', ca' in drei Punkten geschnitten werden, welche sich in Einem Hauptkreise befinden.

Zusatz 2. Die drei Diagonalen ab', bc', ca' schneiden sich in den Punkten α, β, γ und da sich die Seiten $\beta\gamma$ und BC, $\alpha\beta$ und AB, $\alpha\gamma$ und AC der beiden Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und ABC in drei Punkten schneiden, welche in Einem Hauptbogen liegen, so schneiden sich nach §. 211 oder §. 234 die drei Linien Aα, Bβ, und Cγ in Einem Punkte.

Zusatz 3. Betrachtet man die Dreiecke Acb' und aA'a', so schneiden sich nach §. 234 die Seiten cb' und aa', Ac und A'a', Ab' und aA' in drei Punkten, welche in Einem Hauptbogen liegen, und daher schneiden sich die Verbindungs-Linien der correspondirenden Ecken, nämlich AA', ca' und

ab′ in Einem Punkte α; aus demselben Grunde geht die Linie BB′ durch den Durchschnitts-Punkt β der beiden Haupt-Diagonalen ab′ und c′b; endlich geht noch aus demselben Grunde die Linie CC′ durch den Durchschnitts-Punkt γ der beiden Hauptdiagonalen bc′ und a′c.

Daher ist der im vorigen Zusatze erwähnte Durchschnitts-Punkt der drei Linien $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ mit dem Durchschnitts-Punkte der drei Linien $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ oder auch mit dem Durchschnitts-Punkte der drei Linien AA′, BB′, CC′ derselbe.

Anmerkung. Die vielen P. Vierecke, welche sich bei der Construction eines mystischen Sechsecks nachweisen lassen, haben eine Menge von Relationen zu Folge, und um Wiederholungen zu vermeiden, brechen wir hier die Untersuchung ab, da wir in der Lehre vom Kreise auf denselben Gegenstand zurückkommen werden.

§. 237.

Aufgabe. Wenn in Fig. 126 durch die vier Punkte A, B, C, D drei Linienpaare AC und DB, AD und BC, AB und DC von einem siebenten Hauptbogen in Q und Q′, P und P′, R und R′ geschnitten werden, soll der Zusammenhang unter den Stücken dieser Linie gefunden werden.

Da $\frac{\sin DP}{\sin DA} = \frac{\sin PQ}{\sin RQ} \cdot \frac{\sin RB}{\sin AB}$ und $\frac{\sin CQ'}{\sin CA} = \frac{\sin P'Q'}{\sin RP'} \cdot \frac{\sin RB}{\sin AB}$ ist, so erhält man, wenn die zweite Proportion durch die erste dividirt wird $\frac{\sin CQ'}{\sin CA} \cdot \frac{\sin DA}{\sin DP} = \frac{\sin P'Q'}{\sin RP'} \cdot \frac{\sin RQ}{\sin PQ}$ und da auch $\frac{\sin R'Q'}{\sin R'P} = \frac{\sin CQ'}{\sin AC} \cdot \frac{\sin AD}{\sin PD}$ ist, so hat man die Proportion $\frac{\sin R'Q'}{\sin R'P} = \frac{\sin P'Q' \,.\, \sin RQ}{\sin RP' \,.\, \sin PQ}$ oder

$$1.\ \sin RQ \,.\, \sin R'P \,.\, \sin P'Q' = \sin R'Q' \,.\, \sin RP' \,.\, \sin PQ.$$

Aus den Proportionen $\frac{\sin DQ}{\sin DB} = \frac{\sin PQ}{\sin RP} \cdot \frac{\sin RA}{\sin AB}$ und $\frac{\sin CP'}{\sin CB} = \frac{\sin P'Q'}{\sin RQ'} \cdot \frac{\sin RA}{\sin AB}$ folgt $\frac{\sin CP'}{\sin CB} \cdot \frac{\sin DB}{\sin DQ} = \frac{\sin P'Q'}{\sin RQ'} \cdot \frac{\sin RP}{\sin PQ}$ und da $\frac{\sin R'P'}{\sin R'Q} = \frac{\sin CP'}{\sin BC} \cdot \frac{\sin BD}{\sin DQ}$ ist, so hat man

$$2.\ \sin RP \,.\, \sin R'Q \,.\, \sin P'Q' = \sin R'P' \,.\, \sin RQ'\ \sin PQ.$$

Aus den Proportionen $\frac{\sin AP}{\sin AD} = \frac{\sin PQ'}{\sin R'Q'} \cdot \frac{\sin R'C}{\sin DC}$ und $\frac{\sin BQ}{\sin BD} = \frac{\sin QP'}{\sin R'P'} \cdot \frac{\sin R'C}{\sin DC}$ folgt ferner $\frac{\sin BQ}{\sin BD} \cdot \frac{\sin AD}{\sin A'}$ $= \frac{\sin QP'}{\sin R'P'} \cdot \frac{\sin R'Q'}{\sin PQ'}$, und da $\frac{\sin RQ}{\sin RP} = \frac{\sin QB}{\sin DB} \cdot \frac{\sin A}{\sin A}$ ist, so hat man

3. $\sin RQ \,.\, \sin R'P' \,.\, \sin PQ' = \sin R'Q' \,.\, \sin RP \,.\, \sin P'Q$

Aus den Proportionen $\frac{\sin BP'}{\sin BC} = \frac{\sin P'Q}{\sin R'Q} \cdot \frac{\sin R'D}{\sin CD}$ und $\frac{\sin AQ'}{\sin AC} = \frac{\sin Q'P}{\sin R'P} \cdot \frac{\sin R'D}{\sin CD}$ folgt $\frac{\sin AQ'}{\sin AC} \cdot \frac{\sin BC}{\sin BP'}$ $= \frac{\sin Q'P}{\sin R'P} \cdot \frac{\sin R'Q}{\sin P'Q}$; und da $\frac{\sin RQ'}{\sin RP'} = \frac{\sin AQ'}{\sin AC} \cdot \frac{\sin BC}{\sin B'}$ ist, so folgt

4. $\sin RQ' \,.\, \sin R'P \,.\, \sin P'Q = \sin R'Q \,.\, \sin RP' \,.\, \sin PQ.$

Wird die erste Proportion durch die zweite dividirt, so erhäl[t] man noch

5. $\frac{\sin RQ}{\sin R'Q} \cdot \frac{\sin R'P}{\sin RP} = \frac{\sin R'Q'}{\sin RQ} \cdot \frac{\sin RP'}{\sin R'P'}.$

Aus der ersten und dritten Proportion erhält man

6. $\frac{\sin R'P}{\sin R'P'} \cdot \frac{\sin P'Q'}{\sin PQ'} = \frac{\sin RP'}{\sin RP} \cdot \frac{\sin PQ}{\sin P'Q}.$

Aus der ersten und vierten Proportion erhält man

7. $\frac{\sin RQ}{\sin RQ'} \cdot \frac{\sin P'Q'}{\sin P'Q} = \frac{\sin R'Q'}{\sin R'Q} \cdot \frac{\sin PQ}{\sin PQ'}.$

Es läßt sich aber zeigen, daß diese sieben Proportionen nu[r] verschiedene Formen des Ausdrucks einer einzigen sind.

Zusatz 1. Wenn die Transversale durch den Durchschnittspunkt eines der drei Linienpaare z. B. durch den Punk[t] V geht, so hat man

$\sin Vq \,.\, \sin Vp \,.\, \sin p'q' = \sin Vq' \,.\, \sin Vp' \,.\, \sin pq$

$\sin Vq \,.\, \sin Vp' \,.\, \sin pq' = \sin Vq' \,.\, \sin Vp \,.\, \sin p'q$

$$\frac{\sin Vp^2}{\sin Vp'^2} = \frac{\sin pq \,.\, \sin pq'}{\sin p'q \,.\, \sin p'q'},$$

$$\frac{\sin Vq^2}{\sin Vq'^2} = \frac{\sin pq \,.\, \sin p'q}{\sin p'q' \,.\, \sin pq'},$$

und diese Proportionen lassen sich umformen in $\cot Vp + \cot Vp' = \cot Vq + \cot Vq'$.

Zusatz 2. Nimmt man in der Linie $P'Q'Q'P'R'R$ willkührlich einen Punkt X an, und setzt man $\cot XP = a$, $\cot XP' = a'$, $\cot XQ = b$, $\cot XQ' = b'$ $\cot XR = c$, und $\cot XR' = c'$, so läßt sich jede der sieben obigen Proportionen umformen in die folgende Gleichung

$$(bb'-cc')(a+a') + (cc'-aa')(b+b') = (bb'-aa')(c+c').$$

§. 238.

Lehrsatz. Sind U, V, W die Durchschnitts-Punkte von drei Linienpaaren in Fig. 127, wovon jedes durch die vier Punkte A, B, C, D geht, und die von einem siebenten Hauptkreise in P, P', R, R', Q, Q' geschnitten werden, so kann man in ihm einen Punkt X willkürlich und dann die Punkte α, β, γ so bestimmen, daß $XR'\alpha R$, $XQ'\beta Q$, $XP'\gamma P$ harmonisch getheilt sind, und wenn dann die Hauptbogen $V\alpha$, $V\beta$ und $V\gamma$ gezogen werden, so schneiden sie sich jedesmal in Einem Punkte Z.

Beweis. Setzt man wieder $\cot XR = a$, $\cot XR' = a'$, $\cot XQ = b$, $\cot XQ' = b'$, $\cot XP = c$, $\cot VC' = c'$, so ist nach §. 237

$$(bb'-cc')(a+a') + (cc'-aa')(b+b) = (bb'-aa')(c+c),$$

ferner ist $\frac{1}{2}(a+a') = \cot X\alpha$, $\frac{1}{2}(b+b) = \cot X\beta$ und $\frac{1}{2}(c+c') = \cot X\gamma$ und also immer

$$(bb'-aa') \cot X\gamma = (bb'-cc') \cot X\alpha + (cc'-aa') \cot X\beta,$$

welche Lage auch immer die Linie XP haben mag. Drehet sich dieselbe um den Punkt X, und schneiden sich $V\alpha$ und $W\beta$ im Punkte Z, so ändern die Größen a, a', b, b', c, c', und also auch $\cot X\alpha$, $\cot X\beta$ und $\cot X\gamma$ ihre Werthe, und wenn XP durch Z gelegt wird, so sei

m der Werth von $bb'-cc'$,
n der Werth von $cc'-aa'$,

dann ist $m+n$ der Werth von $bb'-aa'$, daher hat man nun $(m+n) \cot X\gamma = m \,.\, \cot XZ + n \cot XZ$, oder auch $\cot X\gamma = \cot XZ$, d. h. die Linie XZ wird von $U\gamma$ im Punkte Z, d. h. im Durchschnitts-Punkte von $V\beta$ und $W\beta$ geschnitten; daher schneiden sich $V\alpha$, $W\beta$ und $U\gamma$ in Einem Punkte Z.

§. 239.

Aufgabe. Zieht man von drei Punkten A, B, C eines Hauptbogens ABC in Fig. 128 die drei Linien AV, BV, CV, welche sich in Einem Punkte schneiden, so machen sie mit dem ersten Hauptbogen und mit einander Winkel; man soll den Zusammenhang unter diesen Winkeln und den begrenzten Linien in Formeln ausdrücken.

Da $\cos VA = \cos AB \,.\, \cos VB + \sin AB \,.\, \sin VB \cos B$ und $\cos VC = \cos BC \,.\, \cos VB + \sin BC \,.\, \sin VB \cos B$ ist,

so erhält man cos VA . sin BC + cos VC . sin AB = cos VB (sin BC . cos AB + cos BC . sin AB) oder

1. cos VB . sin AC = cos VA . sin BC + cos VC . sin AB.

Da cos A = cos $\alpha\beta$. cos B + sin $\alpha\beta$. sin B . cos VB unt — cos C = — cos B . cos $\beta\gamma$ + sin B . sin $\beta\gamma$. cos VB ist, so erhält man cos A . sin $\beta\gamma$ + cos C . sin $\alpha\beta$ = cos B (sin $\beta\gamma$ cos $\alpha\beta$ + cos $\beta\gamma$. sin $\alpha\beta$ oder auch

2. cos B sin $\alpha\gamma$ = cos A . sin $\beta\gamma$ + cos C . sin $\alpha\beta$.

Fällt man vom Scheitel V ein Loth p auf AC, so ist sin AB $= \frac{\sin VA . \sin VB . \sin \alpha\beta}{\sin p}$, sin BC $= \frac{\sin VB . \sin VC . \sin \beta\gamma}{\sin p}$ und sin AC $= \frac{\sin VA . \sin VC . \sin \alpha\gamma}{\sin p}$ werden diese Werthe in der Gleichung 1. substituirt, so hat man

3. cot VB . sin $\alpha\gamma$ = cot VA . sin $\beta\gamma$ + cot VC . sin $\alpha\beta$.

Ferner ist sin $\alpha\beta = \frac{\sin A . \sin B . \sin AB}{\sin p}$, sin $\beta\gamma$ $= \frac{\sin B . \sin C . \sin BC}{\sin p}$ und sin $\alpha\gamma = \frac{\sin A . \sin C . \sin AC}{\sin p}$, und werden diese Werthe in der Gleichung (2) substituirt, so erhält man

4. cot B . sin AC = cot A . sin BC + cot C . sin AB.

Die übrigen Relationen sind theils schon im §. 178 vorgekommen, theils sind sie von der Art, daß sie wahrscheinlich nie in Gebrauch kommen. Wie diese Sätze umgekehrt werden können, liegt am Tage.

§. 240.

Lehrsatz. Gehen von einem Punkte V (in Fig. 129) aus drei Linien, welche von zwei anderen in A, B, C, und a, b, c geschnitten werden, so ist immer

$$\frac{\sin Bb}{\sin Vb} . \sin AC = \frac{\sin Aa}{\sin Va} . \sin BC + \frac{\sin Cc}{\sin Vc} . \sin AB.$$

Beweis. Verlängert man abc und ABC bis zum Schneiden in D, so ist sin BC . sin AD + sin AB . sin CD = sio AC . sin BD nach §. 182; da nun aber

$$\frac{\sin DA}{\sin DB} = \frac{\sin Aa}{\sin Va} . \frac{\sin Vb}{\sin Bb}$$ und

$$\frac{\sin DC}{\sin DB} = \frac{\sin Cc}{\sin Vc} . \frac{\sin Vb}{\sin Bb}$$ ist,

so erhält man, wenn die Werthe sin DA $= \frac{\sin Aa}{\sin Va} . \frac{\sin Vb}{\sin Bb}$.

sin DB und sin DC $= \frac{\sin Cc}{\sin Vc} \cdot \frac{\sin Vb}{\sin Bb} \cdot \sin DB$ substituirt werden, auf der Stelle die Gleichung

$$\frac{\sin Aa}{\sin Va} \cdot \frac{\sin Vb}{\sin Bb} \sin BC + \frac{\sin Cc}{\sin Vc} \cdot \frac{\sin Vb}{\sin Bb} \sin AB = \sin AC,$$

welche mit der im Satze aufgestellten einerlei ist.

Zusatz 1. Da sin Bb = sin VB . cos Vb — cos VB . sin Vb. sin Aa = sin VA cos Va — cos VA sin Va und sin Cc = sin VC cos Vc — cos VC sin Vc ist, so erhält man, wenn diese Ausdrücke in die obige Formel gesetzt werden

$$\left(\frac{\sin VB}{\operatorname{tng} Vb} - \cos VB\right) \sin AC = \left(\frac{\sin VA}{\operatorname{tng} Va} - \cos VA\right)$$
$$\sin BC + \left(\frac{\sin VC}{\operatorname{tng} Vc} - \cos VC\right) \sin AB,$$

und da nach §. 239 ist cos VB . sin AC = cos VA . sin BC + cos VC . sin AB, so hat man noch

$$\frac{\sin Vb}{\operatorname{tng} Vb} \sin AC = \frac{\sin VA}{\operatorname{tng} VA} \sin BC + \frac{\sin RC}{\operatorname{tng} Vc} \sin AB.$$

Zusatz 2. Beide Formeln drücken eine Bedingung aus, welche erfüllt sein muß, wenn die drei Punkte a, b, c in Einem Hauptbogen liegen sollen.

Zusatz 3. Geht die Linie VB Fig. 130 durch den Durchschnittspunkt x der Diagonalen des Vierecks ACca, so ist VbxB harmonisch getheilt und also sin Bb . sin Vx = 2 sin Bx . sin Vb oder $\frac{\sin Bx}{\sin Vx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin Bb}{\sin Vb}$; daher hat man

$$2 \cdot \frac{\sin Bx}{\sin Vx} \sin AC = \frac{\sin Aa}{\sin Va} \cdot \sin BC + \frac{\sin Cc}{\sin Vc} \sin AB.$$

Man vergleiche hiermit noch eine ähnliche Formel im zweiten Zusatze zu §. 190.

§. 241.

Lehrsatz. Wenn ein Punkt V mit drei Punkten A, B, C eines Hauptkreises in Fig. 131 verbunden sind und von diesen drei Punkten aus drei neue Hauptbogen gezogen werden, welche sich in Einem Punkte v schneiden, so ist immer

$$\frac{\sin VBv}{\sin VBE} \cdot \sin AVC = \frac{\sin VAv}{\sin vAE} \cdot \sin BVC + \frac{\sin VCv}{\sin vCE} \cdot \sin AVB.$$

Beweis. Es ist immer sin AVB . sin DVC + sin BVC . sin DVA = sin DVB . sin AVC und da nach §. 189 Zusatz 2 ist

$\frac{\sin DVA}{\sin DVB} = \frac{\sin VAv}{\sin vAE} : \frac{\sin VBv}{\sin vBE}$ und $\frac{\sin DVC}{\sin DVB} = \frac{\sin VCc}{\sin vCE} : \frac{\sin VBv}{\sin vBE}$ und also

$$\sin DVA = \frac{\sin VAv}{\sin vAE} \cdot \frac{\sin vBE}{\sin VBv} \cdot \sin DVB,$$

$$\sin DVC = \frac{\sin VCv}{\sin vCE} \cdot \frac{\sin vBE}{\sin VBv} : \sin DVB$$

ist, so erhält man durch die Substitution dieser Werthe die Gleichung

$$\frac{\sin VCv}{\sin vCE} \cdot \frac{\sin vBE}{\sin VBv} \sin AVB + \frac{\sin VAv}{\sin vAE} \cdot \frac{\sin vBE}{\sin VBv} \sin BVC = \sin AVC,$$

oder auch $\frac{\sin VCv}{\sin vCE} \sin AVB + \frac{\sin VAv}{\sin vAE} \sin BVC = \frac{\sin VBv}{\sin vBE} \sin AVC,$

und diese Gleichung gilt ohne die geringste Abänderung auch in der analogen planimetrischen Construction

Zusatz 1. Da $\sin VAv = \sin VAE \cos vAE - \cos VAE \sin vAE$, $\sin VBv = \sin VBE \cos vBE - \cos VBE \sin vBE$ und $\sin VCv = \sin VCE \cos vCE - \cos VCE . \sin vCE$ ist, so erhält man durch die Substitution dieser Werthe die Gleichung

$$\left(\frac{\sin VCE}{\text{tng } vCE} - \cos VCE\right) \sin AVB + \left(\frac{\sin VAE}{\text{tng } vAE} - \cos VAE\right)$$
$$\sin BVC = \left(\frac{\sin VBE}{\text{tng } vBE} - \cos VBE\right) \sin AVC,$$

und da $\cos VCE \sin AVB + \cos VAD \sin BVC = \cos VBE \sin AVC$ nach §. 239 ist, so hat man die einfachere Gleichung

$$\frac{\sin VCE}{\text{tng } vCE} \sin AVB + \frac{\sin VAE}{\text{tng } vAE} \sin BVC = \frac{\sin VBE}{\text{tng } vBE} \sin AVC,$$

welche ebenfalls ohne die geringste Aenderung in der Planimetrie gilt.

Zusatz 2. Beide obige Gleichungen drücken die Bedingung der Lage von drei Hauptbogen Av, Bv, Cv aus, wenn sie sich in Einem Punkte v schneiden sollen.

Achter Abschnitt.

Vom Nebenkreise.

§. 242.

Es ist schon in der Einleitung Einiges von dem Nebenkreise, der auch häufig schlechtweg **Kreis** heißen mag, gesagt worden; jeder Kreis hat zwei Mittelpunkte, welche Gegenpunkte sind, und zwei Halbmesser, welche sich zu 180° ergänzen. Wenn aber im Nachfolgenden von dem Halbmesser eines Kreises die Rede ist, so wird immer derjenige verstanden, welcher kleiner als ein Quadrant ist, wenn der Gegentheil nicht ausdrücklich erwähnt wird; auch wird von seinen beiden Mittelpunkten in der Regel derjenige verstanden, aus welchem der Kreis mit dem Radius, welcher kleiner als ein Quadrant ist, beschrieben werden kann. Uebrigens finden die gewöhnlichen Benennungen der Planimetrie auch hier ihre Anwendung.

Ein Kreis theilt die Kugelfläche in zwei ungleiche Theile; der kleinere Theil der Kugelfläche, welcher von der Peripherie des Kreises begrenzt wird, heiße die **innere** Kreisfläche oder auch wol das **Innere** des Kreises; der ganze übrige Theil der Kugelfläche heiße die **äußere** Kreisfläche oder auch das Aeußere des Kreises.

Der dem Kreise nähere Mittelpunkt, welcher auch der **positive** Mittelpunkt heißen kann, befindet sich also im Inneren des Kreises, und der vom Kreise entferntere Mittelpunkt, welcher auch das negative Centrum heißen mag, befindet sich im Aeußeren des Kreises, oder außerhalb desselben.

Ueberhaupt befindet sich ein Punkt (der Kugelfläche) im Inneren oder innerhalb des Kreises, wenn sein Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist, als der Radius des Kreises; er befindet sich im Aeußeren des Kreises oder außerhalb desselben, wenn sein Abstand vom Mittelpunkte größer ist als der Radius; der Punkt befindet sich endlich in der Peripherie selbst, wenn sein Abstand vom Mittelpunkte dem Radius gleich ist.

Ganz ebenso, wie in der Planimetrie, wird auch hier bewiesen, daß Sectoren eines Kreises und auch Bogen eines Kreises congruent sind, wenn die zugehörigen Winkel am Mittelpunkte gleich sind; ferner, daß sich Sectoren und auch Bogen eines Kreises zu einander verhalten, wie die zugehörigen Winkel am Mittelpunkte.

Daher theilt der Durchmesser eines Kreises seine Peripherie und auch seine Fläche in zwei congruente Theile, daher gehören zu gleichen Bogen auch gleiche Sehnen und umgekehrt.

§. 243.

Auch die Richtigkeit der folgenden Sätze wird jeder Anfänger, welcher die Lehre vom Kreise in der Ebene kennt, sogleich einsehen.

Fällt man vom Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne desselben ein Loth, so wird die Sehne, der zugehörige Bogen und der Winkel am Mittelpunkte dadurch halbirt.

Verbindet man das Centrum eines Kreises mit der Mitte einer Sehne durch einen Hauptbogen, so steht er auf der Sehne senkrecht.

Errichtet man in der Mitte einer Sehne ein Perpendikel auf derselben, so geht es durch den Mittelpunkt des Kreises.

Um durch drei Punkte, welche nicht in Einem Hauptkreise liegen, einen Kreis zu schreiben, halbire man zwei Seiten des Dreiecks, welches jene Punkte zu seinen Ecken hat, durch Hauptbogen, welche auf diesen Seiten senkrecht stehen, dann ist der Durchschnitts-Punkt dieser beiden Perpendikel das gesuchte Centrum.

Die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, befinden sich in einem Hauptkreise, welcher den die beiden Punkte verbindenden Hauptbogen unter rechten Winkeln halbirt.

Daher ist die Construction eines Kreises überhaupt durch drei verschiedene Bedingungen, welche vereinbar sind, völlig bestimmt.

§. 244.

Lehrsatz. Zieht man durch einen Punkt der Peripherie eines Kreises einen Hauptbogen, welcher mit dem Radius dieses Punktes schiefe Winkel macht, so schneidet dieser Hauptbogen die Peripherie noch in einem zweiten Punkte.

Beweis. In Fig. 132 sei MA der Radius; da XY durch A geht, und MA nicht senkrecht auf XY steht, so kann MD senkrecht auf XY gefällt und DB = DA gemacht werden. Wird nun noch MB gezogen, so sind die Dreiecke MDA und MDB symmetrisch, also ist MB = MA, und also nach §. 243 B ein zweiter Punkt der Peripherie, durch welchen XY ebenfalls geht.

§. 245.

Lehrsatz. Zieht man durch einen Punkt R der Peripherie eines Kreises in Fig. 132 einen Hauptbogen PQ, welcher auf dem Radius dieses Punktes senkrecht steht, so befinden sich alle übrigen Punkte dieses Hauptbogens außerhalb des Kreises.

Beweis. Verbindet man irgend einen anderen Punkt S der Linie PQ mit dem Mittelpunkte durch MS, so ist im recht-

winkeligen Dreiecke MRS die Kathete MR $< 90^0$ und also die Hypotenuse MS $>$ MR, daher befindet sich der Punkt S außerhalb des Kreises.

§. 246.

Erklärung. Ein Hauptbogen, welcher mit der Peripherie eines Kreises nur einen Punkt gemein hat, obgleich man ihn zu einem Hauptkreise ergänzt, heißt eine Berührungs-Linie oder Tangente des Kreises, und der Punkt, welchen die Tangente mit der Peripherie gemein hat, heißt der Berührungs-Punkt.

Zusatz 1. Zieht man durch einen Punkt der Peripherie eines Kreises einen Hauptbogen, welcher auf dem Radius dieses Punktes senkrecht steht, so ist der Hauptbogen eine Tangente des Kreises.

Zusatz 2. Berührt ein Hauptbogen einen Kreis, und zieht man nach dem Berührungs-Punkte einen Radius, so steht er auf der Tangente senkrecht.

Zusatz 3. Fällt man vom Centrum eines Kreises auf eine Tangente desselben ein Loth, welches kleiner als ein Quadrant ist, so trifft es den Berührungs-Punkt.

Zusatz 4. Errichtet man auf der Tangente eines Kreises im Berührungs-Punkte ein Loth, so geht es (verlängert) durch den Mittelpunct des Kreises.

Zusatz 5. Berührt ein Hauptkreis einen Nebenkreis, so berührt er auch seinen Gegenkreis, und die beiden Berührungs-Punkte sind Gegenpunkte.

§. 247.

Lehrsatz. Wenn sich die Radien zweier concentrischen Kreise zu einem Quadranten ergänzen, und man einen Hauptkreis beschreibt, dessen Centrum sich in der Peripherie des einen Kreises befindet, so ist er jedesmal eine Tangente des anderen Kreises.

Ferner befindet sich das Centrum einer Tangente des einen Kreises jedesmal in der Peripherie des anderen.

Beweis. In Fig. 133 sei m der Mittelpunkt der beiden concentrischen Kreise und b der Mittelpunkt des Hauptkreises XY; man ergänze den Radius mb zum Durchmesser AB, welcher den anderen Kreis noch in a schneide, dann ist nach der Annahme ma + mB $= 90^0$ oder auch bB $= 90^0$ und da b das Centrum von XY ist, so ist bB der Radius dieses Hauptkreises, und er geht also durch den Punkt B; da ferner bB als Radius auf XY senkrecht steht, so ist nach §. 246 XY eine Tangente des Kreises ABC und B der Berührungs-Punkt.

Ist B das Centrum des Hauptbogens xy, so kann ebenso bewiesen werden, daß xy den Kreis abc in b berührt.

Nimmt man an, daß XY den Kreis ABC in B berührt, so steht XY auf dem Radius mB nach §. 246 senkrecht und da Bb = 90° ist, so ist b das Centrum von XY, und der Punkt b befindet sich in der Peripherie des Kreises abc.

Erklärung. Wegen dieser Wechsel-Beziehung heißen zwei concentrische Kreise, deren Radien sich zu einem Quadranten ergänzen, reciproke Kreise.

Zusatz. Stellt man sich vor, der Punkt b rücke in der Peripherie des Kreises abc fort, so ändert auch der Hauptbogen XY, dessen Centrum der Punkt b ist, seine Lage, und da er den Kreis ABC fortwährend berührt, so wird dieser also umhüllt von einer stetigen Reihe von Hauptbogen, die alle diesen Kreis berühren, und von welchen jeder den nächstfolgenden in einem Punkte der Peripherie, und zwar in seinem Berührungs-Punkte schneidet. Sowie also ein Kreis durch die Bewegung eines Punktes beschrieben werden kann, kann er auch durch die Bewegung einer Tangente desselben beschrieben, oder, was auf dasselbe herauskommt, von unendlich vielen consecutiven Tangenten umhüllt werden, welche durch ihre consecutiven Durchschnitts-Punkte, (derjenige Punkt, in welchem ein Hauptbogen vom nächst folgenden geschnitten wird) die Form und Größe des Kreises bestimmen, da diese consecutiven Durchschnitts-Punkte gerade Punkte seiner Peripherie selbst sind. Schon jede einzelne Tangente eines Kreises dient zur Bestimmung desselben. Läßt man also die Vorstellung der Beschreibung eines Kreises durch die Bewegung eines Punktes zu, so muß man auch die Vorstellung seiner Beschreibung durch einhüllende Hauptbogen zugeben.

Auf ähnliche Art kann man sich überhaupt alle krumme Linien als von stetig auf einander folgenden Tangenten umhüllt, und eben dadurch nach ihrer Gestalt und Größe bestimmt, vorstellen.

§. 248.

Aufgabe. Man soll von einem Punkte P außerhalb eines Kreises TU eine Tangente an denselben ziehen.

Aus dem Mittelpunkte M des gegebenen Kreises beschreibe man den reciproken Kreis T'U' und aus P einen Hauptkreis mn, welcher den reciproken Kreis in α und β schneiden mag. Beschreibt man dann aus α und β Hauptkreise, so gehen sie durch den gegebenen Punkt P, und berühren beide den gegebenen Kreis.

Denn da P das Centrum von $\alpha\beta$ ist, so gehen umgekehrt die aus α und β beschriebenen Hauptkreise durch P und nach §. 247 sind sie Tangenten.

Die angegebene Auflösung ist immer möglich. Denn da $MP > MT$ ist, weil sich der Punkt P außerhalb des Kreises TU befindet, so ist $MP + MT' > MT + MT'$ oder $PT' > 90^0$ und ist $PM\gamma = 90^0$, so ist also $PT' > P\gamma$; ist ferner P' der Gegenpunkt von P, so ist aus demselben Grunde $P'U' > P'\gamma$ oder $P\gamma$; der aus P oder P' beschriebene Hauptkreis mn schneidet also den Durchmesser U'T' zwischen seinen Endpunkten und also die Peripherie des reciproken Kreises in zwei Punkten α und β.

§. 249.

Lehrsatz. Wenn ein Kreis im Inneren eines Winkels seine Schenkel berührt, so befindet sich sein Mittelpunkt in einem Hauptbogen, welcher den Winkel, die Berührungssehne und den zugehörigen Winkel am Mittelpunkte halbirt, und auf der Berührungssehne senkrecht ist. Ferner haben die beiden Berührungs-Punkte einen gleichen Abstand vom Scheitel des Winkels.

Beweis. In Fig. 135 sei C der Mittelpunkt des Kreises, welcher die Schenkel des Winkels AVB in A und B berührt, dann sind die Dreiecke VAC und VBC, weil sie in einer Kathete und der Hypotenuse übereinstimmen, symmetrisch und es ist also $VA = VB$, Winkel $AVC = BVC$ und Winkel $ACE = BCE$. Nun sind aber auch die Dreiecke ACE und BCE symmetrisch und deswegen ist der Winkel $AEC = BEC$, oder AB steht senkrecht auf VC.

Auch sind die Bogen ADB und AFB von der Linie VC halbirt.

§. 250.

Lehrsatz. Wenn zwei Dreiecke RAB und RA'B' in Fig. 136 einen Winkel R gemein haben und ein Kreis im Inneren derselben alle Seiten der beiden Dreiecke berührt, so haben die beiden Nebendreiecke CAB und CA'B', welche zur gemeinschaftlichen Ecke den Gegenpunkt des Scheitels R haben, gleichen Umfang.

Beweis. Berührt der Kreis um m die Seiten der beiden Dreiecke RAB und RA'B' in P, Q, π und π', so ist nach §. 249 $A\pi = AP$ und $B\pi = BQ$ also ist $AB = PA + QB$ und also $CA + AB + CB = CP + CQ = 2\,CP$, ebenso ist $CA' + A'B' + CB' = 2\,CP$ und also

$$CA + AB + CB = CA' + A'B' + CB'.$$

Daher haben die Dreiecke CAB und CA'B' gleichen Umfang.

Zusatz. Wenn zwei Dreiecke ACB und A'CB' einen Winkel C gemein und gleichen Umfang haben, so berührt ein und

derselbe Kreis im Inneren ihrer Nebendreiecke RAB und RA'B' alle Seiten derselben.

Anmerkung. Der reciproke, den Inhalt der Dreiecke betreffende Lehrsatz kam in einem früheren Abschnitte vor. Der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die Seiten eines Dreiecks berührt, ist derjenige Punkt, welcher von den Seiten des Dreiecks gleichen Abstand hat, und in dieser Bedeutung ist ebenfalls früher schon von ihm gehandelt worden. Es gibt also überhaupt vier Kreise, von denen jeder die drei Seiten eines Dreiecks berührt.

§. 251.

Lehrsatz. Berührt ein Kreis die vier Seiten eines Vierecks mit inneren Diagonalen, so ist die Summe von zwei Gegenseiten so groß als die Summe der beiden anderen; hat aber das Viereck äußere Diagonalen, so ist der Unterschied von zwei Gegenseiten so groß als der Unterschied der beiden anderen.

Beweis. In Fig. 137 α sei ABCD das Viereck mit inneren Diagonalen, und e, f, g, h seien die Berührungs-Punkte, dann ist $Ae = Af$ und $De = Dh$, also ist $AD = Af + Dh$ und ebenso $BC = Bf + Ch$, also ist $AD + BC = AB + DC$.

In Fig. 137 β ist ebenfalls $AD = Af + Dh$ und $BC = Bf + Ch$, aber hier ist $AD - BC = DC - AB$.

§. 252.

Lehrsatz. Ist ein Viereck in einen Kreis geschrieben und hat es innere Diagonalen, so ist die Summe zweier Gegenwinkel desselben so groß, als die Summe seiner beiden anderen Winkel; hat es aber äußere Diagonalen, so ist der Unterschied zweier Gegenwinkel so groß, als der Unterschied der beiden anderen Winkel.

Beweis. Man ziehe die Diagonale BD des Vierecks ABCD im Kreise und den Radius mD, dann ist in Fig. 138 α nach §. 57

$2. mDB = ADB + ABD - A$ und

$2. mDB = C - CDB - CBD$,

und also $ADB + ABD + CDB + CBD = A + C$ oder $B + D = A + C$.

In Fig. 138 β ist

$2. mDB = ADB + ABD - A$ und auch

$2. mDB = CDB + CBD - C$,

daher ist $ADB + ABD - CDB - CBD = A - C$, d. h.

$B - D = A - C$ oder $A - B = C - D$.

§. 253.

Lehrsatz. Ist ein Dreieck in einen Kreis geschrieben und zieht man durch eine Ecke dieses Dreiecks eine Tangente, so ist der Unter-

schied der Winkel, welche sie mit den nach dem Berührungs-Punkte gehenden Seiten macht, gleich dem Unterschiede der entgegengesetzten Winkel des Dreiecks.

Beweis. In Fig. 139 sei PRQ eine Tangente und VRW das Dreieck, dann ist nach §. 57, wenn der Radius mR gezogen wird

$$2.\ mRW = W + R - V \text{ und}$$
$$2.\ mRV = V + R - W,$$

und also $2.\ mRW - 2.\ mRV = 2W - 2V$ oder auch $mRW - mRV = W - V$; da aber $mRW = 90^\circ - QRW$ und $mRV = 90^\circ - PRV$ ist, so hat man also

$$PRV - QRW = W - V.$$

Anmerkung. Die im §. 251, §. 252 und §. 253 enthaltenen Sätze gestatten eine Umkehrung, und man erhält dadurch die folgenden Sätze:

1. Wenn in Fig. 137 α AB + DC = AD + BC oder in Fig. 137 β AD — BC = DC — AB ist, so kann ein Kreis construirt werden, welcher die vier Seiten des Vierecks ABCD berührt.
2. Wenn in Fig. 138 α ist A + C = B + D oder in Fig. 138 β ist A — B = C — D, so kann ein Kreis um das Viereck ABCD geschrieben werden.
3. Wenn in Fig. 139 ist PRV + V = QRW + W und man einen Kreis um das Dreieck RVW schreibt, so ist PRQ eine Tangente desselben.

Die Auffindung der Beweise dieser Sätze, die indirect geführt werden können, überlassen wir dem Anfänger zu seiner Uebung.

§. 254.

Lehrsatz. Ist in ein Dreieck ein Kreis beschrieben, welcher die Seiten desselben berührt, so ist es ein Proportional-Dreieck und die Berührungs-Punkte sind die Proportional-Punkte.

Beweis. Sind in Fig. 140 D, E, F die Berührungs-Punkte der Seiten des Dreiecks ABC, so ist CD = CF, AD = AE und BE = BF, also ist

$$\frac{\sin AE}{\sin BE} \cdot \frac{\sin BF}{\sin CF} \cdot \frac{\sin CD}{\sin AD} = 1.$$

Zusatz 1. Zieht man also die Scheitellinien BD, AF und CE, so schneiden sie sich in Einem Punkte, und hiernach läßt sich durch eine bloße Lineal-Construction aus zwei Berührungs-Punkten der dritte finden.

Zusatz 2. Zieht man DF, DE und FE, so liegen die Durchschnitts-Punkte von DF und AB, von EF und AC, endlich von DE und BC in Einem Hauptbogen.

Anmerkung. Ganz ebenso wird gezeigt, daß ein Viereck, dessen Seiten von einem Kreise berührt werden, in Ansehung der Berührungs-Punkte ein Proportional-Viereck sei.

§. 255.

Lehrsatz. Zieht man durch einen Punkt E innerhalb oder außerhalb eines Kreises Fig. 141 und Fig. 142 Sehnen, wovon die eine die Peripherie in A und B, die andere aber in C und D schneidet, so ist immer

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(EB + EA)}{\cos\frac{1}{2}(EB - EA)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(ED + EC)}{\cos\frac{1}{2}(ED - EC)}.$$

Beweis. Man ziehe noch vom Mittelpunkte M aus die Radien MA, MB, MC, MD, ziehe ferner ME und fälle noch die Lothe MF und MG auf die Sehnen AB und CD; dann ist

$$\cos ME = \cos EF \, . \cos MF \text{ und } \cos MA = \cos AF \, . \cos MF$$

und also $\frac{\cos ME}{\cos MA} = \frac{\cos EF}{\cos AF}$, ganz ebenso erhellet, daß

$$\frac{\cos ME}{\cos MC} = \frac{\cos EG}{\cos CG} \text{ sei,}$$

und da MA = MC ist, so ist also auch

$$\frac{\cos EF}{\cos AF} = \frac{\cos EG}{\cos CG}.$$

In Fig. 141 ist nun aber $EF = \frac{1}{2}(EA + EB)$ und $AF = \frac{1}{2}(EB - EA)$, $EG = \frac{1}{2}(ED + EC)$ und $CG = \frac{1}{2}(ED - EC)$, also

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(EB + EA)}{\cos\frac{1}{2}(EB - EA)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(ED + EC)}{\cos\frac{1}{2}(ED - EC)}.$$

In Fig. 142 ist $EF = \frac{1}{2}(EB - EA)$, $AF = \frac{1}{2}(EB + EA)$, $EG = \frac{1}{2}(ED - EC)$ und $CG = \frac{1}{2}(ED + EC)$, und also

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(EB - EA)}{\cos\frac{1}{2}(EB + EA)} = \frac{\cos\frac{1}{2}(ED - EC)}{\cos\frac{1}{2}(ED + EC)},$$

wird aber diese Proportion umgekehrt, so ist sie mit der vorigen dieselbe.

Zusatz. Wenn man die Proportion $\frac{\cos EF}{\cos AF} = \frac{\cos EG}{\cos CG}$ mit sich selbst multiplicirt, und dann auf beiden Seiten Eins subtrahirt, so hat man

$$\frac{\cos EF^2 - \cos AF^2}{\cos AF^2} = \frac{\cos FG^2 - \cos CC^2}{\cos CG^2} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin AF^2 - \sin EF^2}{\cos AF^2} = \frac{\sin CG^2 - \sin EG^2}{\cos CG^2},$$

und also $\frac{\sin(AF - EF) . \sin(AF + EF)}{\cos AF^2}$

$= \frac{\sin(CG - EG) . \sin(CG + EG)}{\cos CG^2}$,

oder $\frac{\sin EA . \sin EB}{\cos AF^2} = \frac{\sin EC . \sin ED}{\cos CG^2}$;

da aber $AF = \frac{1}{2} AB$, $CG = \frac{1}{2} CD$ ist, so hat man endlich

$$\frac{\sin EA . \sin EB}{\cos \frac{1}{2} AB^2} = \frac{\sin EC . \sin ED}{\cos \frac{1}{2} CD^2},$$

und diese Proportion kommt noch häufiger in Gebrauch, als die vorige im Lehrsatze selbst.

§. 256.

Lehrsatz. Wird vom Punkte E aus in Fig. 143 eine Tangente EG an den Kreis und die Sekante EAB gezogen, so ist immer

$$\cos EG = \frac{\cos \frac{1}{2}(EA + EB)}{\cos \frac{1}{2}(EB - EA)}.$$

Beweis. Da hier, wie im §. 255 ist $\frac{\cos ME}{\cos MA} = \frac{\cos EF}{\cos AF}$ und im rechtwinkeligen Dreiecke EGM ist $\cos EG = \frac{\cos EM}{\cos MG}$, so hat man, weil $MG = MA$ ist, auf der Stelle

$$\cos EG = \frac{\cos EF}{\cos AF} = \frac{\cos \frac{1}{2}(EB + EA)}{\cos \frac{1}{2}(EB - EA)}.$$

Zusatz. Durch eine ähnliche Veränderung, wie im Zusatze zu §. 255, erhält man die Gleichung

$$\sin EG^2 = \frac{\sin EA . \sin EB}{\cos \frac{1}{2} AB^2}.$$

§. 257.

Die Wichtigkeit der im Zusatze zu §. 255 erhaltenen allgemeinen Relation wird es rechtfertigen, wenn hier noch eine andere Herleitung folgt.

Sind in Fig. 144 wieder AEB und CED die sph. Sehnen des Kreises ACBD und ist m der Mittelpunkt der Kugel, so schneiden sich die Ebenen AmB und CmD in der geraden Linien mE, und diese Ebenen werden von der Ebene des Kreises in den geraden Linien AeB und CeD geschnitten. Fällt man auf diese Sehnen die Perpendikel mf und mg, so werden sie dadurch halbirt, auch werden von diesen Perpendikeln, wenn sie zu Kugelradien mG und mF verlängert werden, die Bogen AEB und CED in

den Punkten F und G halbirt, und es ist, weil mf senkrecht auf AB ist,

$$Ae \cdot mf = mA \cdot me \cdot \sin AE \text{ und}$$
$$Be \cdot mf = mB \cdot me \cdot \sin BE, \text{ und also}$$
$$Ae \cdot Be \cdot mf^2 = mA \cdot mB \cdot me^2 \cdot \sin AE \cdot \sin BE;$$

ganz ebenso ist

$$Ce \cdot De \cdot mg^2 = mC \cdot mD \cdot me^2 \cdot \sin CE \cdot \sin DE,$$

und da $Ae \cdot Be = Ce \cdot De$ ist, so hat man

$$\frac{mf^2}{mg^2} = \frac{\sin AE \cdot \sin BE}{\sin CE \cdot \sin DE}.$$

Weil aber $mf = mB \cdot \cos \frac{1}{2} AB$ und $mg = mD \cdot \cos \frac{1}{2} CD$ und also $\frac{mf}{mg} = \frac{\cos \frac{1}{2} AB}{\cos \frac{1}{2} CD}$ ist, so hat man endlich $\frac{\cos \frac{1}{2} AB^2}{\cos \frac{1}{2} CD^2}$
$= \frac{\sin AE \cdot \sin BE}{\sin CE \cdot \sin DE}$.

Auf gleiche Art kann der Beweis geführt werden, wenn sich der Punkt E außerhalb des Kreises befindet. Der Lehrsatz im §. 256 stellt sich aber als ein besonderer Fall hiervon dar.

Zusatz. Steht die Sehne AEB auf dem Durchmesser FEMG in Fig. 145 senkrecht, so hat man nach §. 255

$$\cos EA = \cos EB = \frac{\cos \frac{1}{2}(ED + CE)}{\cos \frac{1}{2}(ED - EC)} = \frac{\cos \frac{1}{2}(EG + EF)}{\cos \frac{1}{2}(EG - EF)}$$

$$\text{und } \operatorname{tng} AE^2 = \operatorname{tng} EB^2 = \frac{\sin CE \cdot \sin DE}{\cos \frac{1}{2} CD^2} = \frac{\sin FE \cdot \sin GE}{\cos \frac{1}{2} FG^2}.$$

§. 258.

Lehrsatz. Zieht man von einem Punkte aus zwei Tangenten des Kreises und noch eine Sekante, und legt man durch die beiden Punkte, in welchen der Kreis von der Sekante geschnitten wird, neue Tangenten, so werden sie von den beiden vorigen Tangenten, von der Berührungs-Sehne derselben und von der Sekante harmonisch getheilt.

Beweis. Sind in Fig. 146 von V aus die Tangenten VAW und VBW und die Sekante VCDW gezogen, und zieht man ferner die Berührungssehne AB und die neue Tangente MCNU, wovon die Berührungssehne in U getroffen wird,

$$\text{so ist } \frac{\sin UN}{\sin UM} = \frac{\sin NB}{\sin VB} : \frac{\sin MA}{\sin VA},$$

und da VA = VB und NB = NC, MA = MC ist, so hat man

$$\frac{\sin UN}{\sin UM} = \frac{\sin NC}{\sin MC} \text{ und also}$$

$$\sin UN \cdot \sin MC = \sin UM \cdot \sin NC;$$

daher ist MCNU harmonisch getheilt. Weil aber MCNU harmonisch getheilt ist, so sind es auch AEBU und mDnU nach §. 184.

Zusatz 1. Zieht man also von einem Punkte V aus die Tangenten VAW und VBW und die Sekante VCDW, und legt man durch die Punkte C und D, in welchen die Sekante den Kreis trifft, ein Paar neue Tangenten, so schneiden sie sich auf der Berührungssehne AB, so daß sie von diesem Punkte und der Sekante harmonisch getheilt wird.

Zusatz 2. Zieht man von einem Punkte V aus mehrere Sekanten eines Kreises, und legt man durch die beiden Durchschnitts-Punkte einer jeden Sekante mit der Peripherie ein Paar Tangenten, so schneiden sich alle diese Tangenten-Paare auf der dem Punkte V zugehörigen Berührungssehne, d. h. auf dem Hauptbogen, welcher durch die Berührungs-Punkte der beiden Tangenten geht, welche vom Punkte V aus gezogen sind.

§. 259.

Lehrsatz. Zieht man von einem Punkte V aus zwei Tangenten und eine Sekante, so wird diese Sekante von der Peripherie des Kreises, von der dem Punkte V zugehörigen Berührungs-Sehne und dem Punkte V selbst harmonisch getheilt.

Beweis. Sind in Fig. 146 von V aus die Tangenten VAW und VBW gezogen und die Sekante VCED, welche von der Berührungs-Sehne AB im Punkte E geschnitten werden mag, so lege man noch durch C und D die Tangenten MCN und mDn, welche sich nach §. 258 auf der Berührungssehne AB schneiden.

Dann ist $\frac{\sin VM}{\sin Vm} = \frac{\sin MC}{\sin UC} : \frac{\sin mD}{\sin UD}$,

weil aber $mD = mA$, $MC = MA$, $UC = UD$ ist, so hat man

$$\frac{\sin VM}{\sin Vm} = \frac{\sin MA}{\sin mA},$$

und es ist also VMAm harmonisch getheilt; daher sind aber auch VNBn und VCED harmonisch getheilt nach §. 184.

§. 260.

Lehrsatz. Zieht man von einem Punkte V aus die Tangenten VA und VW eines Kreises, und von den Berührungs-Punkten A und B aus durch einen Punkt C der Peripherie die Linien ACL und BCF, welche den vorigen Tangenten in L und F begegnen, und dann die Linie FL, wovon die Sehne AB in U getroffen wird, so ist die Linie UC eine Tangente des Kreises.

Beweis. Da ABV ein P. Dreieck mit den Proportional-Punkten L, F, E und dem P. Mittelpunkte C ist, so schneidet FL die Sehne AEB in U nach §. 199 so, daß AEBU harmonisch getheilt ist, und wäre nun UC keine Tangente, so könnte man durch

C eine Tangente legen und würde AEB davon in U′ geschnitten, so wären AEBU und AEBU′ harmonisch getheilt, was nicht möglich ist. Daher ist UC eine Tangente, und wenn die vorigen Tangenten davon in M und N geschnitten werden, so sind auch noch VFMA, VLNB, VpCE und FpLU harmonisch getheilt.

In Bezug auf den Punkt D aber gilt ein Gleiches von der Tangente UnDm.

§. 261.

Lehrsatz. Werden von einem Punkte V aus zwei Tangenten VA und VB eines Kreises gezogen, die den Winkel V mit einander machen, und dieselben von einer dritten Tangente in M und N geschnitten, so ist immer

$$\sin \tfrac{1}{2} V^2 = \frac{\sin AM}{\sin VM} \cdot \frac{\sin BN}{\sin VN}.$$

Beweis. Es sei in Fig. 146 durch den Berührungs-Punkt C der Tangente MN die Sekante VCD gezogen, wovon die Berührungssehne AB, welche zum Punkte V gehört, in E getroffen wird, dann ist nach §. 259 VCED harmonisch getheilt; ferner ist

$$\frac{\sin AE}{\sin AB} = \frac{\sin EC}{\sin VC} \cdot \frac{\sin VL}{\sin BL} \text{ und}$$

$$\frac{\sin BE}{\sin AB} = \frac{\sin EC}{\sin VC} \cdot \frac{\sin VF}{\sin AF},$$

oder auch, weil VCED harmonisch getheilt und also $\sin VC \,.\, \sin DE = \sin CE \,.\, \sin VD$, d. h. $\frac{\sin EC}{\sin VC} = \frac{\sin ED}{\sin VD}$ ist, $\frac{\sin BE}{\sin AB} = \frac{\sin ED}{\sin VD} \cdot \frac{\sin VF}{\sin AF}$, und wird diese Proportion mit der vorigen multiplicirt, so hat man

$$\frac{\sin AE \,.\, \sin BE}{\sin AB^2} = \frac{\sin EC \,.\, \sin ED}{\sin VC \,.\, \sin VD} \cdot \frac{\sin VL \,.\, \sin VF}{\sin BL \,.\, \sin AF},$$

und da $\frac{\sin AE \,.\, \sin BE}{\cos \frac{1}{2} AB^2} = \frac{\sin EC \,.\, \sin ED}{\cos \frac{1}{2} CD^2}$ nach §. 255 Zusatz ist, so hat man $\frac{\cos \frac{1}{2} AB^2}{\sin AB^2} = \frac{\cos \frac{1}{2} CD^2}{\sin VC \,.\, \sin VD} \cdot \frac{\sin VL \,.\, \sin VF}{\sin BL \,.\, \sin AF}$; da ferner nach dem Zusatze zu §. 256 ist $\sin VA^2 = \frac{\sin VC \,.\, \sin VD}{\cos \frac{1}{2} CD^2}$ und auch $\frac{\cos \frac{1}{2} AB^2}{\sin AB^2} = \frac{1}{4 \sin \frac{1}{2} AB^2}$ ist, so hat man

$$\frac{1}{4 \sin \frac{1}{2} AB^2} = \frac{1}{\sin AV^2} \cdot \frac{\sin VL \,.\, \sin VF}{\sin BL \,.\, \sin AF} \text{ oder auch}$$

$$\frac{4 \sin \frac{1}{2} AB^2}{\sin VA^2} = \frac{\sin BL}{\sin VL} \cdot \frac{\sin AF}{\sin VF}.$$

Fällt man nun aber das Loth VO auf AB, so wird dadurch das gleichschenkelige Dreieck AVB in zwei symmetrische rechtwinkelige getheilt, und es ist also $\frac{\sin \frac{1}{2} AB}{\sin VA} = \sin \frac{1}{2} V$, daher hat man

$$1.\quad 4 . \sin \tfrac{1}{2} V^2 = \frac{\sin AF}{\sin VF} \cdot \frac{\sin BL}{\sin VL}.$$

Weil aber nach §. 260 VLNB harmonisch getheilt ist, so ist $\sin BL . \sin VN = 2 \sin BN . \sin VL$ und also $\frac{\sin BL}{\sin VL} = 2 . \frac{\sin BN}{\sin VN}$; ebenso ist $\frac{\sin AF}{\sin VF} = 2 . \frac{\sin AM}{\sin VM}$, und werden diese Werthe substituirt, so hat man

$$2.\quad \sin \tfrac{1}{2} V^2 = \frac{\sin AM}{\sin VM} \cdot \frac{\sin BN}{\sin VN}.$$

Zusatz 1. Wenn AB ein Durchmesser ist, so stehen die Tangenten VA und VB senkrecht auf AB, und sie selbst sind daher Quadranten; der Winkel V hat nun den Durchmesser AB zum Maaße und es ist also nun

$$4 . \sin \tfrac{1}{2} AB^2 = \operatorname{tng} AF . \operatorname{tng} BL \text{ und}$$
$$\sin \tfrac{1}{2} AB^2 = \operatorname{tng} AM . \operatorname{tng} BN.$$

Auch ist nun $\operatorname{tng} AF = 2 . \operatorname{tng} AM$ und $\operatorname{tng} BL = 2 . \operatorname{tng} BN$.

Zusatz 2. Wenn auch AB kein Durchmesser ist, so ist doch immer BN = NC und AM = MC, daher hat man auch $\sin \frac{1}{2} V^2 = \frac{\sin MC}{\sin VM} \cdot \frac{\sin NC}{\sin VN}$. Bezeichnet man nun einen der beiden Winkel, welche VC mit der Tangente MN macht, mit C, so ist

$$\frac{\sin MC}{\sin VM} = \frac{\sin MVC}{\sin C} \text{ und } \frac{\sin NC}{\sin VN} = \frac{\sin NVC}{\sin C} \text{ und also}$$

$$\sin C^2 = \frac{\sin MVC . \sin NVC}{\sin \frac{1}{2} MVN^2},$$

und hiernach kann der Winkel C berechnet werden, welchen die Tangente MN mit der Sekante VC macht.

Bezeichnet man ferner den Winkel OVC mit v, so ist $MVC = \frac{1}{2} V + v$ und $NVC = \frac{1}{2} V - v$ und also

$$\sin C^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} V^2 - \sin v^2}{\sin \frac{1}{2} V^2},$$

und hieraus folgt $\cos C = \frac{\sin v}{\sin \frac{1}{2} V}$, wenn unter C der Winkel MCV verstanden wird.

§. 262.

Aufgabe. Man soll durch eine Lineal-Construction zu einem Punkte P außerhalb des Kreises die zugehörige Berührungs-Sehne finden.

Auflösung. Man ziehe vom Punkte P in Fig. 147 zwei Sekanten PAD und PBC, ziehe die Sehnen BD und AC, welche sich in R schneiden und die Sehnen DC und AB, welche sich in Q treffen und dann die Hauptbogen QR, welcher der Peripherie in N und M begegne; die Sehne MN ist dann die gesuchte Berührungs-Sehne und zieht man PM und PN, so sind sie Berührungs-Linien.

Beweis. Da die Berührungs-Sehne die Sekanten PAD und PBC harmonisch theilt nach §. 259, und diese Sekanten nach §. 199 harmonisch getheilt sind, so müßten, wenn MN nicht die dem Punkte P zugehörige Sekante wäre, die vorhin genannten Sekanten noch auf eine zweite Art harmonisch getheilt werden können, was aber nicht möglich ist.

§. 263.

Lehrsatz. Durch vier Punkte A, B, C, D der Peripherie eines Kreises können drei Paare Hauptbogen gelegt werden und die drei Durchschnitts-Punkte dieser Linien-Paare bestimmen ein Dreieck, wovon zwei Seiten die den Scheiteln ihrer Gegenwinkel zugehörigen Berührungs-Sehnen sind.

In Fig. 147 sind AD und BC, welche sich in P schneiden, AB und DC, welche sich in Q schneiden, AC und BD, welche sich in R schneiden die drei Linien-Paare und werden die Linien QR, PR und PQ gezogen, so ist PQR das Dreieck, welches die angegebene Eigenschaft hat.

Denn wird die Peripherie von QR in M und N, von PR in K und L geschnitten, so werden nach §. 199 die Sekanten PAD und PBC von QR in E und G harmonisch getheilt, daher ist MN die dem Punkte P zugehörige Berührungs-Sehne; ebenso werden aber auch von PR die Sekanten QBA und QCD in F und H harmonisch getheilt, daher ist KFRHL die dem Punkte Q zugehörige Berührungs-Sehne, der Durchschnitts-Punkt R der beiden Berührungs-Sehnen ist die dritte Ecke des Dreiecks PQR, und also mit dem Durchschnitts-Punkte der Diagonalen des Vierecks ABCD einerlei.

§. 264.

Lehrsatz. Construirt man zu zwei Punkten P und Q außerhalb des Kreises die zugehörigen Berührungs-Sehnen MRN und

KRL, wovon die erste durch P und die zweite durch Q geht, so wird jede durch ihren Durchschnitts-Punkt R gehende Sekante von diesem Punkte, von der Peripherie des Kreises und dem durch P und Q gehenden Hauptkreise harmonisch getheilt.

Beweis. In Fig. 147 sei durch R die Sekante DRBV gezogen von einem beliebigen Punkte V im Bogen PQ, man ziehe auch noch die Sekanten QBA und PBC, welche von den Berührungs-Sehnen in F und G geschnitten werden; ferner ziehe man PA und QC, welche sich in D′ schneiden mögen und von den Berührungs-Sehnen in E und H geschnitten werden. Weil nun aber QBFA harmonisch getheilt ist, so ist auch QCHD′ harmonisch getheilt, und da KFRH die dem Punkte Q zugehörige Berührungs-Sehne ist, so ist D′ ein Punkt der Peripherie, und es schneiden sich also PA und QC auf der Peripherie des Kreises.

Nun muß noch bewiesen werden, daß sich die Linien PA und QC auch auf der Linie VBRD schneiden. Würde VBRD von PA in α und von QC in γ geschnitten, so würde, weil QBFA harmonisch getheilt ist und also die vier Linien PA, PF, PB, PQ ein System von Harmonikalen ausmachen, die Linie VBRα harmonisch getheilt sein. Weil ferner PBGC harmonisch getheilt ist, und also QP, QB, QG, QC ein System von Harmonikalen ausmachen, so würde auch VBRγ harmonisch getheilt sein; daher fallen die Punkte α und γ zusammen, und es schneiden sich also die drei Linien PA, VD und QD in Einem Punkte; da aber dieser Punkt nach dem Vorigen ein Punkt der Peripherie ist, so ist er mit dem Punkte D einerlei, und die Linie DRBV ist also harmonisch getheilt.

Zusatz 1. Wenn zwei Punkte außerhalb des Kreises eine solche Lage haben, daß jeder von ihnen sich in der dem anderen Punkte zugehörigen Berührungs-Sehne befindet, so bestimmen diese beiden Punkte mit dem Durchschnitts-Punkte der beiden Berührungs-Sehnen ein Dreieck von der Art, daß jede von irgend einer Ecke dieses Dreiecks aus gezogene Sekante des Kreises von der dieser Ecke gegenüber liegenden Seite (oder ihrer Verlängerung) und der Peripherie des Kreises harmonisch getheilt wird.

Zieht man ferner von einer Ecke des Dreiecks zwei Sehnen oder Sekanten, so erhellet, daß die beiden anderen Linienpaare, welche durch die vier Endpunkte der Sehnen gelegt werden können, sich in den beiden anderen Eck-Punkten des Dreiecks schneiden.

Zusatz 2. Wenn ein willkührlicher Punkt innerhalb oder auch außerhalb eines Kreises angenommen wird, so gibt es immer Einen von diesem Punkte abhängenden Hauptkreis, welcher die Lage hat, daß er alle durch den genannten Punkt gehenden Sehnen oder Sekanten harmonisch theilt.

§. 265.

Erklärung. Wird ein Punkt innerhalb oder außerhalb eines Kreises angenommen, so heißt der Hauptkreis oder ein Bogen desselben, welcher alle durch jenen Punkt gehenden Sehnen oder Sekanten harmonisch theilt, die dem Punkte zugehörige Polare, und der Punkt selbst heißt ihr Pol.

Zusatz 1. Befindet sich der Pol außerhalb des Kreises, so geht seine Polare durch das Innere des Kreises und ist einerlei mit der diesem Punkte zugehörigen Berührungs-Sehne; befindet sich der Pol innerhalb des Kreises, so befindet sich seine Polare außerhalb desselben.

Zusatz 2. Wenn zwei Pole sich der eine in der Polare des anderen befinden, so ist der Durchschnitts-Punkt der beiden Polaren ein dritter Pol, und der durch die beiden ersten Pole gehende Hauptkreis ist seine Polare.

§. 266.

Aufgabe. Man soll die Polare eines Kreises für einen gegebenen Pol construiren.

Auflösung. Man ziehe durch den gegebenen Pol zwei Sekanten und bestimme zu den drei Punkten in jeder den vierten harmonischen Theilpunkt und zwar den äußeren, wenn der Pol innerhalb des Kreises befindlich ist, hingegen den inneren, wenn der Pol außerhalb des Kreises gegeben ist. Der durch die beiden also bestimmten Punkte gehende Hauptkreis ist die gesuchte Polare.

Ist in Fig. 147 R der gegebene Pol, so ziehe man durch R die willkührlichen Sehnen DRB und CRA, welche verlängert werden. Ferner ziehe man die Linien DC und AB, welche sich in Q schneiden, und die Linien BC und AD, welche sich in P schneiden; durch P und Q ziehe man PQ, wovon BRD und CRA in V und W geschnitten und harmonisch getheilt werden, und es ist PQ die dem Punkte R zugehörige Polare. Wie die einem Punkte P außerhalb des Kreises zugehörige Polare construirt wird, ist schon im §. 263 angegeben worden.

§. 267.

Durch vier Punkte der Peripherie eines Kreises kann man drei Linien-Paare legen und ihre drei Durchschnitts-Punkte haben dieselben Polaren in Hinsicht auf den Kreis und in Hinsicht auf diese Linien-Paare.

Beweis. In Fig. 147 geht durch die vier Punkte A, B, C, D ein Kreis und das Linien-Paar DA und CB, welches sich in P

schneidet, ferner das Linien-Paar DC und AB, welches sich in Q schneidet und noch das Linien-Paar DB und AC, welches sich in R schneidet; zieht man nun noch PR, wovon der Kreis in K und L, QA und QD aber in F und H geschnitten werden; ferner QR, wovon der Kreis in M und N, PD und PC aber in E und G geschnitten werden; endlich PQ, wovon BD und AC in V und W getroffen ist, so ist die Polare des Punktes P in Ansehung des Kreises MN nach §. 266; aber MN ist auch die Polare des Poles P in Ansehung der beiden Linien DCQ und ABQ nach §. 199 und aus demselben Grunde ist MN auch die Polare des Poles P in Ansehung der beiden Linien ARC und BRD.

Ferner ist KL die Polare des Poles Q in Ansehung des Kreises nach §. 266; aber KL ist auch die Polare des Poles Q in Ansehung der beiden Linien ARC und BRD, und auch in Ansehung der beiden Linien PD und PC.

Endlich ist PQ nach §. 264 die Polare des Poles R in Ansehung des Kreises; aber PQ ist auch die Polare des Poles R in Ansehung der beiden Linien DCQ und ABQ; denn da QP, QA, QR, QD ein System von Polaren sind, so wird jede fünfte Linie dadurch harmonisch getheilt, sie mag durch den Punkt R gehen oder nicht; zuletzt ist PQ auch noch die Polare des Poles R in Ansehung der beiden Linien DAP und CBP, weil PD, PR, PC, PQ ein System von Harmonikalen ausmachen, und also jede fünfte Linie von ihnen harmonisch getheilt wird, sie mag durch R gehen, oder nicht.

§. 268.

Aufgabe. Man soll zu einer gegebenen Polare pq eines Kreises den Pol finden.

Auflösung. Man wähle in der Polare pq zwei beliebige Pole p und q, bestimme in Fig. 148 ihre Polaren PP und QQ; ihr Durchschnitts-Punkt X ist der gesuchte Pol zu pq.

Beweis. Man ziehe pX, wovon die Peripherie in p′ und p″ geschnitten werden, und qX, wovon die Peripherie in q′ und q″ geschnitten wird. Da nun aber pp′Xp″ harmonisch getheilt ist, weil p der Pol von PP, und qq′Xq″ harmonisch getheilt ist, weil q der Pol von QQ ist, so ist pq nach §. 266 die Polare des Poles X und also umgekehrt X der Pol für pq.

Zusatz. Zu jeder Polare pq eines Kreises gehört nur ein Pol. Denn gehörten zur Polare pq zwei Pole X und X′, so könnte man durch X und X′ einen Hauptbogen legen, wovon die Peripherie in v und w und die Polare pq in u geschnitten werden mag; und es wären die beiden Linien u v X w und u v X′ w zugleich harmonisch getheilt, was nicht möglich ist, es sei denn, daß X und X′ Gegenpunkte wären, was aber wider die Annahme ist.

§. 269.

Wenn drei Pole eines Kreises in Einem Hauptbogen liegen, so schneiden sich ihre Polaren in Einem Punkte, dem Pole jenes Hauptbogens.

Beweis. Befinden sich in Fig. 148 die drei Pole p, q, r in Einem Hauptkreise, und sind PP, QQ, RR ihre Polaren, so schneiden sie sich in Einem Punkte X. Denn hätte die Polare RR des Poles r die Lage von ZY und würde PP davon in y und QQ davon in z geschnitten, so wäre X der Pol von pq, y der Pol von pr und z der Pol von pr nach §. 268, und es hätte also der Hauptbogen pqr drei verschiedene Pole, was nicht möglich ist. Daher schneiden sich die drei Polaren der Punkte p, q, r in Einem Punkte X, welcher nach §. 268 der Pol von pqr ist.

Zusatz 1. Wenn drei Pole eines Kreises nicht in Einem Hauptbogen liegen, so schneiden sich ihre Polaren nicht in Einem Punkte.

Denn wenn sie sich in Einem Punkte schnitten, so hätte dieser Punkt drei verschiedene Polaren, was nicht möglich ist.

Zusatz 2. Wenn sich drei Sehnen oder Sekanten eines Kreises in Einem Punkte schneiden, so befinden sich ihre drei Pole in Einem Hauptbogen.

Zusatz 3. Wenn sich drei Sehnen oder Sekanten eines Kreises nicht in Einem Punkte schneiden, so befinden sich ihre Pole nicht in Einem Hauptbogen.

§. 270.

Wenn die Peripherie eines Kreises von den Seiten eines Dreiecks ABC in Fig. 149, 150, 151 geschnitten wird, und zwar von AC in D und E, von AB in F und G und von BC in I und H, so ist immer

$$\frac{\sin AD . \sin AE}{\sin CD . \sin CE} \cdot \frac{\sin CI . \sin CH}{\sin BI . \sin BH} \cdot \frac{\sin BF . \sin BG}{\sin AF . \sin AG} = 1.$$

Beweis. Es ist nach §. 255 oder §. 257

$$\frac{\sin AD . \sin AE}{\sin AF . \sin AG} = \frac{\cos \frac{1}{2} ED^2}{\cos \frac{1}{2} FG^2},$$

$$\frac{\sin BF . \sin BG}{\sin BH . \sin BI} = \frac{\cos \frac{1}{2} FG^2}{\cos \frac{1}{2} HI^2}, \text{ und}$$

$$\frac{\sin CH . \sin CI}{\sin CD . \sin CE} = \frac{\cos \frac{1}{2} HI^2}{\cos \frac{1}{2} DE},$$

und werden diese drei Proportionen multiplicirt, so erhält man auf der Stelle

$$\frac{\sin AD . \sin AE}{\sin AF . \sin AG} \cdot \frac{\sin BF . \sin BG}{\sin BH . \sin BI} \cdot \frac{\sin CH . \sin CI}{\sin CD . \sin CE} = 1,$$

und diese Proportion ist mit der im Satze aufgestellten offenbar einerlei. Diese Gleichung gilt auch dann noch, wenn zwei solche Punkte, die sich in derselben Seite des Dreiecks ABC oder in ihrer Verlängerung befinden, in einen zusammen fallen.

Zusatz. Wenn umgekehrt in Fig. 149, 150 und 151 von den sechs Punkten D, E, F, G, H, I, wovon je zwei auf einer Seite des Dreiecks ABC liegen, die im Satze aufgestellte Proportion gilt und fünf derselben in der Peripherie eines Kreises liegen, so liegt auch der sechste Punkt im Umfange dieses Kreises.

§. 271.

Lehrsatz. Die gegenüberliegenden Seiten eines Sechsecks im Kreise schneiden sich jedesmal in drei Punkten, welche in Einem Hauptkreise liegen.

Beweis. Es seien in Fig. 149, 150, 151 D, E, F, G, H, I sechs Punkte in der Peripherie eines Kreises, zieht man noch DI, GH und EF, so erhält man das Sechseck DEFGHI. Schneiden sich nun EF und HI im Punkte X, HG und DE im Punkte Y, DI und FG im Punkte Z, so ist nach §. 186

$$\frac{\sin XB}{\sin XC} = \frac{\sin BF}{\sin AF} \cdot \frac{\sin AE}{\sin CE},$$

$$\frac{\sin YC}{\sin YA} = \frac{\sin CH}{\sin BH} \cdot \frac{\sin BG}{\sin AG},$$

$$\frac{\sin ZA}{\sin ZB} = \frac{\sin AD}{\sin CD} \cdot \frac{\sin CI}{\sin BI},$$

und also $\frac{\sin XB}{\sin XC} \cdot \frac{\sin YC}{\sin YA} \cdot \frac{\sin ZA}{\sin ZB}$

$$= \frac{\sin AD \cdot \sin AE}{\sin CD \cdot \sin CE} \cdot \frac{\sin CI \cdot \sin CH}{\sin BI \cdot \sin BH} \cdot \frac{\sin BF \cdot \sin BG}{\sin AF \cdot \sin AG}$$ oder

nach §. 271 $\frac{\sin XB}{\sin XZ} \cdot \frac{\sin YC}{\sin YA} \cdot \frac{\sin ZA}{\sin ZB} = 1$, es liegen also dem §. 186 gemäß die drei Punkte X, Y, Z, in welchen sich die Gegenseiten des Sechsecks DEFGH schneiden, in Einem Hauptkreise.

§. 272.

Irgend drei Sehnen AA', BB', CC' eines Kreises machen mit den intercipirten Bogen der Peripherie drei Vierecke AA'B'B, BB'C'C und AA'C'C und die Durchschnittspunkte α, γ, β der Diagonalen dieser drei Vierecke liegen jedesmal in Einem Hauptkreise mm.

Beweis. In Fig. 152 bezeichne man den Durchschnittspunkt von BA' und CB' mit R, den Durchschnittspunkt von AC' und BA' mit F und der Durchschnittspunkt von AC' und CB' mit Q,

so hat man das Dreieck PQR, von dessen Seiten die Peripherie in den sechs Punkten A, B, C, A′, B′, C′ geschnitten wird, und es ist also nach §. 271

$$1.\quad \frac{\sin RB\,.\,\sin RA'}{\sin PB\,.\,\sin PA'} \cdot \frac{\sin PA\,.\,\sin PC'}{\sin QA\,.\,\sin QC'} \cdot \frac{\sin QC\,.\,\sin QB'}{\sin RC\,.\,\sin RB'} = 1.$$

Weil nun aber die Seiten des Dreiecks PQR von AB′ in A, α und B′ geschnitten werden, so ist nach §. 186

$$\frac{\sin\ AP}{\sin\ AQ} = \frac{\sin\ P\alpha}{\sin\ R\alpha} : \frac{\sin\ QB'}{\sin\ RB'} \text{ oder auch}$$

$$2.\quad \frac{\sin\ P\alpha}{\sin\ R\alpha} = \frac{\sin\ PA}{\sin\ QA} \cdot \frac{\sin\ QB'}{\sin\ RB'}.$$

Weil ferner die Seiten des Dreiecks PQR von CA′ geschnitten worden, so ist

$$\frac{\sin\ A'P}{\sin\ A'R} = \frac{\sin\ P\beta}{\sin\ Q\beta} : \frac{\sin\ RC}{\sin\ QC} \text{ oder auch}$$

$$3.\quad \frac{\sin\ Q\beta}{\sin\ P\beta} = \frac{\sin\ RA'}{\sin\ PA'} \cdot \frac{\sin\ QC}{\sin\ RC}.$$

Weil endlich auch die Seiten des Dreiecks PQR von BC′ in B, γ und C′ geschnitten werden, so ist

$$\frac{\sin\ C'Q}{\sin\ C'P} = \frac{\sin\ Q\gamma}{\sin\ R\gamma} : \frac{\sin\ PB}{\sin\ RB} \text{ oder auch}$$

$$4.\quad \frac{\sin\ R\gamma}{\sin\ Q\gamma} = \frac{\sin\ PC'}{\sin\ QC'} \cdot \frac{\sin\ RB}{\sin\ PB},$$

und werden die drei letzten Proportionen multiplicirt, so hat man der Proportion (1) gemäß

$$\frac{\sin\ P\alpha}{\sin\ R\alpha} \cdot \frac{\sin\ Q\beta}{\sin\ P\beta} \cdot \frac{\sin\ R\gamma}{\sin\ Q\gamma} = 1,$$

daher liegen nach §. 186 die drei Punkte α, β, γ in Einem Hauptbogen.

Anmerkung. Dieser Beweis ist dem Beweise im §. 272 sehr ähnlich, auch ist das so eben bewiesene Theorem selbst im Grunde mit dem vorigen einerlei, wenn man nur AB′CA′BC′ jetzt als ein Sechseck ansieht; denn die gegenüberliegenden Seiten dieses Sechsecks sind nun AB′ und BA′, BC′ und CB′, AC′ und CA′, daher schneiden sie sich in drei Punkten α, γ, β, welche in Einem Hauptbogen liegen.

Wird aber der Satz im §. 272 so ausgesprochen, wie er in diesem Paragraph ausgesprochen worden ist, so hat er große Ähnlichkeit mit dem Satze im §. 219.

§. 273.

Hülfssatz. Wenn ein Polygon von n Seiten gegeben ist, und man darin alle mögliche Diagonalen zieht, so erhält man, das

gegebene Polygon mit gerechnet, $\frac{1}{2} . 1 . 2 . 3 \ldots (n-2)(n-1)$ Polygone, wovon jedes wieder n Seiten und dieselben Ecken als das gegebene Polygon, nur in anderer Folge hat.

Beweis. Es seien A, B, C, ... N die gegebenen Eckpunkte, deren Anzahl also $= n$ ist; läßt man nun einen Buchstaben N weg, und permutirt man die übrigen Buchstaben, so erhält man eine Menge von Permutations-Formen, welche $= 1 . 2 . 3 \ldots (n-2)(n-1)$ ist, und wenn man zu jeder Permutationsform den weggelassenen Buchstaben N wieder am Ende oder zu Anfange einer jeden Form hinzufügt, so hat man das Schema, welchem gemäß man, vom Punkte N ausgehend, auf alle mögliche Arten die übrigen Punkte durchlaufen, und auf den Punkt N wieder zurückkommen kann. Jeder solcher Weg ist der Umfang einer Figur; da man aber, vom Punkte N ausgehend, denselben Umfang nach zwei entgegengesetzten Seiten durchlaufen kann, so hat man nur halb so viele Figuren, als jenes Product angibt, weil dem Gesagten gemäß der Umfang einer jeden Figur zweimal gezählt worden ist; daher ist die Anzahl aller verschiedenen n seitigen Polygone, welche dieselben n Ecken haben, $= \frac{1}{2} . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots (n-2)(n-1)$, und in dieser Zahl ist das gegebene Polygon selbst wieder begriffen.

Ist z. B. $n = 3$, so ist die Zahl $= \frac{1}{2} . 1 . 2 = 1$, d. h. ein Dreieck ist nur auf eine Weise ein Dreieck. Ist $n = 4$, so ist die Zahl $= \frac{1}{2} . 1 . 2 . 3 = 3$, d. h. wenn vier Punkte durch alle mögliche Hauptbogen verbunden werden, so hat man drei Vierecke, welche dieselben vier Ecken haben. Ist $n = 5$, so ist die Zahl $= \frac{1}{2} . 1 . 2 . 3 . 4 = 12$, und es gibt also immer 12 Fünfecke, welche dieselben fünf Ecken haben. Ist $n = 6$, so ist die Zahl $= \frac{1}{2} . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 60$ und es gibt also immer 60 Sechsecke, welche dieselben sechs Ecken haben; u. s. w.

Alle diese Polygone können nach dem im obigen Beweise Gesagten leicht gefunden werden.

§. 274.

Lehrsatz. Werden irgend sechs Punkte in der Peripherie eines Kreises angenommen, und auf alle mögliche Arten durch Sehnen verbunden, so ist die Anzahl dieser Sehnen $= 15$ und es lassen sich sechszigmal drei Paare von Sehnen nachweisen, die sich jedesmal in Einem Hauptbogen schneiden.

Beweis. Nach §. 273 bestimmen die sechs Punkte im Umfange des Kreises 60 Sechsecke, und da sich die gegenüberliegenden Seiten eines jeden dieser Sechsecke nach §. 271 in drei Punkten schneiden, welche in Einem Hauptbogen liegen, so erhellet die Wahrheit der Behauptung.

§. 275.

Hülfssatz. Wenn in Fig. 153 ACB ein Peripherie-Winkel auf dem Bogen AB und sein einer Schenkel CMA ein Durchmesser ist, so kann man den Radius MB ziehen und MD senkrecht auf CB fällen, wodurch CB und auch der Winkel CMB halbirt wird, und es ist dann im Dreiecke MCD

$$\cos MC = \cot C \,.\, \cot CMD = \cot C \,.\, \mathrm{tng}\, \tfrac{1}{2}\, AMB,$$

und da der Winkel AMB zum Maße den Bogen AB hat, so ist, wenn der Radius des Kreises mit r bezeichnet wird

$$\cot C = \cos r \,.\, \cot \tfrac{1}{2}\, AB;$$

daher ist die Cotangente eines Peripherie-Winkels gleich der Cotangente des halben Bogens, worauf er steht, multiplicirt mit dem Cosinus des Kreishalbmessers.

§. 276.

Hülfssatz. Wenn in Fig. 154 von einem Punkte V der Peripherie eines Kreises die Sehnen VD, VC, VB, VA gezogen sind, deren Winkel durch einen Bogen $\alpha\beta\gamma\delta$ gemessen werden und so beschaffen sind, daß

$$\frac{\sin \delta\gamma \,.\, \sin \alpha\beta}{\sin \beta\gamma \,.\, \sin \alpha\delta} = \frac{m}{n} \text{ ist, so ist auch}$$

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}\, CD \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\, AB}{\sin \tfrac{1}{2}\, BC \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\, AD} = \frac{m}{n}.$$

Beweis. Zieht man noch den Durchmesser VME, wovon der Bogen $\alpha\beta\gamma\delta$ in ε geschnitten wird, so ist $\delta\gamma = \varepsilon\gamma - \varepsilon\delta$, $\alpha\beta = \varepsilon\alpha - \varepsilon\beta$, $\beta\gamma = \varepsilon\beta - \varepsilon\gamma$, $\alpha\delta = \varepsilon\alpha - \varepsilon\delta$ und also

$$\frac{\sin (\varepsilon\gamma - \varepsilon\delta) \,.\, \sin (\varepsilon\alpha - \varepsilon\beta)}{\sin (\varepsilon\beta - \varepsilon\gamma) \,.\, \sin (\varepsilon\alpha - \varepsilon\delta)} = \frac{m}{n} \text{ oder auch}$$

$$\frac{(\cot \varepsilon\delta - \cot \varepsilon\gamma) \,.\, (\cot \varepsilon\beta - \cot \varepsilon\alpha)}{(\cot \varepsilon\gamma - \cot \varepsilon\beta) \,.\, (\cot \varepsilon\delta - \cot \varepsilon\alpha)} = \frac{m}{n}.$$

Da nun aber nach §. 275 ist $\cot \varepsilon\delta = \cot \tfrac{1}{2}\, ED \,.\, \cos r$, $\cot \varepsilon\gamma = \cot \tfrac{1}{2}\, EC \,.\, \cos r$, $\cot \varepsilon\beta = \cot \tfrac{1}{2}\, EB \,.\, \cos r$ und $\cot \varepsilon\alpha = \cot \tfrac{1}{2}\, EA \,.\, \cos r$, so erhält man, wenn diese Werthe substituirt werden,

$$\frac{(\cot \tfrac{1}{2}\, ED - \cot \tfrac{1}{2}\, EC) \,.\, (\cot \tfrac{1}{2}\, EB - \cot \tfrac{1}{2}\, EA)}{(\cot \tfrac{1}{2}\, EC - \cot \tfrac{1}{2}\, EB) \,.\, (\cot \tfrac{1}{2}\, ED - \cot \tfrac{1}{2}\, EA)} = \frac{m}{n},$$

weil sich der Factor $\cos r^2$ im Zähler und Nenner aufhebt, und es ist also auch, wenn man wieder zu den Sinus übergeht

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}(EC - ED) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\, (EA - EB)}{\sin \tfrac{1}{2}(EB - EC) \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\, (EA - ED)} = \frac{m}{n}, \text{ oder auch}$$

$$\frac{\sin \tfrac{1}{2}\, CD \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\, AB}{\sin \tfrac{1}{2}\, BC \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\, AD} = \frac{m}{n}.$$

Daher ist immer

$$\frac{\sin DVC \,.\, \sin AVB}{\sin CVB \,.\, \sin DVA} = \frac{\sin \frac{1}{2} DC \,.\, \sin \frac{1}{2} AB}{\sin \frac{1}{2} CB \,.\, \sin \frac{1}{2} DA}.$$

Zusatz. Auf gleiche Art wird bewiesen, daß immer

$$\frac{\sin DVB \,.\, \sin AVC}{\sin DVC \,.\, \sin AVB} = \frac{\sin \frac{1}{2} DB \,.\, \sin \frac{1}{2} AC}{\sin \frac{1}{2} DC \,.\, \sin \frac{1}{2} AB} \text{ und}$$

$$\frac{\sin DVB \,.\, \sin AVC}{\sin BVC \,.\, \sin AVD} = \frac{\sin \frac{1}{2} DB \,.\, \sin \frac{1}{2} AC}{\sin \frac{1}{2} BC \,.\, \sin \frac{1}{2} AD}$$

sei; auch können diese beiden Proportionen leicht aus der vorigen nach §. 182 hergeleitet werden, und es erhellet auf diese Art, daß diese drei Proportionen nur verschiedene Formen des Ausdrucks für einen und denselben Zusammenhang sind.

§. 277.

Lehrsatz. Wird die Peripherie eines Kreises Fig. 155 von vier Sehnen AA′, BB′, CC′, DD′ so geschnitten, daß ist

$$\frac{\sin \frac{1}{2} AB \,.\, \sin \frac{1}{2} CD}{\sin \frac{1}{2} BC \,.\, \sin \frac{1}{2} AD} = \frac{\sin \frac{1}{2} A'B' \,.\, \sin \frac{1}{2} C'D'}{\sin \frac{1}{2} B'C' \,.\, \sin \frac{1}{2} A'D'},$$

so liegen in den dadurch bestimmten sechs Vierecken AA′B′B, BB′C′C, CC′D′D, AA′C′C, BB′D′D und AA′D′D die Durchschnittspunkte der Diagonalen in Einem und demselben Hauptkreise.

Beweis. Da vom Punkte A′ aus die vier Sehnen A′A, A′B, A′C, A′D gezogen sind, welche die Peripherie in A, B, C, D treffen, so ist nach §. 276

$$\frac{\sin AA'B \,.\, \sin DA'C}{\sin BA'C \,.\, \sin AA'D} = \frac{\sin \frac{1}{2} AB \,.\, \sin \frac{1}{2} CD}{\sin \frac{1}{2} BC \,.\, \sin \frac{1}{2} AD},$$

und aus demselben Grunde ist

$$\frac{\sin A'AB' \,.\, \sin D'AC'}{\sin B'AC' \,.\, \sin A'AD'} = \frac{\sin \frac{1}{2} A'B' \,.\, \sin \frac{1}{2} C'D'}{\sin \frac{1}{2} B'C' \,.\, \sin \frac{1}{2} A'D'},$$

und daher ist

$$\frac{\sin AA'B \,.\, \sin DA'C}{\sin BA'C \,.\, \sin AA'D} = \frac{\sin A'AB' \,.\, \sin D'AC'}{\sin B'AC' \,.\, \sin A'AD'};$$

aber wegen dieser Proportion schneiden sich bekanntlich die drei Sehnenpaare AB′ und A′B, AC′ und A′C, AD′ und A′D in drei Punkten β, γ, δ, welche in Einem Hauptkreise mm liegen. Was aber von den Winkeln bewiesen ist, deren Scheitel A und A′ sind, kann ebenso von den Winkeln bewiesen werden, deren Scheitel B und B′ sind, und daher liegen die Durchschnitts-Punkte β von BA′ und B′A, ϑ von BC′ und B′C, ε von BD′ und B′D ebenfalls in Einem Hauptbogen, und nach §. 272 ist dieser Hauptbogen mit dem vorigen mm derselbe.

Ein Gleiches gibt endlich auch von den Winkeln, deren Scheitel C und C' sind und auch von den Winkeln, deren Scheitel D und D' sind, und so erhellet, daß die sechs Durchschnitts-Punkte β, γ, δ, ϑ, ε, η in Einem Hauptbogen mm befindlich sind.

Zusatz. Statt der im Satze aufgestellten Proportion, welche die Bedingung der Lage der vier Sehnen AA', BB', CC', DD' ausdrückt, kann auch eine der beiden nachfolgenden Proportionen

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AC \cdot \sin\frac{1}{2}BD}{\sin\frac{1}{2}AB \cdot \sin\frac{1}{2}CD} = \frac{\sin\frac{1}{2}A'C' \cdot \sin\frac{1}{2}B'D'}{\sin\frac{1}{2}A'B' \cdot \sin\frac{1}{2}C'D'},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AC \cdot \sin\frac{1}{2}BD}{\sin\frac{1}{2}BC \cdot \sin\frac{1}{2}AD} = \frac{\sin\frac{1}{2}A'C' \cdot \sin\frac{1}{2}B'D'}{\sin\frac{1}{2}B'C' \cdot \sin\frac{1}{2}A'D'}$$

genommen werden, denn diese drei Proportionen sind nach §. 182 gleichbedeutend.

Anmerkung. Das vorstehende Theorem hat mit dem im §. 224 und §. 225 behandelten Theoreme große Ähnlichkeit; wie dort, so kann auch hier die Zahl der Vierecke, deren Diagonalen sich auf einem Hauptbogen mm schneiden, beliebig vermehrt werden, und es dürfen selbst die Reihen der Punkte A, B, C, D etc. und A', B', C', D', etc. über die Punkte hinaus, in welchen die Peripherie von der Linie mm geschnitten wird, nach beiden Seiten fortgesetzt werden.

§. 278.

Die meisten vorhergehenden und nachfolgenden Lehrsätze gelten unverändert auch vom Kreise im Bezug auf gerade Linien, sie gelten ferner von den ebenen und sphärischen Kegelschnitten und im Bezug auf die sphärischen Kegelschnitte ist der Beweis ebenfalls noch mit den vorhin geführten Beweisen übereinstimmend. Das im §. 271 bewiesene Theorem insbesondere, dessen Erfindung im Bezug auf die ebenen Kegelschnitte man Pascal zuschreibt, kann ganz ebenso auch von den sphärischen Kegelschnitten bewiesen werden; denn die im §. 270 hergeleitete Proportion gilt nicht nur vom Kreise, sondern von allen sphärischen Kegelschnitten, und ausgehend von ihr ist eine ziemlich elementare Behandlung der sphärischen Kegelschnitte überhaupt möglich. Der Pascalsche Satz gilt auch dann noch, wenn einige von den sechs Punkten zusammenfallen; nur muß die Figur immer noch als ein Sechseck angesehen werden, oder richtiger ausgedrückt, statt einer Seite des vorigen Sechsecks, deren Endpunkte in Einen Punkt zusammenfallen, muß eine Tangente dieses Punktes an die Stelle gesetzt, und so weit verlängert werden, bis die gegenüberstehende Seite davon geschnitten wird. Wenn z. B. in Fig. 149 D mit I zusammenfällt, ferner G mit H und F mit E, so erhält man dem Vorigen gemäß drei Tangenten und ihre Berührungs-

Punkte bestimmen ein Dreieck, dessen Seiten von den Tangenten der gegenüberliegenden Ecken in drei Punkten geschnitten werden, welche in Einem Hauptkreise liegen, dem Pascalschen Satze gemäß. Indessen wird in diesem Elementar-Buche ein besonderer Beweis für diesen Fall nicht am unrechten Orte sein.

§. 279.

Lehrsatz. Ist ein Dreieck in einen Kreis geschrieben und legt man durch die Ecken desselben Tangenten, so werden die gegenüberstehenden Seiten davon in drei Punkten geschnitten, welche in Einem Hauptbogen liegen.

Beweis. In Fig. 156 sei ABC das Dreieck im Kreise, und es werde AB von der Tangente des Scheitels C in D, BC von der Tangente des Scheitels A in F, und AC von der Tangente des Scheitels B in E geschnitten, so liegen die Punkte D, E, F in Einem Hauptkreise. Denn schneiden sich die drei Tangenten in p, q, r, so ist pqr ein Proportional-Dreieck in Ansehung der Punkte A, B, C; daher sind qCpD, FqAr und ErBp harmonisch getheilt, und es liegen also die drei Punkte D, E, F nach §. 202 oder auch §. 203 in Einem Hauptkreise.

Anmerkung. Wenn man aus den Punkten D, E, F Kreise beschreibt, deren Radien die Tangenten DC, FA und EB sind, so schneiden sich diese drei Kreise zweimal in Einem Punkte. Dieser Satz kann noch allgemeiner aufgestellt werden, wie jetzt folgt.

§. 280.

Lehrsatz. Wenn man von mehren Punkten eines Hauptbogens Tangenten an einen Kreis zieht, und aus diesen Punkten neue Kreise beschreibt, welche diese Tangenten zu Radien haben, so gibt es zwei Punkte, durch welche alle diese Kreise gehen, es sei denn, daß sich diese Kreise berühren, in welchem Falle die beiden Punkte in Einen zusammenfallen.

Beweis. In Fig. 157 seien A, B, C drei Punkte eines Hauptbogens, von welchen aus die Tangenten Aa, Bb, Cc gezogen sind. Zieht man auch die Linien Am, Bm, Cm nach dem Mittelpunkte des Kreises und die Radien ma, mb, mc, so hat man die an a, b, c rechtwinkeligen Dreiecke Aam, Bbm und Ccm; der Radius des Kreises mag mit r bezeichnet werden.

Weil nun die Linien Am, Bm und Cm sich im Punkte m vereinigen, so ist nach §. 239

$$\cos Bm \,.\, \sin AC = \cos Am \,.\, \sin BC + \cos Cm \,.\, \sin AB;$$

weil aber $\cos Bm = \cos Bb \cos r$, $\cos Am = \cos Aa \cos r$ und $\cos Cm = \cos Cc \,.\, \cos r$ ist, so ist $\cos Bb \,.\, \cos r \,.\, \sin AC =$

cos Aa . cos r . sin BC + ces Cc . cos r . sin AB, und wird diese Gleichung durch cos r dividirt, so hat man auch

cos Bb . sin AC = cos Aa . sin BC + cos Cc . sin AB,

und diese Gleichung drückt aus, daß, wenn die Linien Aa, Bb, Cc oberhalb AC um die Punkte A, B, C gedrehet werden, sie sich in Einem Punkte vereinigen, wie sich vorhin die Linien Am, Bm, Cm im Punkte m vereinigten. Unterhalb AC findet ein Gleiches Statt. Daß die gefundene Gleichung in der That das Behauptete ausdrücke, davon überzeugt man sich leicht, auf folgende Art.

Die aus A und C mit den Radien Aa und Cc beschriebenen Kreise mögen sich in einem Punkte m′ schneiden; zieht man dann noch Bm′, so ist nach §. 239

cos Bm′ . sin AC = cos Am′ . sin BC + cos Cm′ . sin AB,

und da nach der Annahme Am′ = Aa und Cm′ = Cc ist, so hat man also

cos Bm′ . sin AC = cos Aa . sin BC + cos Cc . sin AB,

und da dem nach dem Vorigen cos Cc . sin AC = cos Aa . sin BC + cos Cc . sin AB ist, so folgt, daß cos Bm′ = cos Cc und also Cc = Bm′ sei. Beschreibt man also aus B einen dritten Kreis mit dem Radius Cc, so geht er offenbar durch den Punkt m′; unterhalb AC gibt es einen zweiten Punkt m″, wovon dasselbe bewiesen werden kann und verbindet man die beiden Punkte m′ und m″ durch einen Hauptbogen m′m″, so steht dieser auf AC senkrecht und wird durch AC halbirt; daher ist die Lage des Punktes m″ durch die Lage des Punktes m′ völlig bestimmt. Fällt man aus m′ ein Perpendikel auf ABC, und verlängert man es auf der entgegengesetzten Seite von ABC um die eigene Länge, so ist der Endpunkt dieser Verlängerung der gesuchte Punkt m″.

Nimmt man noch mehrere Punkte D, E ꝛc. im Hauptbogen ABC an, und zieht man von ihnen aus die Tangenten Dd, Ee ꝛc., so gilt von den drei Linien Bb, Cc, Dd, dasselbe, was von den Linien Aa, Bb, Cc bewiesen ist; dasselbe gilt auch von den Tangenten Cc, Dd und Ee; u. s. w.

Zusatz. Im Beweise wurde vorausgesetzt, daß sich die mit den Radien Aa und Cc aus den Punkten A und C beschriebenen Kreise im Punkte m′ schnitten, und die folgenden Schlüsse beruheten auf dieser Voraussetzung. Dieser Durchschnittspunkt ist aber nicht immer möglich, und zwar dann nicht, wenn Aa + Cc < AC ist, denn wenn sich die Kreise ungeachtet dieser Annahme in Einem Punkte m′ schnitten, so wären die Seiten Am′ und Cm′ dieses Dreiecks zusammen kleiner, als die dritte Seite, was bei der gewöhnlichen Ansicht eines Dreiecks nicht möglich ist. Wenn aber der Punkt m′ nicht möglich ist, so ist auch m″ unmöglich, also ist dann auch die gemeinchaftliche Sehne m′m″ der sämmtlichen aus A, B, C, D, E ꝛc. beschriebenen Kreise unmöglich.

In einem solchen Falle pflegt man gleichwohl eine Linie m′m″ zu construiren, welche dieselben Eigenschaften in Beziehung auf die genannten Kreise hat, als wäre sie möglich; sie heißt dann eine ideale Sehne, und davon wird später ausführlicher gehandelt werden.

Der erwähnte Fall tritt dann ein, wenn die Hauptbogen ABC nicht ganz außerhalb des Kreises befindlich ist.

§. 281.

Lehrsatz. Alle Tangenten eines Kreises schneiden seinen Mittelkreis unter einem constanten Winkel, welcher das Complement vom Radius des Kreises ist, und die Länge einer solchen Tangente zwischen dem Berührungs-Punkte und dem Mittelkreise ist immer ein Quadrant.

Beweis. In Fig. 158 sei MA der Radius eines Kreises, dessen Mittelpunkt M also auch der Mittelpunkt seines Mittelkreises BcC ist, AC sei eine Tangente, welche den Mittelkreis in C trifft, der Radius MA treffe den Mittelkreis in B, dann ist MB der Radius des Mittelkreises, welcher auf demselben senkrecht steht, und ein Quadrant ist. Da nun auch AC senkrecht auf MB steht, so ist C das Centrum des Quadranten MB und also CB = CA = 90°.

Ferner hat der Winkel ACB zum Maße den Bogen AB, und da AB + MA = 90° ist, so ist auch ACB + MA = 90°.

Zusatz. Ist ca eine andere Tangente, und a der Berührungs-Punkt, so ist auch ca = 90° und acb + MA = 90°, also ist acb = ACB. Schneiden sich die beiden Tangenten in γ, so ist γa = γA, und also Cγ + cγ = 180°.

§. 282.

Wenn man also einen Quadranten unter einem beliebigen schiefen Winkel auf einen Hauptkreis setzt, und also bewegt, daß der eine Endpunkt den Hauptkreis beschreibt, während der Winkel, welchen der Quadrant mit dem Hauptkreise macht, derselbe bleibt, so beschreibt der andere Endpunkt des Quadranten einen Kreis, dessen Mittelkreis der gegebene Hauptkreis ist, und dessen Radius das Complement des spitzen Winkels ist, welchen der beschreibende Quadrant mit dem gegebenen Hauptkreise macht. Ferner ist der beschreibende Quadrant in allen Lagen, die er während der genannten Bewegung hat, eine Tangente des von seinem Endpunkte beschriebenen Kreises, und dieser Kreis ist also von unendlich vielen Tangenten umhüllt.

Wenn ferner ein Hauptbogen auf einem anderen unter einem constanten schiefen Winkel fortrückt, so umhüllt er einen Kreis, und seine Länge zwischen dem Berührungs-Punkte und dem Hauptkreise, womit er den constanten Winkel macht, ist immer ein Quadrant. Bleibt

der Winkel, welchen der bewegte Hauptkreis mit dem festen Hauptkreise macht, nicht constant, sondern ändert er während des Fortrückens seine Größe nach irgend einem Gesetze, so umhüllt der bewegte Hauptkreis irgend eine sphärische Curve anderer Art. So sieht man also, wie sphärische Curven aller Arten durch Einhüllung nach irgend einem Gesetze beschrieben werden können, und es ist diese Vorstellungs-Art ebenso einfach, als die gewöhnliche der Beschreibung einer Curve durch die Bewegung eines Punktes.

Ein besonderer, aber sich unendlich oft wiederholender Fall ist der, wenn der bewegte Hauptkreis auf dem unveränderlichen unter einem rechten Winkel fortrückt; der bewegte Hauptkreis umhüllt nun keinen Nebenkreis, sondern bloß einen Punkt, nämlich das Centrum des festen Hauptkreises. Dieser einfache Fall ist für die nachfolgende analytische Sphärik besonders wichtig; indem auf diese Weise in ihr ein Punkt als durch zahllose, durch ihn gehende, Hauptkreise bestimmt wird.

§. 283.

Aufgabe. Zieht man in Fig. 159 von einem Punkte V nach drei Punkten a, b, c der Peripherie eines Kreises die Hauptbogen Va, Vb, Vc, und legt man Tangenten durch die Punkte a, b, c, so machen sie mit den drei Hauptbogen Winkel; man soll aus zweien derselben den dritten finden. Aus dem Mittelpunkte m beschreibe man den Mittelkreis, und verlängere die Hauptbogen Va, Vb, Vc, bis der Mittelkreis davon in A', B', C' geschnitten wird, dann ist nach §. 239

$$\cos B \,.\, \sin aVc = \cos A \,.\, \sin bVc + \cos C \,.\, \sin aVb.$$

Nun ist aber im rechtseitigen (nach §. 281) Dreiecke AaA' der negative Cosinus der Hypotenuse ein Product aus den Cosinus der beiden Katheten AaA' und AA'a, und also $- \cos A = \cos AaA' \,.\, \cos AA'a$, und da, wenn der Radius des Kreises mit r bezeichnet wird, $AA'a = 90^0 - r$ ist, so hat man

$\cos A = \cos a \,.\, \sin r$, ebenso ist

$\cos B = \cos b \,.\, \sin r$ und

$\cos C = \cos c \,.\, \sin r$;

werden aber diese Ausdrücke substituirt, so hat man, wenn durch sin r dividirt wird, die Gleichung

$$\cos b \,.\, \sin aVc = \cos a \,.\, \sin bVc + \cos c \,.\, \sin aVb,$$

und hiernach ist durch zwei von den spitzen Winkeln $VaA' = a$, $VbB' = b$, $VcC' = c$ die Größe des dritten Winkels bestimmt. Diese Formel, in welcher die Linie Va, Vb, Vc selbst nicht vorkommen, ist die reciproke Formel von der im §. 280 hergeleiteten.

§. 284.

Lehrsatz. Zieht man von Einem Punkte aus mehrere Hauptbogen nach ebenso vielen Punkten der Peripherie eines Kreises, und legt man

durch diese Punkte Tangenten, so kann man dadurch, daß man auf jedem Hauptbogen den zugehörigen berührenden Hauptkreis unter einem constanten Winkel fortrückt, ebenso viele Kreise durch Einhüllung beschreiben, und alle diese Kreise befinden sich im Inneren eines Winkels, von dessen beiden Schenkeln sie berührt werden.

Beweis. Werden in Fig. 159 vorläufig drei Hauptbogen va, vb, vc vom Punkte v aus gezogen, und machen sie mit den Tangenten der Punkte a, b, c die drei spitzen Winkel a, b, c, so ist nach §. 283

$$\cos b \,.\, \sin aVc = \cos a \,.\, \sin bVc + \cos c \,.\, \sin aVb.$$

Rückt nun die Tangente aA′ auf dem Hauptbogen VA unter constanten Winkel a fort, so wird dadurch ein Kreis eingehüllt, dessen Radius nach §. 281 = 90 — a ist, und rückt die Tangente cC′ auf dem Hauptbogen vc unter dem constanten Winkel c fort, so beschreibt sie einen zweiten Kreis durch Einhüllung; diese beiden Kreise haben in jedem Falle zwei gemeinschaftliche Tangenten, es sei denn, daß der eine ganz im anderen enthalten wäre. Abgesehen von diesem Falle mag eine solche Tangente von den Linien Va, Vb, Vc unter den Winkeln α, β, γ geschnitten werden, die aber ihre Öffnungen nach derselben Seite kehren, als die Winkel a, b, c, und es ist sodann nach §. 239

$$\cos \beta \,.\, \sin aVc = \cos \alpha \,.\, \sin bVc + \cos \gamma \,.\, \sin aVb;$$

da aber der Annahme gemäß $\alpha = a$ und $\gamma = a$ ist, so hat man also $\cos \beta \,.\, \sin aVc = \cos a \,.\, \sin bVc + \cos c \,.\, \sin aVb$ und da auch $\cos b \,.\, \sin aVc = \cos a \,.\, \sin bVc + \cos c \,.\, \sin aVb$ ist, so folgt also, daß $\cos \beta = \cos b$ oder $\beta = b$ sei; daher ist die genannte gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise auch eine Tangente des dritten Kreises.

Da die drei Hauptbogen Va, Vb, Vc die Peripherie noch in drei anderen Punkten a′, b′, c′ schneiden, und zwei Tangenten eines Kreises mit ihrer Berührungs-Sehne immer zwei gleiche spitze Winkel machen, so umhüllen die Tangenten der Punkte a′, b′, c′, indem sie auf den Hauptbogen Va′, Vb′, Vc′ unter constanten Winkeln fortrücken, dieselben drei Kreise, aber auf entgegengesetzter Seite im Vergleich mit den Tangenten der Punkte a, b, c, auch gelangen sie ebenfalls durch die Änderungen ihrer Lage endlich in einen Hauptkreis, welcher alle drei Kreise berührt und zwar auf entgegengesetzter Seite im Vergleich mit dem Hauptkreise $\alpha\beta\gamma$; daher befinden sich die drei Kreise im Inneren eines Winkels, wovon jeder Schenkel die drei Kreise berührt.

Geht durch den Punkt V noch ein vierter Hauptbogen vd, so kann man ihn mit irgend zweien von den drei vorigen zusammenstellen, so daß sich also die vorigen Schlüsse wiederholen. Daher haben die nach der im Satze ausgedrückten Bedingung beschriebenen Kreise dieselben zwei Tangenten.

Zusatz 1. Da die Mittelpunkte solcher Kreise in Einem Hauptbogen liegen, welcher den Winkel der beiden Tangenten halbirt, so läßt sich aus der Lage der einen Tangente die Lage der anderen auf eine einfache Weise durch Construction finden. Da nämlich va, vb, vc, vd die Mittelkreise aller in Rede stehenden Nebenkreise sind, so braucht man nur aus dem Punkte v einen Hauptkreis zu beschreiben, so geht dieser durch die Mittelpunkte aller eingehüllten Kreise, und indem man den Winkel, welchen er mit der Tangente $\alpha\beta\gamma$ macht, nach seiner entgegengesetzten Seite um die eigene Größe erweitert, ist der zweite Schenkel dieses hinzugefügten Winkels die gesuchte zweite Tangente.

Zusatz 2. Auch der Durchschnitts-Punkt der beiden Tangenten läßt sich abgesondert construiren. Zieht man nämlich vom Mittelpunkte m des gegebenen Kreises durch den Punkt v einen Durchmesser und errichtet man in den Endpunkten dieses Durchmessers Tangenten, so kann man auch sie auf dem genannten Durchmesser unter einem constanten Winkel fortrücken lassen, und da dieser Winkel ein rechter ist, so umhüllen diese Tangenten nach §. 282 statt eines Kreises einen Punkt, welcher mit ihrem Durchschnitts-Punkte derselbe ist; dieser Punkt ist also der gesuchte Durchschnittspunkt der beiden gemeinschaftlichen Tangenten aller eingehüllten Kreise.

Anmerkung. Das vorstehende Theorem ist das reciproke von dem im §. 280 behandelten, und hätte auch auf dem Wege der Construction unmittelbar aus ihm hergeleitet werden können.

§. 285.

Lehrsatz. Wenn sich zwei Sehnen eines Kreises im Inneren desselben schneiden, so verhalten sich die Sinus der halben Summen und auch die Sinus der halben Differenzen je zweier Abschnitte zu einander, wie die Sinus der halben Kreisbogen, welche von ihnen intercipirt werden.

Beweis. Schneiden sich in Fig. 160 die Sehnen AB und DC im Punkte E innerhalb des Kreises und zieht man noch die Sehnen AC und DB, so entsteht das Viereck CABD mit äußeren Diagonalen, und es ist in ihm C — B = A — D nach §. 252, oder auch A — C = D — B. Nun ist aber nach dem Zusatze zu §. 147 im Dreiecke ACE

1. $\cos \frac{1}{2} (A - C) \sin \frac{1}{2} AfC = \sin \frac{1}{2} (EC + EA) \sin \frac{1}{2} AEC$ und
2. $\sin \frac{1}{2} (A - C) \sin \frac{1}{2} AfC = \sin \frac{1}{2} (EC - EA) \cos \frac{1}{2} AEC$.

Ferner ist im Dreiecke DEB ebenso

3. $\cos \frac{1}{2} (D - B) \sin \frac{1}{2} DgB = \sin \frac{1}{2} (EB + ED) \sin \frac{1}{2} DEB$ und

4. $\sin\frac{1}{2}(D-B) \cdot \sin\frac{1}{2}DgB = \sin\frac{1}{2}(EB-ED)\cos\frac{1}{2}DEB$; wenn man nun die erste Proportion durch die dritte, ferner die zweite durch die vierte dividirt, so hat man

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AfC}{\sin\frac{1}{2}DgB} = \frac{\sin\frac{1}{2}(EC+EA)}{\sin\frac{1}{2}(EC-EA)} \text{ und}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AfC}{\sin\frac{1}{2}DgB} = \frac{\sin\frac{1}{2}(EC-EA)}{\sin\frac{1}{2}(EC-EA)}.$$

Fällt man aber vom Mittelpunkte m auf die Sehnen AfC und DgB die Perpendikel mf und mg, so werden diese Sehnen und auch die zugehörigen Bogen dadurch halbirt und es ist, wenn der Radius mit r bezeichnet wird

$\sin\frac{1}{2}AfC = \sin r \cdot \sin\frac{1}{2}AC$ und $\sin\frac{1}{2}DgB = \sin r \cdot \sin\frac{1}{2}DB$, also

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AfC}{\sin\frac{1}{2}DgB} = \frac{\sin\frac{1}{2}AC}{\sin\frac{1}{2}DB}, \text{ daher hat man}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(EC+EA)}{\sin\frac{1}{2}(EB+ED)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(EC-EA)}{\sin\frac{1}{2}(EB-EA)} = \frac{\sin\frac{1}{2}AC}{\sin\frac{1}{2}DB}.$$

§. 286.

Man kann die erhaltenen Proportionen auch also schreiben

1. $$\frac{\sin\frac{1}{2}(EC+EA)}{\sin\frac{1}{2}AC} = \frac{\sin\frac{1}{2}(EB+ED)}{\sin\frac{1}{2}BD} \text{ und}$$

2. $$\frac{\sin\frac{1}{2}(EC-EA)}{\sin\frac{1}{2}AC} = \frac{\sin\frac{1}{2}(EB-ED)}{\sin\frac{1}{2}BD},$$

und hieraus erhält man noch durch Addition und Subtraction die beiden folgenden

3. $$\frac{\sin\frac{1}{2}EC \cdot \cos\frac{1}{2}EA}{\sin\frac{1}{2}AC} = \frac{\sin\frac{1}{2}EB \cdot \cos\frac{1}{2}ED}{\sin\frac{1}{2}BD},$$

4. $$\frac{\cos\frac{1}{2}EC \cdot \sin\frac{1}{2}EA}{\sin\frac{1}{2}AC} = \frac{\cos\frac{1}{2}EB \cdot \sin\frac{1}{2}ED}{\sin\frac{1}{2}BD}.$$

Dividirt man ferner die Proportion (3) durch (4), so hat man

noch $$\frac{\operatorname{tng}\frac{1}{2}EC}{\operatorname{tng}\frac{1}{2}EA} = \frac{\operatorname{tng}\frac{1}{2}EB}{\operatorname{tng}\frac{1}{2}ED} \text{ oder}$$

5. $\operatorname{tng}.\frac{1}{2}EC \cdot \operatorname{tng}\frac{1}{2}ED = \operatorname{tng}\frac{1}{2}EA \cdot \operatorname{tng}\frac{1}{2}EB$,

und wenn man die Proportionen (3) und (4) multiplicirt, so hat man endlich noch:

6. $$\frac{\sin EC \cdot \sin EA}{\sin\frac{1}{2}AC^2} = \frac{\sin EB \cdot \sin ED}{\sin\frac{1}{2}BD^2}.$$

Ganz ebenso ist

7. $$\frac{\sin\frac{1}{2}(AE+ED)}{\sin\frac{1}{2}AD} = \frac{\sin\frac{1}{2}(EC+EB)}{\sin\frac{1}{2}BC} \text{ und}$$

8. $$\frac{\sin\frac{1}{2}(AE-ED)}{\sin\frac{1}{2}AD} = \frac{\sin\frac{1}{2}(EC-EB)}{\sin\frac{1}{2}BC},$$

und aus diesen beiden Proportionen erhält man durch Addition und Subtraction noch die folgenden

$$9.\quad \frac{\sin\frac{1}{2}AE\,.\,\cos\frac{1}{2}ED}{\sin\frac{1}{2}AD} = \frac{\sin\frac{1}{2}EC\,.\,\cos\frac{1}{2}EB}{\sin\frac{1}{2}BC} \text{ und}$$

$$10.\quad \frac{\cos\frac{1}{2}AE\,.\,\sin\frac{1}{2}ED}{\sin\frac{1}{2}AD} = \frac{\cos\frac{1}{2}EC : \sin\frac{1}{2}EB}{\sin\frac{1}{2}BC},$$

und hieraus weiter durch Multiplikation noch die Proportion

$$11.\quad \frac{\sin AE\,,\,\sin ED}{\sin\frac{1}{2}AD^2} = \frac{\sin EC\,.\,\sin EB}{\sin\frac{1}{2}BC^2}.$$

Multiplicirt man ferner die Proportionen (8) und (9), so erhält man

$$12.\quad \frac{\sin AE}{\sin\frac{1}{2}AC\,.\,\sin\frac{1}{2}AD} = \frac{\sin EB}{\sin\frac{1}{2}BD\,.\,\sin\frac{1}{2}BC}.$$

Ferner findet man aus den Proportionen (8) und (10) noch

$$13.\quad \frac{\sin EC}{\sin\frac{1}{2}AC\,.\,\sin\frac{1}{2}BC} = \frac{\sin ED}{\sin\frac{1}{2}BD\,.\,\sin\frac{1}{2}AD}.$$

§. 287.

Wenn man in Fig. 163 ein Viereck ACBD in einen Kreis schreibt, dessen Diagonalen sich in E schneiden, so gelten nach §. 285 die Proportionen (12) und (13) auch dann noch, wenn man für die Kreisbogen AD, BC, AC und DB die Seiten a, b, c, d des Vierecks an die Stelle setzt, und man hat also auch

$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{\sin AE}{\sin EB} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}b\,.\,\sin\frac{1}{2}d} \text{ und} \\[2ex] \dfrac{\sin EC}{\sin ED} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}b\,.\,\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}d}. \end{cases}$$

Ferner ist nach §. 182 $\sin\frac{1}{2}ADB\,.\,\sin\frac{1}{2}CBD = \sin\frac{1}{2}AD\,.\,\sin\frac{1}{2}BC + \sin\frac{1}{2}BD\,.\,\sin\frac{1}{2}ADBC$, und da $\frac{1}{2}ADBC + \frac{1}{2}AC = 180^\circ$, also $\sin\frac{1}{2}ADBC = \sin\frac{1}{2}AC$ ist, so hat man

$$\sin\tfrac{1}{2}ADB\,.\,\sin\tfrac{1}{2}CBD = \sin\tfrac{1}{2}AD\,.\,\sin\tfrac{1}{2}BC + \sin\tfrac{1}{2}BD\,.\,\sin\tfrac{1}{2}BC.$$

Bezeichnet man nun die Diagonalen AB und CD mit p und q, so ist, wie im §. 285

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}a &= \sin r\,.\,\sin\tfrac{1}{2}AD,\\
\sin\tfrac{1}{2}b &= \sin r\,.\,\sin\tfrac{1}{2}BC,\\
\sin\tfrac{1}{2}c &= \sin r\,.\,\sin\tfrac{1}{2}AC,\\
\sin\tfrac{1}{2}d &= \sin r\,.\,\sin\tfrac{1}{2}BD,\\
\sin\tfrac{1}{2}p &= \sin r\,.\,\sin\tfrac{1}{2}ADB,\\
\sin\tfrac{1}{2}a &= \sin r\,.\,\sin\tfrac{1}{2}CBD,
\end{aligned}$$

und werden diese Werthe benutzt, so verwandelt sich die obige Gleichung in die folgende:

$$2.\quad \sin\tfrac{1}{2}p\,.\,\sin\tfrac{1}{2}q = \sin\tfrac{1}{2}a\,.\,\sin\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}c\,.\,\sin\tfrac{1}{2}d.$$

Der analoge planimetrische Satz ist der bekannte Satz des Ptolomäus vom ebenen Vierecke im Kreise.

Sind die vier Winkel des Vierecks ADBC gleich groß, so ist es nach §. 95 und §. 90 ein sphärisches Parallelogramm mit gleichen Diagonalen; diese Diagonalen sind nun zwei Durchmesser eines Kreises; daher hat man

$$\sin \tfrac{1}{2} p^2 = \sin \tfrac{1}{2} a^2 + \sin \tfrac{1}{2} d^2,$$

und das Viereck ADB, von dessen drei Seiten diese Formel gilt, ist nun ein in einen Kreis geschriebenes Dreieck, dessen eine Seite der Durchmesser des Kreises ist, nur ist nicht hier, wie im analogen Falle der Planimetrie der Winkel ADB $= 90^0$, sondern dieser Winkel ist so groß, als die beiden Winkel DAB und DBA zusammen.

Wenn umgekehrt a, d, p die Seiten eines Dreiecks so beschaffen sind, daß $\sin \frac{1}{2} p^2 = \sin \frac{1}{2} a^2 + \sin \frac{1}{2} d^2$ ist und man beschreibt einen Kreis, dessen Durchmesser die Seite p ist, so geht der Kreis auch durch die dritte Ecke des Dreiecks.

Man erhält noch eine dritte allgemeine Formel auf die folgende Art. Es ist

$$\frac{\sin \frac{1}{2} p}{\sin \frac{1}{2} q} = \frac{\sin \frac{1}{2} ADB}{\sin \frac{1}{2} CBD} \text{ und also auch}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} p}{\sin \frac{1}{2} q} = \frac{\sin \frac{1}{2} ADB \,.\, \sin \frac{1}{2} (AD + BC)}{\sin \frac{1}{2} DBC \,.\, \sin \frac{1}{2} (AD + BC)} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} p}{\sin \frac{1}{2} q} = \frac{\sin \frac{1}{2} (DB + AD) \,.\, \sin \frac{1}{2} (BC + AD)}{\sin \frac{1}{2} (DB + BC) \,.\, \sin \frac{1}{2} (AD + BC)}.$$

Nun ist aber $\sin \frac{1}{2}(DB+AD) \,.\, \sin \frac{1}{2} (BC+AD) = \sin \frac{1}{2} DB \,.\, \sin \frac{1}{2} BC + \sin \frac{1}{2} AD \,.\, \sin \frac{1}{2} (DB + AD + BC) = \sin \frac{1}{2} DB \,.\, \sin \frac{1}{2} BC + \sin \frac{1}{2} AD \,.\, \sin \frac{1}{2} AC$, und ebenso $\sin \frac{1}{2} (DB+BC) \,.\, \sin \frac{1}{2} (AD + BC) = \sin \frac{1}{2} DB \,.\, \sin \frac{1}{2} AD + \sin \frac{1}{2} BC \,.\, \sin \frac{1}{2} (DB + BC + AD) = \sin \frac{1}{2} DB \,.\, \sin \frac{1}{2} AD + \sin \frac{1}{2} BC \sin AC$; also ist

$$\frac{\sin \frac{1}{2} p}{\sin \frac{1}{2} q} = \frac{\sin \frac{1}{2} DB \,.\, \sin \frac{1}{2} BC + \sin \frac{1}{2} DA \,.\, \sin \frac{1}{2} AC}{\sin \frac{1}{2} DA \,.\, \sin \frac{1}{2} DB + \sin \frac{1}{2} CA \,.\, \sin \frac{1}{2} CB}, \text{ und}$$

führt man die Seiten des Vierecks ein, so ist also

$$3. \quad \frac{\sin \frac{1}{2} p}{\sin \frac{1}{2} q} = \frac{\sin \frac{1}{2} b \,.\, \sin \frac{1}{2} d + \sin \frac{1}{2} a \,.\, \sin \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2} a \,.\, \sin \frac{1}{2} d + \sin \frac{1}{2} b \,.\, \sin \frac{1}{2} c}.$$

Wird die Formel (2) mit (3) durch Multiplikation und Division verbunden, so erhält man Ausdrücke für die Diagonalen des Vierecks durch die Seiten desselben.

§. 288.

Lehrsatz. Wenn sich zwei Sehnen eines Kreises außerhalb desselben schneiden, so verhält sich der Sinus der halben Summe der beiden Secanten zum Sinus des halben größeren Bogens, den

sie intercipiren, wie der Sinus der halben Summe der äußeren Abschnitte der Secanten zum Sinus des halben kleineren Bogens, den sie intercipiren.

Ferner hat man wieder eine Proportion, wenn statt der halben Summe in beiden Vordergliedern der halbe Unterschied genommen wird.

Beweis. Sind in Fig. 161 EAD und ECB die beiden Secanten des Kreises und m sein Mittelpunkt, so ziehe man die Sehnen AfE und BgD, welche von den beiden aus m auf sie gefällten Perpendikeln halbirt werden. Im Vierecke ACBD ist nun, wenn die Winkel des Dreiecks EBD an B und D mit B und D, ferner die Winkel des Dreiecks ECA an A und C mit A und C bezeichnet werden, nach §. 252

$$D + 180^\circ - C = B + 180^\circ - A \text{ oder auch}$$
$$D - B = C - A.$$

Nun ist aber nach dem Zusatze zu §. 147 im Dreiecke EAC

$$\cos \tfrac{1}{2}(C-A) \sin \tfrac{1}{2} AfC = \sin \tfrac{1}{2}(EA + EC) \sin \tfrac{1}{2} E \text{ und}$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(C-A) \sin \tfrac{1}{2} AfC = \sin \tfrac{1}{2}(EA - EC) \sin \tfrac{1}{2} E;$$

ferner ist ebenso im Dreiecke EDB

$$\cos \tfrac{1}{2}(D-B) \,.\, \sin \tfrac{1}{2} DgB = \sin \tfrac{1}{2}(EB + ED) \sin \tfrac{1}{2} E \text{ und}$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(D-B) \,.\, \sin \tfrac{1}{2} DgB = \sin \tfrac{1}{2}(EB - ED) \sin \tfrac{1}{2} E,$$

und aus diesen vier Gleichungen erhält man durch Division

$$\frac{\sin \frac{1}{2} AfC}{\sin \frac{1}{2} DgB} = \frac{\sin \frac{1}{2}(EA + EC)}{\sin \frac{1}{2}(EB + ED)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(EA - EC)}{\sin \frac{1}{2}(EB - ED)}.$$

Da nun aber, wie im §. 285 ist $\frac{\sin \frac{1}{2} AfC}{\sin \frac{1}{2} DgB} = \frac{\sin \frac{1}{2} AC}{\sin \frac{1}{2} DB}$, so hat man endlich

$$\frac{\sin \frac{1}{2} AC}{\sin \frac{1}{2} DB} = \frac{\sin \frac{1}{2} EA + EC)}{\sin \frac{1}{2}(EB + ED)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(EA - EC)}{\sin \frac{1}{2}(EB - ED)}.$$

Zusatz. Der Beweis ist noch ganz ebenso, wenn in Fig. 162 die eine Secante eine Tangente ist, wenn man nur in Beziehung auf die Winkel den Satz im §. 253 anwendet, und man erhält also die Proportion

$$\frac{\sin \frac{1}{2} AC}{\sin \frac{1}{2} AB} = \frac{\sin \frac{1}{2}(EA + EC)}{\sin \frac{1}{2}(EB + EA)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(EA - EC)}{\sin \frac{1}{2}(EB - EA)}.$$

§. 289.

Wenn man die beiden Proportionen für die Figur 161 also schreibt

$$1. \quad \frac{\sin \frac{1}{2}(EA + EC)}{\sin \frac{1}{2} AC} = \frac{\sin \frac{1}{2}(EB - ED)}{\sin \frac{1}{2} BD},$$

$$2. \quad \frac{\sin \frac{1}{2}(EA - EC)}{\sin \frac{1}{2} AD} = \frac{\sin \frac{1}{0}(EB - ED)}{\sin \frac{1}{2} BD},$$

so erhält man durch Addition und Subtraction

3. $\frac{\sin \frac{1}{2} EA \,.\, \cos \frac{1}{2} EC}{\sin \frac{1}{2} AC} = \frac{\sin \frac{1}{2} EB \,.\, \cos \frac{1}{2} ED}{\sin \frac{1}{2} BD}$,

4. $\frac{\cos \frac{1}{2} EA \,.\, \sin \frac{1}{2} EC}{\cos \frac{1}{2} AC} = \frac{\cos \frac{1}{2} EB \,.\, \sin \frac{1}{2} ED}{\sin \frac{1}{2} BD}$,

und wird hiervon die eine durch die andere dividirt, so hat man noch $\frac{\text{tng} \frac{1}{2} EA}{\text{tng} \frac{1}{2} EC} = \frac{\text{tng} \frac{1}{2} EB}{\text{tng} \frac{1}{2} ED}$ oder auch

5. $\text{tng} \frac{1}{2} EA \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} ED = \text{tng} \frac{1}{2} EC \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} ED$.

Ferner erhält man durch Multiplication der Proportionen (3) und (4)

6. $\frac{\sin EA \,.\, \sin EC}{\sin \frac{1}{2} AC^2} = \frac{\sin EB \,.\, \sin ED}{\sin \frac{1}{2} BD^2}$.

Zusatz. Wenn in Fig. 162 die eine Sekante eine Tangente geworden ist, so hat man für diesen Fall

$\text{tng} \frac{1}{2} EA^2 = \text{tng} \frac{1}{2} EC \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} EB$ und

$\frac{\sin EC}{\sin \frac{1}{2} AC^2} = \frac{\sin EB}{\sin \frac{1}{2} BA^2}$.

§. 290.

Wenn in Fig. 141 und Fig. 142 dieselbe Construction gemacht ist, als im §. 255, so ist nach §. 155

$\text{tng} \frac{1}{2} EC \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} ED = \pm \text{tng} \frac{1}{2} (ME + MC) \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} (ME - MC)$.

Wird also ME verlängert, bis die Peripherie davon in P und Q geschnitten wird, so ist $EP = \pm (ME - MC)$ und $EQ = ME + MC$, daher hat man

$\text{tng} \frac{1}{2} EC \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} ED = \text{tng} \frac{1}{2} EP \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} EQ$.

Ganz ebenso hat man

$\text{tng} \frac{1}{2} FA \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} EB = \text{tng} \frac{1}{2} EP \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} EQ$ und es ist also

$\text{tng} \frac{1}{2} EA \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} EB = \text{tng} \frac{1}{2} EC \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} ED$,

und so ist diese einfache Formel, welche mit der Formel (5) im §. 286 oder mit der Formel (5) im §. 289 einerlei ist, noch auf eine besondere Art hergeleitet werden.

Man kann aber auch dieselbe Formel noch aus den im §. 255 bewiesenen und umgekehrt aus dieser jene durch eine leichte Umformung herleiten.

Zusatz. Steht in Fig. 142 die Sehne AB auf dem Durchmesser PMQ senkrecht, und ist also $EB = EA$; so hat man

$\text{tng} \frac{1}{2} EB^2 = \text{tng} \frac{1}{2} EA^2 = \text{tng} \frac{1}{2} PE \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} QE = \text{tng} \frac{1}{2} CE \,.\, \text{tng} \frac{1}{2} DE$.

§. 291.

Lehrsatz. Zieht man durch einen Punkt E in Fig. 142 mehrere Sehnen und einen Durchmesser, so theilt dieser die den Sehnen

zugehörigen Bogen jedesmal in solche zwei Theile, daß das Product aus den Tangenten der halben Theile des einen Bogens so groß ist, als das Product aus den Tangenten der halben Theile des anderen Bogens, und auch so groß ist, als das Verhältniß der Sinus der Theile des Durchmessers, in welche er durch alle gezogenen Sehnen getheilt wird.

Beweis. Nach §. 158 ist im Dreieck EMD offenbar $\operatorname{tng} \frac{1}{2} EMC = \frac{\sin (MC - ME)}{\sin (MC + ME)} \cot \frac{1}{2} EMD$ oder auch $\operatorname{tng} \frac{1}{2} EMC \, . \, \operatorname{tng} \frac{1}{2} EMD = \frac{\sin (MC - ME)}{\sin (MC + ME)}$; da nun aber der Winkel EMC zum Maße den Bogen PC und der Winkel EMD zum Maße den Bogen PD hat, da ferner $MC - ME = PE$ und $MC + ME = EQ$ ist, so hat man also

$$1. \quad \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} PC \, . \, \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} PD = \frac{\sin PE}{\sin QE}.$$

Zieht man durch den Punkt E noch eine zweite Sehne AB, so gilt von ihr dasselbe, und es ist also $\operatorname{tng} \frac{1}{2} PA \, . \, \operatorname{tng} \frac{1}{2} PB = \frac{\sin PE}{\sin QE}$, daher also auch

$$2. \quad \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} PA \, . \, \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} PB = \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} PC \, . \, \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} PD.$$

Zusatz. Steht etwa die Sehne AB auf dem Durchmesser PMQ senkrecht, so hat man

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} PB = \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} PA = \sqrt{(\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} PC \, . \, \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} PD)} = \sqrt{\frac{\sin PE}{\sin QE}}.$$

§. 292.

Lehrsatz. Zieht man von einem Punkte E außerhalb des Kreises mehrere Sekanten, wovon aber eine durch den Mittelpunkt geht, die Hauptsekante, so werden von dieser die durch die übrigen Sekanten abgeschnittenen Bogen äußerlich so getheilt, daß das Product der Tangenten der halben Abschnitte eines solchen Bogens so groß ist, als das Product der Tangenten der halben Abschnitte eines anderen Bogens, und auch so groß ist, als das Verhältniß der Sinus der Theile des Durchmessers, in welche er durch alle Sekanten äußerlich getheilt worden ist.

Beweis. In Fig. 141 sei wieder dieselbe Construction, wie im §. 255 gemacht, dann ist im Dreiecke EMA nach §. 158

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} EMA = \frac{\sin (EM - MA)}{\sin (EM + MA)} \, . \, \cot \tfrac{1}{2} FMB;$$

da aber der Bogen PA den Winkel PMA, und der Bogen PB den Winkel EMB mißt, so ist

$$1. \quad \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} PA \, . \, \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} PB = \frac{\sin PE}{\sin QE}.$$

Wird noch eine Sekante ECG gezogen, so ist auch $\text{tng}\ \frac{1}{2}\ PC\ .$
$\text{tng}\ \frac{1}{2}\ PD = \frac{\sin PE}{\sin QE}$ und also

2. $\text{tng}\ \frac{1}{2}\ PA\ .\ \text{tng}\ \frac{1}{2}\ PB = \text{tng}\ \frac{1}{2}\ PC\ .\ \text{tng}\ \frac{1}{2}\ PD.$

Zusatz. Wenn in Fig. 143 die eine Sekante zu einer Tangente EG geworden ist, so ist also

$$\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ EG = \sqrt{(\text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ PA\ \text{tng}\ \tfrac{1}{2}\ PB)} = \sqrt{\frac{\sin PE}{\sin QE}}.$$

§. 294.

Lehrsatz. Die Cotangente eines Winkels, welchen eine Sehne mit einem Durchmesser des Kreises macht, und dessen Scheitel im Inneren des Kreises befindlich ist, ist gleich dem Cosinus des Hauptbogens, welcher den Scheitel des Winkels mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet, multiplicirt mit der Cotangente der halben Summe der beiden Kreisbogen, welche der Winkel und sein Vertikal-Winkel intercipirt.

Beweis. In Fig. 164 sei M der Mittelpunkt des Kreises, PQ ein Durchmesser, mit welchem eine andere Sehne AB den Winkel $PEA = BEQ = E$ mache, ME sei $= e$; von M fälle man das Loth Mm auf AB, und zieht man noch die Radien MA und MB, so ist das gleichschenkelige Dreieck AMB durch das Loth Mm in zwei symmetrische rechtwinkelige Dreiecke getheilt.

Der Winkel PMB hat aber zum Maße den Bogen $PB = 180^\circ - QB$ und da AP das Maß des Winkels PMA ist, so ist also das Maß des Winkels $AMB = 180^\circ - QB + PA$, und da der Winkel mMA davon die Hälfte ist, so ist sein Maß $= 90^\circ - \frac{1}{2} QB + \frac{1}{2} PA$, wird hiervon der Bogen PA subtrahirt, so bleibt $90^\circ - \frac{1}{2}(QB + PA)$ als das Maß des Winkels mME. Im rechtwinkeligen Dreiecke MEm ist nun aber $\cos ME = \cot E\ .\ \cot mME$, also hat man $\cos e = \cot E\ .\ \text{tng}\ \frac{1}{2}(QB + PA)$ oder auch

$$\cot E = \cos e\ .\ \cot \tfrac{1}{2}(PA + QB) = \cos \tfrac{1}{2}(EQ - EP)\ .\ \cot \tfrac{1}{2}(PA + QB).$$

§. 295.

Lehrsatz. Die Contangente eines Winkels, welchen mit einer durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden Sekante eine andere Sekante macht, ist gleich dem Cosinus des Hauptbogens, welcher den Mittelpunkt des Kreises mit dem außerhalb befindlichen Scheitel des Winkels verbindet, multiplicirt mit der Cotangente des halben Unterschiedes der beiden Kreisbogen, welche der Winkel intercipirt.

Beweis. Es seien EAB und EPQ die beiden Sekanten in Fig. 165, wovon die letzte durch den Mittelpunkt M gehe; man ziehe die Radien MA und MB, und fälle das Loth Mm auf AB, dann ist $PA + AB + BQ = 180^\circ$, also $AB = 180^\circ - PA - QB$,

daher ist das Maß des Winkels AMm $= 90^\circ - \frac{1}{2}$ PA $- \frac{1}{2}$ QB. Wird hierzu der Bogen PA addirt, so hat man $90^\circ - \frac{1}{2}(QB - PA)$ als das Maß des Winkels EMm, und da im Dreiecke EMm ist $\cos ME = \cot E \,.\, \cot EMm$, so ist $\cos e = \cot E \,.\, tng \frac{1}{2}(QB - PA$, wenn ME mit e bezeichnet wird, oder auch

$$\cot E = \cos e \,.\, \cot \tfrac{1}{2}(QB - PA) = \cos \tfrac{1}{2}(EQ + EP) \,.\, \cot \tfrac{1}{2}(QB - PA)$$

Zusatz. 1. Ist e der Radius des Kreises, so ist PA $= o$ und man erhält dann wieder die specielle Formel des §. 275. Die Formel $\cot E = \cos e \,.\, \cot \frac{1}{2}(QB - PA)$ gilt offenbar auch dann noch, wenn die Punkte B und A zusammenfallen und sich also die Sekante EB in eine Tangente verwandelt.

Zusatz 2. In Fig. 164 ist $tng\, Em = tng\, Em \,.\, \cos E$, aber $Em = \frac{1}{2}(EB - EA)$ und $EM = \frac{1}{2}(EQ - EP)$, also hat man $tng \frac{1}{2}(EB - EA) = tng \frac{1}{2}(EQ - EP) \,.\, \cos E$.
In Fig. erhält man auf ähnliche Art die Formel $tng \frac{1}{2}(EB + EA) = tng \frac{1}{2}(EQ + EP) \cos E$.

Zusatz 3. In Fig. 164 ist $\sin Em = \sin EM \sin EMm$, also $\sin \frac{1}{2}(EB - EA) = \sin \frac{1}{2}(EQ - EP) \cos \frac{1}{2}(QB + PA)$ und in Fig. 165 ist $\sin \frac{1}{2}(EB + EA) = \sin \frac{1}{2}(EQ + EP) \cos \frac{1}{2}(QB - PA)$.

Zusatz 4. In Fig. 164 ist $\cos EMm = \cos Em \,.\, \sin E$ oder $\sin \frac{1}{2}(QB + PA) = \cos \frac{1}{2}(EB - EA) \,.\, \sin E$ und in Fig. 165 ist ebenso $\sin \frac{1}{2}(QB - PA) = \cos \frac{1}{2}(EB + EA) \,.\, \sin E$.

Zusatz 5. Da nach Zusatz 2 ist in Fig. 164 $tng \frac{1}{2}(EB - EA) = tng \frac{1}{2}(EQ - EP) \cos E$ und also auch

$$\frac{tng \frac{1}{2} EP - tng \frac{1}{2} EA}{1 + tng \frac{1}{2} EB \,.\, tng \frac{1}{2} EA} = \frac{tng \frac{1}{2} EQ - tng \frac{1}{2} EP}{1 + tng \frac{1}{2} EQ \,.\, tng \frac{1}{2} EP} \cos E \text{ ist,}$$

da ferner $tng \frac{1}{2} EB \,.\, tng \frac{1}{2} EA = tng \frac{1}{2} EQ \,.\, tng \frac{1}{2} EP$ ist, so fallen die gleichen Nenner weg, und es ist

1. $tng \frac{1}{2} EB - tng \frac{1}{2} EA = (tng \frac{1}{2} EQ - tng \frac{1}{2} EP) \,.\, \cos E.$
Ebenso findet man für Fig. 164 die Formel
2. $tng \frac{1}{2} EB + tng \frac{1}{2} EA = (tng \frac{1}{2} EQ + tng \frac{1}{2} EP) \cos E.$
Die Formel 1 ist einerlei mit

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(EB - EA)}{\cos \frac{1}{2} EB \,.\, \cos \frac{1}{2} EA} = \frac{\sin \frac{1}{2}(EQ - EP)}{\cos \frac{1}{2} EQ \,.\, \cos \frac{1}{2} EP} \cos E, \text{ und}$$

da $\sin \frac{1}{2}(EB - EA) = \sin \frac{1}{2}(EQ - EP) \cos \frac{1}{2}(QB + PA)$ ist, so hat man noch

$$3.\quad \frac{\cos \frac{1}{2}(QB + PA)}{\cos \frac{1}{2} EB \,.\, \cos \frac{1}{2} EA} = \frac{\cos E}{\cos \frac{1}{2} EQ \,.\, \cos \frac{1}{2} EP},$$

und für Fig. 165 findet man auf ähnliche Weise

$$4.\quad \frac{\cos \frac{1}{2}(QB - PA)}{\cos \frac{1}{2} EB \,.\, \cos \frac{1}{2} EA} = \frac{\cos E}{\cos \frac{1}{2} EQ \,.\, \cos \frac{1}{2} EP}.$$

Werden diese Formeln noch mit der Formel

$\operatorname{tng} \frac{1}{2} EB \operatorname{tng} \frac{1}{2} EA = \operatorname{tng} \frac{1}{2} EQ \operatorname{tng} \frac{1}{2} EP$ verbunden, so erhält man noch

5. $\frac{\cos \frac{1}{2}(QB + PA)}{\sin \frac{1}{2} EB \,.\, \sin \frac{1}{2} EA} = \frac{\cos E}{\sin \frac{1}{2} EQ \sin \frac{1}{2} EP}$ für Fig. 164 und

6. $\frac{\cos \frac{1}{2}(QB - PA)}{\sin \frac{1}{2} EB \,.\, \sin \frac{1}{2} EA} = \frac{\cos E}{\sin \frac{1}{2} EQ \sin \frac{1}{2} EP}$ für Fig. 165

Aus diesen Formeln in Verbindung mit 3 und 4 hat man weiter

7. $\frac{\cos \frac{1}{2} (QB + PA)}{\cos \frac{1}{2} (EB + EA)} = \frac{\cos E}{\cos \frac{1}{2} (EQ + EP)}$ und

$\frac{\cos \frac{1}{2} (QB + PA)}{\cos \frac{1}{2} (EB - EA)} = \frac{\cos E}{\cos \frac{1}{2} (EQ - EP)}$ für Fig. 164

8. $\frac{\cos \frac{1}{2} (QB - PA)}{\cos \frac{1}{2} (EB + EA)} = \frac{\cos E}{\cos \frac{1}{2} (EQ + EP)}$,

$\frac{\cos \frac{1}{2} (QB - PA)}{\cos \frac{1}{2} (EB - EA)} = \frac{\cos E}{\cos \frac{1}{2} (EQ - EP)}$ für Fig. 165.

§. 296.

Aufgabe. Man soll den Zusammenhang unter den Winkeln finden, welche zwei Tangenten eines Kreises mit einem durch ihren Scheitel gehenden Hauptkreise machen.

Auflösung. In Fig. 166 seien PA und PB zwei Tangenten eines Kreises, und durch den Scheitel P ihres Winkels gehe der Hauptbogen XY im Inneren des Winkels APB. Man ziehe noch die Radien MA, MB, ferner nach dem Scheitel des Winkels P die Linie MP und auf XY das Loth Mm; dann ist im Dreiecke PMA

$\sin MA = \sin PM \,.\, \sin APM,$

und im Dreiecke PMm ist $\sin Mm = \sin PM \,.\, \sin mPM$; daher hat man

$$\frac{\sin MA}{\sin Mm} = \frac{\sin APM}{\sin mPM}.$$

Bezeichnet man nun den Radius des Kreises mit r und das Loth Mm mit u, so ist also

$$\frac{\sin r}{\sin u} = \frac{\sin \frac{1}{2} APB}{\sin mPM}.$$

Bezeichnet man ferner die Winkel APY und BPY mit α und β, so ist $APB = \alpha + \beta$, also $MPA = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, daher ist $mPM = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \alpha = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$, folglich hat man die Gleichung

1. $\frac{\sin u}{\sin r} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\beta - \alpha)}{\sin \frac{1}{2} (\beta + \alpha)}$.

Erhebt man die Gleichung zum Quadrate und subtrahirt man sie auf beiden Seiten von Eins, so hat man

$$\frac{\sin r^2 - \sin u^2}{\sin r^2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta+\alpha)^2 - \sin \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2}{\sin \frac{1}{2}(\beta+\alpha)^2} \text{ d. h.}$$

2. $$\frac{\sin mn \cdot \sin mn'}{\sin r^2} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \frac{1}{2}(\beta+\alpha)^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin mn \cdot \sin mn'}{\sin \frac{1}{2} nn'^2} = \frac{\sin APY \cdot \sin BPY}{\sin \frac{1}{2} APB^2}.$$

Ferner folgt aus der Gleichung (1)

$$\frac{\sin r - \sin u}{\sin r + \sin u} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta+\alpha) - \sin \frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\beta+\alpha) + \sin \frac{1}{2}(\beta-\alpha)} \text{ oder}$$

3. $$\frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2}(r-u)}{\operatorname{tng} \frac{1}{2}(r+u)} = \frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tng} \frac{1}{2}\beta}.$$

Befindet sich die Linie XY außerhalb des Winkels, durch dessen Scheitel sie geht, und also auch außerhalb des Kreises, wie in Fig. 167, so gelten die vorigen Formeln ebenfalls, und die Herleitung für diesen Fall stimmt mit der vorigen überein.

Anmerkung. Ein Winkel, in dessen Innerem sich ein Kreis befindet, und dessen Schenkel Tangenten dieses Kreises sind, heiße ein um den Kreis geschriebener Winkel.

§. 297.

Lehrsatz. Sind zwei Winkel um denselben Kreis geschrieben, und zieht man durch ihre Scheitel einen Hauptbogen, so theilt dieser jeden Winkel (innerlich oder äußerlich) in zwei Theile, so, daß erstens die Sinus der halben Unterschiede der Theile dieser Winkel sich zu einander verhalten, wie die Sinus der halben Winkel selbst; zweitens die Producte aus den Sinus der Theile der Winkel sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der Sinus der halben Winkel; endlich drittens, daß die Tangenten der halben Theile des einen Winkels proportional sind zu den Tangenten der halben Theile des anderen Winkels.

Beweis. Zieht man in Fig. 166 und Fig. 167 von einem anderen Punkte P′ im Hauptbogen XY die Tangenten P′A′ und P′B′, und setzt man den Winkel A′P′Y = α', B′P′Y = β', so ist, wenn die übrige Bezeichnung des §. 296 beibehalten wird,

$$\frac{\sin u}{\sin r} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\beta-\alpha)} \text{ und } \frac{\sin u}{\sin r} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta'-\alpha')}{\sin \frac{1}{2}(\beta'+\alpha')}, \text{ also}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\beta+\alpha)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta'-\alpha')}{\sin \frac{1}{2}(\beta'+\alpha')},$$

Ferner ist $\frac{\sin mn \cdot \sin mn'}{\sin r^2} = \frac{\sin APY \cdot \sin BPY}{\sin \frac{1}{2} APB^2}$ und auch

$$\frac{\sin mn \cdot \sin mn'}{\sin r^2} = \frac{\sin A'PY \cdot \sin B'P'Y}{\sin \frac{1}{2} A'P'B'^2}, \text{ also}$$

$$\frac{\sin APY \cdot \sin BPY}{\sin \frac{1}{2} APB^2} = \frac{\sin A'P'Y \cdot \sin B'P'Y}{\sin \frac{1}{2} A'P'B'^2}.$$

Endlich ist $\frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} \alpha}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} \beta} = \frac{\pm \operatorname{tng} \frac{1}{2} (r-u)}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} (r+u)}$ und auch

$$\frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} \alpha'}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} \beta'} = \frac{\pm \operatorname{tng} \frac{1}{2} (r-u)}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} (r+u)}, \text{ und also}$$

$$\frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} \alpha}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} \beta} = \frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} \alpha'}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} \beta'}.$$

Zusatz. Zieht man vom Punkte m aus die Tangenten $m\mu$ und $n\nu$, so machen sie mit XY die Winkel $\nu mY = \beta''$ und $\mu mY = \alpha''$, und da nun $\alpha'' + \beta'' = 180^\circ$ also $\frac{1}{2} \alpha'' + \beta'' = 90^\circ$, ist, so ist $\beta'' = 180^\circ - \alpha''$, also $\frac{1}{2} (\beta'' - \alpha'') = 90^\circ - \alpha''$; und also

1. $\cos \alpha'' = \frac{\sin \frac{1}{2} (\beta - \alpha)}{\sin \frac{1}{2} (\beta + \alpha)}$,

2. $\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \frac{1}{2} (\beta - \alpha)} = \frac{\sin a''^2}{\cos \alpha''^2} = \operatorname{tng} \alpha''^2$,

3. $\frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} \alpha}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} \beta} = \operatorname{tng} \frac{1}{2} \alpha''^2$.

Anmerkung 1. Die vorstehenden Sätze sind nur verschiedene Formen des Ausdrucks eines einzigen, welcher der reciproke von dem im §. 255 bewiesenen Satze ist, und auch daraus auf eine einfache Art durch Construction des reciproken Kreises hätte hergeleitet werden können. Die beiden Sätze erscheinen noch gleichlautender, wenn man sich nicht die um den Kreis geschriebenen Winkel APB und A'P'B', sondern ihre Nebenwinkel von der Linie XY getheilt vorstellt. Die zweiten Schenkel dieser Nebenwinkel sind dann Tangenten eines anderen Kreises, welcher der Gegenkreis des ersten ist.

Anmerkung 2. Die hier behandelten Formeln gelten auch unverändert im analogen Falle der Planimetrie, und sind auch in dieser Hinsicht noch neu. Sie drücken auch dort das Reciproke von dem Gesetze aus, nach welchen die aus den Theilen zweier sich schneidenden Sehnen eines Kreises construirten Rechtecke gleich groß sind.

§. 298.

Lehrsatz. Zieht man von jeder Ecke eines Dreiecks PQR in Fig. 168 und Fig. 169 an einen Kreis ein Paar Tangenten, so werden die Winkel dieser Tangenten-Paare von den Sei-

ten des Dreiecks PQR innerlich oder auch äußerlich so getheilt, daß ist

$$\frac{\sin aRQ . \sin bPQ}{\sin aPR . \sin bPR} \cdot \frac{\sin cQR . \sin dQR}{\sin cQP . \sin dQP} \cdot \frac{\sin eRP . \sin fRP}{\sin eRQ . \sin fRQ} = 1.$$

Beweis. Nach §. 297 hat man die folgenden Proportionen

$$\frac{\sin aPQ . \sin bPQ}{\sin cQP . \sin dQP} = \left(\frac{\sin \frac{1}{2} aPb}{\sin \frac{1}{2} cQd}\right)^2,$$
$$\frac{\sin cQR . \sin dQR}{\sin eRQ . \sin fRQ} = \left(\frac{\sin \frac{1}{2} cQd}{\sin \frac{1}{2} eRf}\right)^2,$$
$$\frac{\sin eRP . \sin fRP}{\sin aPR . \sin bPR} = \left(\frac{\sin \frac{1}{2} eRf}{\sin \frac{1}{2} aPb}\right)^2,$$

und werden dieselben mit einander multiplicirt, so erhält man ohne Weiteres die im Satze aufgestellte Relation.

Anmerkung. Diese allgemeine Relation ist offenbar die reciproke von der im §. 270 bewiesenen ähnlichen, und so allgemein, daß sie zugleich von den ebenen und sphärischen Kegelschnitten überhaupt gilt.

§. 299.

Lehrsatz. Wenn man die gegenüberstehenden Ecken eines um einen Kreis geschriebenen Sechsecks durch Hauptbogen verbindet, so schneiden sich dieselben jedesmal in Einem Punkte.

Beweis. In Fig. 169 sei PR′QP′RR′ das um den Kreis geschriebene Sechseck; a, b, c, d, e, f seien die sechs Berührungs-Punkte, wovon in jeder Seite des Sechsecks einer enthalten ist; RR′, PP′, QQ′ sind also die Linien, wodurch die gegenüberstehenden Ecken des Sechsecks mit einander verbunden worden, und wenn sie gezogen werden, so ist zu beweisen, daß sie sich in Einem Punkte schneiden.

Man ziehe noch die drei Diagonalen PR, PQ und RQ des Sechsecks, so entsteht das Dreieck PRQ; da sich nun die Scheitel-Linien QR′, PR′ und RR′ desselben in Einem Punkte R′ schneiden, so ist

$$\frac{\sin R'RQ}{\sin R'RP} \cdot \frac{\sin bPR}{\sin bPQ} \cdot \frac{\sin cQP}{\sin cQR} = 1 \text{ oder}$$

$$1. \quad \frac{\sin R'RQ}{\sin R'RP} = \frac{\sin bPQ}{\sin bPR} \cdot \frac{\sin cQR}{\sin cQP}.$$

Da sich ferner die Scheitel-Linien QQ′, RQ′ und PQ′ im Punkte Q′ schneiden, so ist

$$\frac{\sin Q'QR}{\sin Q'QP} \cdot \frac{\sin aPQ}{\sin aPR} \cdot \frac{\sin fRP}{\sin fRQ} = 1 \text{ oder}$$

$$2. \quad \frac{\sin Q'QP}{\sin Q'QR} = \frac{\sin aPQ}{\sin aPR} \cdot \frac{\sin fRP}{\sin fRQ}.$$

Da sich endlich die drei Scheitel-Linien PP', RP' und QP' im Punkte P' schneiden, so ist

$$\frac{\sin P'PR}{\sin P'PQ} \cdot \frac{\sin eRQ}{\sin eRP} \cdot \frac{\sin dQP}{\sin dQR} = 1 \text{ oder}$$

$$3. \quad \frac{\sin P'PR}{\sin P'PQ} = \frac{\sin eRP}{\sin eRQ} \cdot \frac{\sin dQR}{\sin dQP}.$$

Werden nun diese drei Proportionen multiplicirt, so ist also

$$\frac{\sin R'RQ}{\sin R'RP} \cdot \frac{\sin Q'QP}{\sin Q'QR} \cdot \frac{\sin P'PR}{\sin P'PQ} = \frac{\sin bPQ}{\sin bPR} \cdot \frac{\sin cQR}{\sin cQP} \cdot$$

$$\frac{\sin aPQ}{\sin aPR} \cdot \frac{\sin fRP}{\sin fRQ} \cdot \frac{\sin eRP}{\sin eRQ} \cdot \frac{\sin dQR}{\sin dQP},$$ und da nach §. 298 ist

$$\frac{\sin aPQ \,.\, \sin bPQ}{\sin aPR \,.\, \sin bPR} \cdot \frac{\sin cQR \,.\, \sin dQR}{\sin cQP \,.\, \sin dQP} \cdot \frac{\sin eRP \,.\, \sin fRP}{\sin eRQ \,.\, \sin fRQ} = 1,$$

so ist also auch

$$\frac{\sin R'RQ}{\sin R'RP} \cdot \frac{\sin Q'QP}{\sin Q'QR} \cdot \frac{\sin P'PR}{\sin P'PQ} = 1;$$

daher schneiden sich endlich auch die drei Scheitel-Linien PP', QQ', RR' in Einem Punkte.

§. 300.

Dieses Theorem, dessen Erfindung in der Planimetrie man Brianchon zuschreibt, gilt ebenfalls von den ebenen und sphärischen Kegelschnitten überhaupt, und der Beweis kann in jedem Falle ohne die geringste Abänderung auf die vorher angegebene Weise auch bei den Kegelschnitten geführt werden. Ferner ist dieser Satz der reciproke von dem im §. 271 und §. 272 bewiesenen Satze Pascals vom eingeschriebenen Sechsecke, und kann aus ihm hergeleitet werden.

Da diese Herleitung gewöhnlich durch die Methode der reciproken Polaren geschieht, so mag hier dieser Herleitung eine andere, durch eine noch einfachere Methode des sphärischen Dualismus gegenübergestellt werden. Weil sich die gegenüberstehenden Seiten eines Sechseck im Kreise in drei Punkten schneiden, welche in Einem Hauptkreise liegen, so construire man zu diesem Kreise den reciproken Kreis nach §. 274, dann ist jede Ecke des vorigen Sechsecks das Centrum eines Hauptkreises, welcher den zweiten Kreis berührt und diese sechs Tangenten bestimmen ein Sechseck, welches um den zweiten Kreis geschrieben ist; die Ecken dieses Sechsecks sind umgekehrt die Mittelpunkte der Seiten des ersten Sechsecks; schneiden sich nun zwei gegenüberstehende Seiten des ersten Sechsecks in einem Punkte, so ist dieser Punkt das Centrum eines Hauptkreises, welcher durch zwei gegenüberstehende Ecken des zweiten Sechsecks geht, und da sich die drei Punkte, in welchen sich die drei Paare gegenüberstehender Seiten des ersten Sechsecks schneiden, in Einem

Hauptbogen befinden, so schneiden sich die drei Hauptkreise, deren Mittelpunkte jene drei Punkte sind, und die durch die gegenüberstehenden Seiten des zweiten Sechsecks gehen, in Einem Punkte.

Wenn aber sechs Punkte auf dem Umfange eines Kreises angenommen sind, so gibt es nach §. 273 sechszig Sechsecke, wovon jedes diese sechs Punkte zu Ecken hat, und zu jedem solchen Sechsecke gehört ein, aber nur ein reciprokes; daher hat man überhaupt sechszig Sechsecke, welche um den reciproken Kreis geschrieben sind, und ihn in denselben sechs Punkten seiner Peripherie mit ihren Seiten berühren; es gestattet also das vorige Theorem eine sechszigfache Anwendung.

Von den Kegelschnitten überhaupt kann der vorige Beweis ebenfalls in völliger Übereinstimmung geführt werden. Diese Herleitung ist aber so einfach, daß sie auch auf einer Kugel bequem in ihrer vollständigen graphischen Ausführung in sinnlicher Construction Schritt vor Schritt nachgewiesen werden kann.

Will man die Methode der reciproken Polaren anwenden so steht auch sie der Sphärik zu Gebote, und da ihre Anwendung in der Sphärik nicht verwickelter als in der Planimetrie ist, so sieht man also, daß in der Sphärik eine zweifache Methode der Reciprocität anwendbar ist, wovon aber derjenigen, welche oben gebraucht worden ist, unstreitig ein großer Vorzug vor der anderen gebührt; nur gibt es zu ihr kein Analogon in der Planimetrie, oder man müßte sich alle geraden Linien als Hauptbogen auf einer Kugel vorstellen. Aber dieser Reichthum der Sphärik an Methoden macht sie lehrreicher, interessanter und überhaupt wichtiger als die Planimetrie, deren weitere Ausbildung durch die der Sphärik bedingt wird, wie das in der Anmerkung 2. zu §. 297 erwähnte Beispiel, und eine Menge anderer, welche zum Theil noch interessanter sein dürften, zur Genüge zeigen.

Dieser nicht für Anfänger bestimmte Paragraph mag von ihnen übergangen werden.

Zusatz. Sind 12 Hauptbogen der Lage nach gegeben, und werden sie verlängert, bis sie sich gegenseitig schneiden, so erhält man $\frac{1}{2}$ n (n — 1) Durchschnitts-Punkte, wenn von zwei Gegenpunkten jedesmal einer weggelassen wird, und wenn man die Polygone zählt, deren jedes jene n Hauptbogen, wenigstens der Lage oder Richtung nach, zu Seiten hat, so ist die Menge dieser Polygone = $\frac{1}{2}$. 1 . 2 . 3 .... (n—2) . (n—1). Der Beweis kann ebenso geführt werden, wie im §. 273, auch folgt er unmittelbar aus dem Satze im §. 273, wenn man sich nur vorstellt, daß die dortigen Polygone die reciproken von den hier in Rede stehenden sind.

§. 301.

Aufgabe. Wenn die vier Seiten eines in einen Kreis geschriebenen Vierecks eine fünfte Sehne oder Sekante schneidet, so gibt es sechs Theilpunkte auf dieser Sekante, und man soll eine Formel für den Zusammenhang unter den Größen ihrer Theile finden.

Auflösung. In Fig. 170 sei ABCD das Viereck im Kreise und QQ' eine fünfte Sehne, welche zwei Gegenseiten des Vierecks in P und P' und die beiden anderen Gegenseiten in R und R' schneidet. Man verlängere zwei gegenüberstehende Seiten, AB und DC bis zum Schneiden in M, so ist MRR' ein Dreieck, von dessen Seiten eine jede den Kreis n zwei Punkten schneidet; daher ist nach §. 270

$$\frac{\sin RC \,.\, \sin RD}{\sin MC \,.\, \sin MD} \cdot \frac{\sin MA \,.\, \sin MB}{\sin R'A \,.\, \sin R'B} \cdot \frac{\sin R'Q' \,.\, \sin R'Q}{\sin RQ' \,.\, \sin RQ} = 1.$$

Ferner hat man

$$\frac{\sin PR}{\sin PR'} = \frac{\sin RD}{\sin MD} \cdot \frac{\sin MA}{\sin R'A} \text{ und ebenso}$$

$$\frac{\sin P'R}{\sin P'R'} = \frac{\sin RC}{\sin MC} \cdot \frac{\sin MB}{\sin R'B} \text{ nach §. 186,}$$

und werden diese Werthe in die erste Formel gesetzt, so hat man

$$\frac{\sin PR}{\sin PR'} \cdot \frac{\sin P'R}{\sin P'R'} \cdot \frac{\sin R'Q'}{\sin RQ'} \cdot \frac{\sin R'Q}{\sin RQ} = 1,$$

und diese Proportion ist mit der Formel 5 im §. 237 ganz dieselbe. Auch im §. 237 wurden die Seiten des Vierecks ABCD in Fig. 127 von einem Hauptbogen in P, P', R, R', geschnitten, der zugleich die beiden Diagonalen BD und AC in Q und Q' schnitt; jetzt ist also statt der beiden Diagonalen ein Kreis an die Stelle gesetzt worden, und man sieht, daß demungeachtet die Formel selbst nicht geändert worden ist. Man darf aber auch einen willkürlichen sphärischen Kegelschnitt substituiren, und nicht nur die Formel selbst, sondern auch die Art ihrer Herleitung bleibt ganz dieselbe, wie sie so eben Statt gefunden hat.

Eine andere, aber gleichbedeutende Formel erhält man, wenn man die Gegenseiten AD und BC soweit verlängert, bis sie sich schneiden.

Zusatz. Auch die geometrische Deutung der erhaltenen allgemeinen Formel ist schon im §. 238 angegeben worden. Wegen der geringen Statt findenden Änderung mag sie hier noch einmal ausgesprochen werden. Schreibt man in einen Kreis ein beliebiges Viereck ABCD, und wählt man einen beliebigen Punkt X, um in Bezug auf ihn die drei folgenden Polaren zu construiren:

erstens die Polare der beiden Seiten AB und DC,

zweitens die Polare der beiden Seiten AD und BC,
drittens die Polare des Kreises,
so schneiden sich diese drei Polaren jedesmal in Einem Punkte.

Da sich nun, wenn der Punkt X seine Lage ändert, auch die Richtungen der drei Polaren ändern, so ist das vorstehende, auch von allen Kegelschnitten geltende Theorem in der That sehr allgemein und fruchtbar an Folgerungen.

Zusatz 2. In Anwendung der Methode des sphärischen Dualismus findet man aus dem vorigen Satze sogleich den folgenden. Wenn man um einen Kreis (überhaupt einen Kegelschnitt) ein Viereck schreibt und einen willkürlichen Hauptkreis zieht, so schneidet dieser die beiden Diagonalen des Vierecks, und wenn man zu den drei Punkten auf jeder Diagonale den vierten harmonischen Theilpunkt und auch zu dem willkürlichen Hauptkreise den Pol des Kreises bestimmt, so liegen diese drei Punkte jedesmal in Einem Hauptkreise.

§. 302.

Aufgabe. Wenn vier Sekanten eines Kreises von Einem Punkte ausgehen, soll man den Zusammenhang unter den Größen der Kreisbogen finden, welche von den Sekanten intercipirt werden.

Auflösung. Wenn in Fig. 171 keine der Sekanten durch den Mittelpunkt geht, so ziehe man durch den Mittelpunkt M die fünfte Sekante PQR, ferner sei

$$\frac{\sin\frac{1}{2}CD \, . \, \sin\frac{1}{2}AB}{\sin\frac{1}{2}BC \, . \, \sin\frac{1}{2}AD} = \frac{m}{n},$$

dann ist $\frac{\sin\frac{1}{2}(QD-QC) \, . \, \sin\frac{1}{2}(QB-QA)}{\sin\frac{1}{2}(QC-QB) \, . \, \sin\frac{1}{2}(QD-QA)} = \frac{m}{n}$, oder wenn man zu den Cotangenten übergeht,

$$\frac{(\cot\frac{1}{2}QC - \cot\frac{1}{2}QD)\,(\cot\frac{1}{2}QA - \cot\frac{1}{2}QB)}{(\cot\frac{1}{2}QB - \cot\frac{1}{2}QC)\,(\cot\frac{1}{2}QA - \cot\frac{1}{2}QD)} = \frac{m}{n}.$$

Nun ist aber nach §. 290

$$\operatorname{tng}\tfrac{1}{2}QA \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}QA' = \frac{\sin QP}{\sin RP} \text{ oder auch}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}QA = \frac{\sin RP}{\sin QP} \, . \, \cot\tfrac{1}{2}RA'.$$

Setzt man also zur Abkürzung $\frac{\sin RP}{\sin QP} = k$, so ist also

$\cot\frac{1}{2}QA = k \, . \, \cot\frac{1}{2}RA'$, und ebenso
$\cot\frac{1}{2}QB = k \, . \, \cot\frac{1}{2}RB'$,
$\cot\frac{1}{2}QC = k \, . \, \cot\frac{1}{2}RC'$,
$\cot\frac{1}{2}QD = k \, . \, \cot\frac{1}{2}RD'$;

werden aber diese Werthe in dem vorigen Ausdrucke für $\frac{m}{n}$ substituirt, so hebt sich der Factor k^2 im Zähler und Nenner auf, und man erhält also

$$\frac{(\cot\frac{1}{2}QC'-\cot\frac{1}{2}QD')\ (\cot\frac{1}{2}QA'-\cot\frac{1}{2}QB')}{(\cot\frac{1}{2}QB'-\cot\frac{1}{2}QC')\ (\cot\frac{1}{2}QA'-\cot\frac{1}{2}QD')}=\frac{m}{n},$$

oder wenn man wieder zu dem Sinus übergeht, so ist

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C'D'\ .\ \sin\frac{1}{2}A'B'}{\sin\frac{1}{2}B'C'\ .\ \sin\frac{1}{2}A'D'}=\frac{m}{n},$$ und also

1. $$\frac{\sin\frac{1}{2}CD\ .\ \sin\frac{1}{2}AB}{\sin\frac{1}{2}BC\ .\ \sin\frac{1}{2}AD}=\frac{\sin\frac{1}{2}C'D'\ .\ \sin\frac{1}{2}A'B'}{\sin\frac{1}{2}B'C'\ .\ \sin\frac{1}{2}A'D'}.$$

Addirt man auf beiden Seiten Eins, so findet man nach §. 182

2. $$\frac{\sin\frac{1}{2}AC\ .\ \sin\frac{1}{2}BD}{\sin\frac{1}{2}BC\ .\ \sin\frac{1}{2}AD}=\frac{\sin\frac{1}{2}A'C'\ .\ \sin\frac{1}{2}B'D'}{\sin\frac{1}{2}B'C'\ .\ \sin\frac{1}{2}A'D'},$$

und wird diese Proportion durch die vorige dividirt, so hat man endlich noch

3. $$\frac{\sin\frac{1}{2}AC\ .\ \sin\frac{1}{2}BD}{\sin\frac{1}{2}CD\ .\ \sin\frac{1}{2}AB}=\frac{\sin\frac{1}{2}A'C'\ .\ \sin\frac{1}{2}B'D'}{\sin\frac{1}{2}CD'\ ,\ \sin\frac{1}{2}A'B'}.$$

Zusatz. Dieselben erhält man, und zwar auf ganz gleiche Weise, wenn in Fig. 172 der Punkt P, durch welchen die vier Sehnen gehen, sich im Inneren des Kreises befindet.

§. 302.

Lehrsatz. Wenn sich drei Sehnen eines Kreises in Einem Punkte schneiden, so theilen sie die Peripherie in sechs Theile so, daß das Product der Sinus der Hälften von drei abwechselnd genommenen Theilen der Peripherie gleich ist dem Producte der Sinus der Hälften der drei übrigen Theile.

Beweis. Schneiden sich in Fig. 173 die drei Sehnen AA', BB', CC' im Punkte O, so ist nach §. 286

1. $$\frac{\sin\frac{1}{2}AO\ .\ \cos\frac{1}{2}OB'}{\cos\frac{1}{2}A'O\ .\ \sin\frac{1}{2}OB}=\frac{\sin\frac{1}{2}AB'}{\sin\frac{1}{2}BA'},$$

2. $$\frac{\cos\frac{1}{2}OB\ .\ \sin\frac{1}{2}OC'}{\sin\frac{1}{2}OB'\ .\ \cos\frac{1}{2}OC}=\frac{\sin\frac{1}{2}BC'}{\sin\frac{1}{2}CB'},$$

3. $$\frac{\sin\frac{1}{2}OC\ .\ \cos\frac{1}{2}OA'}{\cos\frac{1}{2}OC'\ .\ \sin\frac{1}{2}OA}=\frac{\sin\frac{1}{2}CA'}{\sin\frac{1}{2}AC'},$$

und werden diese drei Proportionen multiplicirt, so erhält man

$$\frac{\sin\frac{1}{2}AB'}{\sin\frac{1}{2}BA'}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}CA'}{\sin\frac{1}{2}AC'}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}BC'}{\sin\frac{1}{2}CB'}=\frac{\text{tng}\frac{1}{2}OC\ .\ \text{tng}\frac{1}{2}OC'}{\text{tng}\frac{1}{2}OB\ .\ \text{tng}\frac{1}{2}OB'},$$ und

da nach §. 286 $\text{tng}\frac{1}{2}OC\ .\ \text{tng}\frac{1}{2}OC'=\text{tng}\frac{1}{2}OB\ .\ \text{tng}\frac{1}{2}OB'$ ist, so ist also auch

$$\sin\frac{1}{2}AB'\ .\ \sin\frac{1}{2}CA'\ .\ \sin\frac{1}{2}BC'=\sin\frac{1}{2}B'C\ .\ \sin\frac{1}{2}A'B\ .\ \sin\frac{1}{2}C'A$$

Zusatz 1. Multiplicirt man jeden in der obigen Gleichung vorkommenden Sinus mit dem Sinus des Kreishalbmessers, so erhält man jedesmal den Sinus der halben Sehne eines Bogens, und diese sechs Sehnen machen ein Sechseck AB'CA'BC', welches in den Kreis geschrieben ist. Daher kann der obige Satz auch so ausgesprochen werden: Wenn sich die drei Hauptdiagonalen eines in einen Kreis geschriebenen Sechsecks in Einem Punkte schneiden, so ist das Product der Sinus der Hälften von drei abwechselnd genommenen Seiten desselben gleich dem Producte der Sinus der Hälften der drei übrigen Seiten.

Zusatz 2. Wenn die Peripherie eines Kreises durch drei Sehnen in sechs Theile so getheilt wird, daß das Product der Sinus der Hälften von drei abwechselnd genommenen Theilen der Peripherie sogroß ist, als das Product der Sinus der Hälften der drei übrigen Theile, so schneiden sich die drei Sehnen in Einem Punkte.

Zusatz 3. Zieht man ferner die Diagonalen AC, B'A', CB, A'C', BA, C'B', welche sich in α, β, γ, δ, ε, η schneiden, so sind diese Punkte die Ecken eines neuen Sechsecks und die drei Hauptdiagonalen $\varepsilon\beta$, $\alpha\delta$, $\gamma\eta$ dieses Sechsecks schneiden sich nach §. 272 in demselben Punkte O, in welchem sich die Diagonalen AA', BB', CC' schneiden. Im Sechsecke $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta$ läßt sich die vorige Construction wiederholen, und es schneiden sich also im Punkte O die drei Hauptdiagonalen von unzähligen Sechsecken.

Anmerkung. Die analogen Sätze vom Kreise in der Planimetrie, welche wenigstens zum Theil neu sind, wurden mir von dem Herrn Bodenmiller mündlich mitgetheilt. Die Sätze im Zusatze 3 finden in der Lehre von den Kegelschnitten eine Erweiterung; denn wenn ein Sechseck in einen Kegelschnitt, und zugleich um einen anderen Kegelschnitt geschrieben ist, so gelten von ihm ebenfalls die im dritten Zusatze aufgestellten Behauptungen sowohl in der Planimetrie, als in der Sphärik.

§. 303.

Der im §. 302 bewiesene Satz gilt auch dann noch, wenn sich die drei Sehnen Sehnen AA', BB', CC' eines Kreises außerhalb desselben in Einem Punkte O schneiden. Denn nach §. 288 ist ebenfalls in Fig. 174

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\, OA \,.\, \cos \frac{1}{2}\, OB'}{\cos \frac{1}{2}\, OA' \,.\, \sin \frac{1}{2}\, OB} = \frac{\sin \frac{1}{2}\, AB'}{\sin \frac{1}{2}\, BA'},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}OB \cdot \sin\frac{1}{2}OC'}{\sin\frac{1}{2}OB' \cdot \cos\frac{1}{2}OC} = \frac{\sin\frac{1}{2}BC'}{\sin\frac{1}{2}CB'} \text{ und}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}OC \cdot \cos\frac{1}{2}OA'}{\cos\frac{1}{2}OC' \cdot \sin\frac{1}{2}OA} = \frac{\sin\frac{1}{2}CA'}{\sin\frac{1}{2}AC'} \text{ *)}$$

und werden diese drei Proportionen multiplicirt, so erhält man, wie vorhin

$$\sin\tfrac{1}{2}AB' \cdot \sin\tfrac{1}{2}CA' \cdot \sin\tfrac{1}{2}BC' = \sin\tfrac{1}{2}B'C \cdot \sin\tfrac{1}{2}A'B \cdot \sin\tfrac{1}{2}C'A.$$

Zusatz. Wenn die im vorigen Satze aufgestellte Proportion oder Gleichung von den Theilen der Peripherie eines Kreises gilt, so schneiden sich die Sekanten AA', BB', CC' in Einem Punkte O.

Anmerkung 1. Die mit *) bezeichnete Proportion folgt nicht unmittelbar aus §. 288 oder §. 286, sondern man erhält sie mit den ähnlichen übrigen Formeln, wenn man im §. 197 statt der Sehnen AC und BD in Fig, 161 die Sehnen CD und AB zieht, wodurch die Dreiecke EAB und ECD entstehen, welche wieder den Winkel E gemein haben. Man erhält dann

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(ED+EC)}{\sin\frac{1}{2}(EB+EA)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(ED-EC)}{\sin\frac{1}{2}(EB-EA)} = \frac{\sin\frac{1}{2}CD}{\sin\frac{1}{2}AB},$$

woraus das Übrige folgt.

Anmerkung 2. Aus den Proportionen im §. 303 können ebenfalls die im §. 302 bewiesenen Relationen hergeleitet werden.

§. 304.

Erklärung. Zieht man durch einen Durchschnitts-Punkt zweier Kreise zwei Tangenten, für jeden Kreis eine, so heißt der Winkel dieser beiden Tangenten der Winkel, unter welchem sich die beiden Kreise schneiden.

Schneiden sich z. B. in Fig. 175 und 176 die Kreise (M) und (N) nämlich die Kreise, deren Mittelpunkte M und N sind, in den Punkten A und B, und zieht man durch den Punkt A die beiden Hauptbogen Am und An, wovon der erste den Kreis (M) und der zweite den Kreis (N) berührt, so ist mAn der Winkel, unter welchem sich die beiden Kreise schneiden.

Der Hauptbogen MN, welcher die beiden Mittelpunkte verbindet, heißt die Central-Linie; bisweilen heißt überhaupt der Hauptkreis, welcher durch die beiden Mittelpunkte zweier Kreise geht, ihre Central-Linie, wenn es nur auf die Richtung, nicht auf die Länge dieser Linie ankommt.

Schneiden sich zwei Kreise in zwei Punkten A und B, und verbindet man die beiden Durchschnitts-Punkte durch einen Hauptbogen, so heißt dieser die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise. Wenn

es nicht auf die Länge derselben ankommt, so heißt überhaupt der durch die beiden Durchschnitts-Punkte zweier Kreise gehende Hauptkreis ihre gemeinschaftliche Sehne.

Zusatz. Die gemeinschaftliche Sehne zweier sich schneidender Kreise steht auf ihrer Central-Linie senkrecht, und wird dadurch halbirt. Es steht nämlich AB im Punkte O senkrecht auf MN und es ist OA=OB.

§. 305.

Lehrsatz. Zieht man nach einem Durchschnitts-Punkte zweier sich schneidender Kreise in jedem Kreise einen Radius, so ist der Winkel dieser Radien entweder dem Winkel gleich, unter welchem sich die Kreise schneiden, oder jener Winkel ergänzt diesen zu zwei rechten Winkeln.

Beweis. In Fig. 176 ist der Winkel $MAm = NAn = 90^{\circ}$ und da sie den Winkel MAn gemeinschaftlich haben, so ist der Winkel $MAN = mAn$. In Fig. 175 hingegen ist $MAm + NAn = 180^{\circ}$ und also $MAn + NAn + nAm = 180^{\circ}$ oder auch $MAN + mAn = 180^{\circ}$.

Zusatz 1. Bezeichnet man die Radien MA und NA mit r und r', ferner den Winkel mAn mit v und die Centrallinie MN mit b, so ist in Fig. 176 offenbar $\cos c = \cos r \cos r' + \sin r \sin r' \cos v$ und in Fig. 175 ist ebenso $\cos c = \cos r \cos r' - \sin r \sin r' \cos v$.

Ist endlich der Winkel, unter welchem sich die beiden Kreise schneiden, ein rechter, d. h. schneiden sich die beiden Kreise orthogonal, so ist $\cos c = \cos r \cos r'$ und dieser Fall stellt Fig. 177 dar.

Zusatz 2. Schneiden sich zwei Kreise, deren Radien r und r' sind, und deren Centrallinie c sein mag, so ist immer $r + r' > c$ und $r' - r < c$.

§. 306.

Lehrsatz. Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises zwei Tangenten an denselben, und beschreibt man aus demselben Punkte einen zweiten Kreis, welcher durch die beiden Berührungs-Punkte geht, so schneiden sich die beiden Kreise orthogonal.

Beweis. In Fig. 177 seien NA=NB zwei Tangenten des Kreises (M) und es sei mit dem Radius NA aus N ein zweiter Kreis beschrieben, so geht er durch die Punkte A und B; zieht man nun die Radien MA und MB, so sind die Winkel MAN und MBN rechte, und da die Radien MA und MB auch Tangenten des Kreises (N) sind, so schneiden sich die beiden Kreise (M) und (N) orthogonal.

§. 307.

Lehrsatz. Schneiden sich zwei Kreise orthogonal, so wird jeder durch den Mittelpunkt eines dieser Kreise gehende Hauptbogen von den beiden Peripherien in ihren vier Durchschnitts-Punkten mit demselben semiharmonisch getheilt, d. h. die halben Linienstücke stehen in der gewöhnlichen harmonischen Proportion.

Beweis. Geht in Fig. 177 durch den Mittelpunkt N eines der beiden sich orthogonal schneidenden Kreise (M) und (N) der Hauptbogen PRQS, welcher von den Peripherien der beiden Kreise in P, Q, R, S geschnitten wird, so ist

$$\sin \tfrac{1}{2} PR \,.\, \sin \tfrac{1}{2} QS = \sin \tfrac{1}{2} QR \,.\, \sin \tfrac{1}{2} PS.$$

Da nämlich NA eine Tangente und NQP eine Sekante des Kreises (M) ist, so ist $\operatorname{tng} \frac{1}{2} NA^2 = \operatorname{tng} \frac{1}{2} NQ \,.\, \operatorname{tng} \frac{1}{2} NP$ und da NA = NR ist, so ist also

$$\frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} NR}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} NQ} = \frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} NP}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} NR}, \text{ und also}$$

$$\frac{\operatorname{tng}\frac{1}{2} NR - \operatorname{tng}\frac{1}{2} NQ}{\operatorname{tng}\frac{1}{2} NR + \operatorname{tng}\frac{1}{2} NQ} = \frac{\operatorname{tng}\frac{1}{2} NP - \operatorname{tng}\frac{1}{2} NR}{\operatorname{tng}\frac{1}{2} NP + \operatorname{tng}\frac{1}{2} NR} \text{ oder auch}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (NR - NQ)}{\sin \frac{1}{2} (NR + NQ)} = \frac{\sin \frac{1}{2} (NP - NR)}{\sin \frac{1}{2} (NP + NR)}.$$

Nun ist aber $NR - NQ = QR$; $NR + NQ = NS + NQ = QS$, $NP - NR = PR$ und $NP + NR = PS$, also hat man

$$\frac{\sin \frac{1}{2} QR}{\sin \frac{1}{2} QS} = \frac{\sin \frac{1}{2} PR}{\sin \frac{1}{2} PS} \text{ oder } \sin \tfrac{1}{2} PR \,.\, \sin \tfrac{1}{2} QS = \sin \tfrac{1}{2} QR \,.\, \sin \tfrac{1}{2} PS.$$

Geht durch den Mittelpunkt M der Hauptbogen prqs, so kann man ebenso davon beweisen, daß $\sin \frac{1}{2} pr \,.\, \sin \frac{1}{2} qs = \sin \frac{1}{2} qr \,.\, \sin \frac{1}{2} ps$ sei.

Zusatz. Die Proportion $\sin \frac{1}{2} PR \,.\, \sin \frac{1}{2} QS = \sin \frac{1}{2} QR \,.\, \sin \frac{1}{2} PS$ kann auch durch die folgenden gleichbedeutenden Ausdrücke ersetzt werden:

1. $\sin \frac{1}{2} PQ \,.\, \sin \frac{1}{2} RS = 2 \,.\, \sin \frac{1}{2} RQ \,.\, \sin \frac{1}{2} PS = 2 \,.\, \sin \frac{1}{2} PR \,.\, \sin \frac{1}{2} QS$,
2. $\cot \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} (\cot \frac{1}{2} PR + \cot \frac{1}{2} PS)$ und
   $\cot \frac{1}{2} SR = \frac{1}{2} (\cot \frac{1}{2} SQ + \cot \frac{1}{2} SP)$,
3. $\cot \frac{1}{2} QP = \frac{1}{2} (\cot \frac{1}{2} QR - \cot \frac{1}{2} QS)$ und
   $\cos \frac{1}{2} RS = \frac{1}{2} (\cot \frac{1}{2} RQ - \cot \frac{1}{2} RP)$,
4. $\left(\frac{\sin \frac{1}{2} RQ}{\sin \frac{1}{2} RP}\right)^2 = \left(\frac{\sin \frac{1}{2} QS}{\sin \frac{1}{2} PS}\right)^2 = \frac{\sin NQ}{\sin NP}$.

Im analogen Falle der Planimetrie verwandelt sich diese semiharmonische Theilung in die gewöhnlich harmonische Theilung.

§. 308.

Lehrsatz. Haben zwei Kreise eine gemeinschaftliche Sehne, und zieht man von beliebigen Punkten dieser Sehne Tangenten an die Kreise, so sind diese Tangenten jedesmal gleich groß.

Beweis. Es sei in Fig. 178 mn die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise (M) und (N), und von einem Punkte U derselben seien die Tangenten $U\mu$ und $U\nu$ an die Kreise gezogen, dann ist, insofern Umn eine Sekante des Kreises (M) ist

$$\text{tng } \tfrac{1}{2}\, U\mu = \sqrt{(\text{tng } \tfrac{1}{2}\, Um \,.\, \text{tng } \tfrac{1}{2}\, Un)},$$

und insofern Umn eine Tangente des Kreises (N) ist, ist ebenso

$$\text{tng } \tfrac{1}{2}\, U\nu = \sqrt{(\text{tng } \tfrac{1}{2}\, Um \,.\, \text{tng } \tfrac{1}{2}\, Un)},$$

daher ist $\text{tng } \tfrac{1}{2}\, U\mu = \text{tng } \tfrac{1}{2}\, U\nu$ oder auch $U\mu = U\nu$. Ebenso ist $U\mu = U\nu = U\mu' = U\nu'$.

Zusatz 1. Sind mehr als zwei Kreise gegeben, welche sich in denselben zwei Punkten m und n schneiden, und deren Mittelpunkte also in Einem Hauptkreise liegen, so kann man vom Punkte U aus an jeden Kreis eine Tangente ziehen und alle diese Tangenten sind dem Vorigen gemäß gleichgroß. Beschreibt man nun ferner mit einer solchen Tangente einen Kreis, so geht er durch die Berührungs-Punkte aller Kreise und schneidet dieselben nach §. 304 sämmtlich orthogonal. Dasselbe findet für jeden anderen Punkt in der Verlängerung der Sehne mn Statt. Aber auch für die Punkte in der Sehne mn selbst gilt ein ähnliches Gesetz. Nennt man Hauptsehne eines Punktes im Kreise eine solche Sehne, die auf dem durch diesen Punkt gehenden Radius desselben Kreises senkrecht steht, so sind auch alle durch einen Punkt O der gemeinschaftlichen Sehne mn mehrer Kreise gehenden Hauptsehnen dieser Kreise gleichgroß. Sind $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ die durch den Punkt O gehenden Hauptsehnen der beiden Kreise (M) und (N), so werden sie von MO und NO halbirt, und es ist

$$\text{tng } \tfrac{1}{2}\, O\alpha = \sqrt{(\text{tng } \tfrac{1}{2}\, Om \,.\, \text{tng } \tfrac{1}{2}\, On)} \text{ und}$$

$$\text{tng } \tfrac{1}{2}\, O\beta = \sqrt{(\text{tng } \tfrac{1}{2}\, Om \,.\, \text{tng } \tfrac{1}{2}\, On)},$$

daher ist $O\alpha = O\beta$ und also auch $\alpha\alpha' = \beta\beta'$. Haben also mehre Kreise eine gemeinschaftliche Sehne mn und zieht man durch einen beliebigen Punkt in ihr selbst in jedem Kreise eine Hauptsehne dieses Punktes, so kann man aus dem Punkte mit der Hälfte einer solchen Sehne einen Kreis beschreiben, und dieser Kreis geht dann durch die Endpunkte aller gezogenen Hauptsehnen. Die Hauptsehnen treten also für die Tangenten da ein, wo die Tangenten unmöglich werden.

Zusatz 2. Die Centrallinie MN wird von der gemeinschaftlichen Sehne mn im Punkte G so getheilt, daß $\frac{\cos MG}{\cos NG} = \frac{\cos Mm}{\cos Nm}$ ist, weil die Linie mG im Dreiecke MmN, welches die Centrallinie mit den beiden Radien macht, auf der Centrallinie senkrecht ist.

§. 309.

Lehrsatz. Haben zwei Kreise keine gemeinschaftliche Sehne und theilt man gleichwohl die Centrallinie durch einen darauf senkrechten Hauptkreis so, daß die Cosinus der Theile sich zu einander verhalten, wie die Cosinus der Radien der beiden Kreise, so hat der also construirte Hauptkreis in Ansehung der beiden Kreise, abgesehen davon, daß er sie nicht schneidet, dieselben Eigenschaften, welche die gemeinschaftliche Sehne haben würde.

Beweis. In Fig. 179 und Fig. 180 seien (M) und (M′) zwei Kreise, deren Radien r und r′ und deren Centrallinie $MM' = c$ sein mag, ist nun in Fig. 179 $r + r' < c$ oder in Fig. 180 $r - r' > c$, so schneiden sich die beiden Kreise nicht; theilt man aber in Fig. 179 die Centrallinie MM′ durch den Punkt O innerlich und in Fig. 180 durch den Punkt O äußerlich so, daß

$$\frac{\cos MO}{\cos M'O} = \frac{\cos r}{\cos r'},$$

und errichtet man im Punkte O auf MM′ ein Loth mm′, so hat dasselbe dieselben Eigenschaften in Ansehung der beiden Kreise, welche ihre gemeinschaftliche Sehne haben würde, wenn die beiden Kreise eine solche Sehne hätten. Denn nimmt man in der Linie mm′ einen willkürlichen Punkt P an, und zieht man von ihm aus nach den Mittelpunkten die Linie PM und PM′, so ist, weil PO senkrecht auf MM′ ist, $\cos PM = \cos MO \,.\, \cos PO$ und $\cos PM' = \cos M'O \,.\, \cos PO$, also $\frac{\cos PM}{\cos PM'} = \frac{\cos MO}{\cos M'O}$; und da $\frac{\cos MO}{\cos M'O} = \frac{\cos r}{\cos r'}$ ist, so ist also auch

$$\frac{\cos PM}{\cos PM'} = \frac{\cos r}{\cos r'}$$

wie, wenn mm′ die gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise (M) und (M′) wäre.

Zieht man ferner von P aus die Tangenten $P\alpha$ und $P\beta$ an den Kreis (M) und die Tangenten $P\alpha'$ und $P\beta'$ an den Kreis (M′), so ist

$$\cos PM = \cos M\alpha \,.\, \cos P\alpha = \cos r \,.\, \cos P\alpha \text{ und}$$
$$\cos PM' = \cos M'\alpha' \,.\, \cos P\alpha' = \cos r' \,.\, \cos P\alpha'$$

und also $\frac{\cos PM}{\cos PM'} = \frac{\cos r \,.\, \cos P\alpha}{\cos r' \,.\, \cos P\alpha'}$ und da $\frac{\cos PM}{\cos PM'} = \frac{\cos r}{\cos r'}$ ist, so folgt hieraus, daß $\cos P\alpha = \cos P\alpha'$ und also $P\alpha = P\alpha'$ sei. Daher ist überhaupt

$$P\alpha = P\beta = P\alpha' = P\beta'.$$

Sind außer den Kreisen (M), (M′) noch andere Kreise (M″), (M‴) etc. gegeben, deren Radien r″, r‴ etc. sein, und deren Mit-

telpunkte sich sämmtlich in Einem Hauptbogen befinden mögen, so haben sie offenbar die Linie mm mit gleicher Eigenschaft in Ansehung aller gemein, wenn

$$\frac{\cos MO}{\cos r} = \frac{\cos M'O}{\cos r'} = \frac{\cos M''O}{\cos r''} = \frac{\cos M'''O}{\cos r'''} = \text{etc.}$$

ist, und zieht man dann von einem beliebigen Punkte P der Linie mm' Tangenten an alle diese Kreise, so sind alle diese Tangenten gleichlang und wenn man also aus P einen Kreis beschreibt, dessen Radius eine solche Tangente ist, so geht dieser Kreis durch die Berührungs-Punkte aller dieser Kreise und schneidet sie sämmtlich nach §. 304 orthogonal.

Zusatz. Wegen dieser merkwürdigen Eigenschaft, worin die Linie mm' mit der gemeinschaftlichen Sehne von Kreisen übereinstimmt, heißt die Linie mm' ebenfalls eine gemeinschaftliche Sehne der Kreise (M), (M') etc., und zwar eine ideelle gemeinschaftliche Sehne, wenn man sie von der reellen gemeinschaftlichen Sehne zweier oder mehrer Kreise unterscheiden will, d. h. von einem solchen Hauptbogen, durch dessen beide Endpunkte die Peripherie der Kreise hindurch gehen.

Will man aber diese Unterscheidung beseitigen, so kann man die Linie mm' die Chordale der Kreise (M) und und (M') nennen, diese Benennung ist von dem Herrn Prof. Plücker, einem sehr ausgezeichneten Geometer, eingeführt oder wenigstens gebraucht worden.

§. 310.

Lehrsatz. Zwei Kreise berühren sich, wenn ihre Peripherien einen Punkt gemein und wenn sie in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente haben.

Diese gemeinschaftliche Tangente zweier Kreise ist offenbar ihre Chordale, denn sie steht auf der Centrallinie senkrecht, und wenn man von einem beliebigen Punkte in ihr zwei neue Tangenten an die Kreise zieht, so sind sie offenbar gleichgroß.

Berühren sich in Fig. 181 die drei Kreise M, M', M'' im Punkte O, und steht OP senkrecht auf MM''M', so ist PO die gemeinschaftliche Tangente der drei Kreise, und also ihre Chordale. Zieht man von einem beliebigen Punkte P der Chordale an die drei Kreise die neuen Tangenten $P\alpha$, $P\alpha'$, $P\alpha''$, so ist

$$PO = P\alpha,\ PO = P\alpha',\ PO = P\alpha'' \text{ und also}$$
$$P\alpha = P\alpha' = P\alpha''.$$

Zusatz. Wenn sich zwei Kreise äußerlich berühren, so ist die Summe ihrer Radien sogroß als ihre Centrallinie; berühren sich die Kreise innerlich, so ist der Unterschied ihrer Radien gleich der Centrallinie; und beide Sätze gelten auch in der Umkehrung.

§. 311.

Hülfssatz. Fällt man von einem Punkte O in Fig. 182 die Perpendikel $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ auf die Seiten des Dreiecks ABC, so werden sie davon in den Punkten α, β, γ, innerlich oder auch äußerlich, so getheilt, daß ist

$$\frac{\cos A\gamma}{\cos B\gamma} \cdot \frac{\cos B\alpha}{\cos C\alpha} \cdot \frac{\cos C\beta}{\cos A\beta} = 1.$$

Beweis. Zieht man noch die Linien OA, OB, OC, so ist

$$\frac{\cos AO}{\cos BO} = \frac{\cos A\gamma}{\cos B\gamma},$$
$$\frac{\cos BO}{\cos CO} = \frac{\cos B\alpha}{\cos C\alpha},$$
$$\frac{\cos CO}{\cos AO} = \frac{\cos C\beta}{\cos A\beta},$$

und werden diese drei Proportionen multiplicirt, so erhält man unmittelbar die zu beweisende Formel.

Zusatz 1. Wenn umgekehrt $\frac{\cos A\gamma}{\cos B\gamma} \cdot \frac{\cos B\alpha}{\cos C\alpha} \cdot \frac{\cos C\beta}{\cos A\beta} = 1$ ist, und man errichtet in den Punkten α, β, γ Perpendikel auf den Seiten BC, CA und AB, so schneiden sich dieselben in Einem Punkte O.

Zusatz 2. Macht man ferner $\alpha\alpha' = 90^0$; $\beta\beta' = 90$, $\gamma\gamma' = 90^0$, so befinden sich die Punkte α', β', γ' in Einem Hauptkreise, dessen Centrum der Punkt O ist.

Anmerkung. Im analogen Falle der Planimetrie schneiden sich die drei Perpendikel, welche in den Punkten α, β, γ auf den Seiten BC, CA und AB eines ebenen Dreiecks errichtet werden, in Einem Punkte O, wenn $A\gamma^2 + B\alpha^2 + C\beta^2 = B\gamma^2 + C\alpha^2 + A\beta^2$ ist, und da diese einfache Formel in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Planimetrie nicht vorkommt, so habe ich auf dieselbe aufmerksam machen wollen.

§. 312.

Lehrsatz. Die Chordalen dreier Kreise (A), (B), (C) schneiden sich jedesmal in Einem Punkte, die Kreise mögen sich berühren, oder schneiden, oder gar keinen Punkt ihrer Peripherie gemein haben.

Beweis. Die drei Mittelpunkte Fig. 182 A, B, C bestimmen ein Dreieck ABC; es sei $x\gamma$ die Chordale der Kreise (A) und (B), $y\beta$ sei die Chordale der Kreise (A) und (C), $z\alpha$ sei die Chordale der Kreise (B) und (C); ferner seien a, b, c die Radien der Kreise (A), (B), (C), γ sei der Punkt der Centrallinie der Kreise (A) und (B), in welchen sie von der Chordale dieser Kreise geschnitten wird, eine

16*

ähnliche Bedeutung hat β in Ansehung der Kreise (A) und (C), endlich α in Ansehung der Kreise (B) und (C); dann ist

$$\frac{\cos A\gamma}{\cos B\gamma} = \frac{\cos a}{\cos b},$$
$$\frac{\cos B\alpha}{\cos C\alpha} = \frac{\cos b}{\cos c},$$
$$\frac{\cos C\beta}{\cos A\beta} = \frac{\cos c}{\cos a},$$

und werden diese Proportionen multiplicirt, so hat man auf der Stelle

$$\frac{\cos A\gamma}{\sin B\gamma} \cdot \frac{\cos B\alpha}{\cos C\alpha} \cdot \frac{\cos C\beta}{\cos A\beta} = 1;$$

daher schneiden sich nach §. 311 die drei Chordalen $x\gamma$, $y\beta$ und $z\alpha$ in Einem Punkte O.

Anmerkung. Die Chordale zweier Kreise (A) und (B) kann man der Kürze wegen durch (AB) andeuten, die Centrallinie derselben zwei Kreise aber durch AB.

§. 313.

Werden zwei Kreise (A) und (B) von beliebig vielen anderen Kreisen (C), (C′), (C″) u. s. w. geschnitten, so schneiden sich die Linien-Paare (AC) und (BC), (AC′) und (BC′), (AC″) und (BC″) etc. sämmtlich auf Einem und demselben Hauptkreise, welcher die Chordale der beiden Kreise (A) und (B) ist, und also nach der kurz vorher angegebenen Bezeichnung durch (AB) bezeichnet wird.

Dieser Satz gilt nach §. 312 auch dann noch, wenn die Kreise (A) und (B) von den Kreisen (C), (C′), (C″) u. s. w. oder von einigen derselben gar nicht geschnitten werden.

Werden aber die Kreise (A) und (B), welche sich nicht schneiden, von zwei anderen Kreisen (C) und (C′), welche übrigens willkürlich construirt werden können, geschnitten, und schneiden sich die Chordalen (AC) und (BC) in einem Punkte O, und die Chordalen (AC′) und (BC′) in einem O′, so kann man die Punkte O und O′ durch einen Hauptbogen verbinden, und dieser ist dann die Chordale (AB), welche also hiernach auf eine einfache Art bestimmt wird, obgleich sich die Kreise (A) und (B) nicht schneiden.

Weil ferner in Fig. 183 die drei Kreise (A), (B), (C) von einem vierten Kreise (D) auf aa′=(AD), bb′=(BD) und cc′=(CD) geschnitten werden, und diese Chordale (hier also Chorden) verlängert werden, bis sich (AD) und (BD) in x, (AD) und (CD) in y, (BD) und (CD) in z schneiden, und man die Perpendikel $x\gamma$ auf AB, $y\beta$ auf AC und $z\alpha$ auf BC fällt, so sind sie die Chordalen der drei Kreise (A), (B), (C), und schneiden sich also nach §. 312 in Einem Punkte O.

Zusatz. Da der Punkt O der Durchschnitts-Punkt von (AB), (AC), (BC) ist, so kann man ihn auf eine passende Weise durch (ABC) bezeichnen; er mag der Chordal-Punkt der drei (A), (B), (C) heißen. Jede drei Kreise haben einen Chordal-Punkt, welcher dann, wenn die Peripherien der drei Kreise keinen Punkte gemein haben, nach der vorhin angegebenen Construction gefunden werden kann.

§. 314.

Der Begriff einer Chordale zweier Kreise ist auch dann noch statthaft, wenn einer von den beiden Kreisen bloß ein Punkt ist, oder wenn statt beider Kreise Punkte genommen werden.

Die Richtigkeit der letzten Behauptung erhellet sogleich, wenn man die beiden Punkte A und B durch einen Hauptbogen verbindet und in der Mitte desselben ein Perpendikel errichtet; dieses ist offenbar die Chordale der beiden Punkte, und wird also nach der angegebenen Weise durch (AB) bezeichnet werden müssen. Denn nimmt man in der Linie (AB) einen beliebigen Punkt P an und zieht man von ihm nach A und B Hauptbogen, so ist offenbar APB ein gleichschenkeliges Dreieck oder PA = PB.

Wie aber ein Punkt mit einem Kreise zusammenzustellen sei, bedarf einer umständlicheren Erörterung.

In Fig. 184 stelle (B) den Kreis, und A oder (A) den Punkt vor. Denkt man sich den Mittelpunkt A zugleich als einen Kreis, so ist sein Radius = o und also der Cosinus seines Radius = 1; man theile daher die Centrallinie AB durch den Punkt γ so, daß, wenn der Radius von (B) mit r bezeichnet wird, sei

$$\frac{\cos B\gamma}{\cos A\gamma} = \frac{\cos r}{1},$$

und errichte in γ auf AB ein Perpendikel γX, so ist es die gesuchte Chordale für den Punkt A und den Kreis (B), und diese Linie also mit (AB) zu bezeichnen.

Wählt man nämlich in γX beliebig den Punkt X und zieht man XA und XB, so ist offenbar

$$\frac{\cos XB}{\cos XA} = \frac{\cos B\gamma}{\cos A\gamma} \text{ und also auch } \frac{\cos XB}{\cos XA} = \frac{\cos r}{1}.$$

Zieht man ferner von X aus die Tangenten Xβ und Xβ' an den Kreis (B) und den Radius Bβ, so ist $\cos XB = \cos X\beta \cdot \cos r$ und wird dieser Werth in die vorige Proportion gesetzt, so ist $\cos X\beta = \cos XA$ oder $X\beta = XA$; daher ist jede von einem beliebigen Punkte im Hauptbogen Xγ an den Kreis (B) gezogene Tangenten solang, als der Abstand desselben Punktes vom festen oder gegebenen Punkte A = (A), und also ist Xγ die Chordale für den Punkt A und den Kreis B.

§. 315.

Hat also eine Reihe von Kreisen (A), (B), (C), etc. eine gemeinschaftliche Chordale, so befinden sich ihre Mittelpunkte in Einem Hauptkreise ABCD etc., welcher ihre Centrallinie ist und in die Reihe dieser Kreise gehören auch noch zwei Punkte, welche mit jenem Kreise ebenfalls dieselbe Chordale haben. Diese beiden Punkte befinden sich nach §. 314 auf entgegengesetzten Seiten der genannten Chordale in der Centrallinie der genannten Kreise und zwar in gleichen Abständen von der Chordale. Ist die Chordale eine ideelle Sehne, so sind jene beiden Punkte möglich, ist aber die Chordale eine reelle Sehne, so sind jene beiden Punkte unmöglich.

Die beiden letzten Sätze können auch umgekehrt werden.

Beschreibt man ferner aus einem beliebigen Mittelpunkte D, wie im §. 313 einen Kreis (D), welcher den gegebenen Kreis in b und b′ schneidet und durch den gegebenen Punkt A geht, so ist bb′ oder (BD) die Chordale der beiden Kreise (B) und (D) und wenn man durch den Punkt A eine Tangente an den Kreis D legt, so so ist sie die Chordale für den Kreis (D) und den Punkt A, und es kann auf ähnliche Art vom Dreiecke BAD (wie im §. 312 vom Dreiecke ABC) bewiesen werden, daß sich die Perpendikel xbb′, xy und xA auf den Seiten BD, BA und AD in Einem Punkte X, nämlich im Chordal-Punkte (ABD) schneiden.

§. 316.

Nach diesen vorläufigen Erörterungen kann nun das im §. 280 bewiesene Theorem mit den jetzt bewiesenen Sätzen zusammengefaßt, und also ausgesprochen werden.

Haben mehrere Kreise (A), (B), (C), etc., wozu auch zwei Punkte P und Q gehören, eine und dieselbe Chordale, so geht ihre Centrallinie durch die festen Punkte P und Q, ihre Chordale aber steht auf PQ in der Mitte senkrecht. Wenn man ferner in der Chordale einen beliebigen Punkt A′ annimmt, und von ihm aus Tangenten an alle Kreise zieht, so sind sie gleichlang, und wenn man endlich aus A′ einen Kreis (A′) beschreibt, dessen Radius eine solche Tangente ist, so schneidet dieser Kreis alle Kreise (A), (B), (C), etc. und geht auch durch die festen Punkte P und Q, und wenn man aus beliebig vielen anderen Punkten der Chordale die Kreise (B′), (C′), etc. auf ähnliche Art construirt, so schneiden alle diese Kreise (A′), (B′), (C′), (D′) etc. alle vorigen Kreise orthogonal, und da sie auch alle durch die festen Puncte P und Q gehen, so ist PQ die gemeinschaftliche Chordale aller. Die beiden auf einander senkrechten Hauptkreise ABCD . . . PQ und A′B′C′D′ etc., welche sich in O schneiden mögen, sind also zugleich Centrallinien und Chordalen; der erste ist nämlich auch die Chordale der Kreise (A′), (B′),

(C'), (D'), u. s. w., sowie umgekehrt der Hauptkreis A'B'C'D' etc. die Chordale der Kreise A, B, C, D, etc. und auch der Punkte P und Q ist.

Anmerkung. Dieselben allgemeinen Gesetze gelten auch in der Ebene, und finden sich auseinander gesetzt in mehreren Schriften, wovon hier „Traité des propriétés projectives des figures No. 69 und f. f. von Poncelet", und „Analytisch-geometrische Entwickelungen, erster Band, von Plücker" genannt werden mögen.

§. 317.

Aufgabe. Wenn aus drei gegebenen Punkten A, B, C Kreise beschrieben werden mit verschiedenen Radien, so soll man die Bedingung ermitteln für diese Radien, bei deren Erfüllung die Chordal-Punkte von je drei solchen Kreisen sich in Einem Hauptbogen befinden.

Es seien aus dem Punkte A Fig. 185 die Kreise (A), (A'), (A'') mit den Radien α, α', α''; aus B die Kreise (B), (B'), (B'') mit den Radien β, β', β'' und aus C endlich die Kreise (C), (C'), (C'') mit den Radien γ, γ', γ'' beschrieben. Der Chordal-Punkt (ABC) werde bezeichnet mit p', der Chordal-Punkt (A''B''C'') mit p' und der Chordal-Punkt (A''B''C'') mit p''.

Zieht man die Chordalen pe oder (BC), pg oder (AC) und pf oder (AB), so stehen sie auf den Seiten des Dreiecks ABC senkrecht und ist p das Centrum von QR, p' das Centrum von Q'R', p'' das Centrum von Q''R'', so müssen sich die genannten Hauptbogen in Einen Punkte S schneiden, wenn ihre Mittelpunkte p, p', p'' sich in Einen Hauptbogen befinden sollen; daher müssen die Linien CRR'R'' und CQQ'Q'' ähnlich getheilt sein, und es muß also

$$\frac{\cot CR - \cot CR'}{\cot CR - \cot CR''} = \frac{\cot CQ - \cot CQ'}{\cot CQ - \cot CQ''}$$ sein. Nun ist aber

$$\frac{\cos Be}{\cos Ce} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma},$$

und weil $R = 90^\circ$ ist, so ist also $\frac{\sin RB}{\sin RC} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$. Bezeichnen wir nun der Kürze wegen CB mit a und CA mit b, so ist also

$$\frac{\sin (RC - a)}{\sin RC} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma},$$ oder

$$\cot CR = \frac{\cos a \cos \gamma - \cos \beta}{\sin a \cos \gamma}$$ ebenso ist

$$\cot CQ = \frac{\cos b \cos \gamma - \cos \alpha}{\sin b \cos \gamma}$$ oder

$$\cot CR = \cot a - \frac{\cos \beta}{\sin a \cos \gamma}$$ und

$$\cot CQ = \cot b - \frac{\cos \alpha}{\sin b \cos \gamma},$$

$$\cot CR' = \cot a - \frac{\cos \beta'}{\sin a \cos \gamma'} \text{ und}$$

$$\cot CQ' = \cot b - \frac{\cos \alpha'}{\sin b \cos \gamma'},$$

$$\cot CR'' = \cot a - \frac{\cos \beta''}{\sin a \cos \gamma''} \text{ und}$$

$$\cot CQ'' = \cot b - \frac{\cos \alpha''}{\sin b \cos \gamma''}.$$ Also ist

$$\cot CR - \cot CR' = \frac{\cos \beta' \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma'}{\sin a \cos \gamma \cos \gamma'},$$

und $\cot CR - \cot CR'' = \dfrac{\cos \beta'' \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma''}{\sin a \cos \gamma . \cos \gamma''}$, und daher

$$\frac{\cot CR - \cot CR'}{\cot CR - \cot CR''} = \frac{\cos \beta' \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma'}{\cos \beta'' \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma''} . \frac{\cos \gamma''}{\cos \gamma'},$$ ebenso ist

$$\frac{\cot CQ - \cot CQ'}{\cot CQ - \cot CQ''} = \frac{\cos \alpha' \cos \gamma - \cos \alpha \cos \gamma'}{\cos \alpha'' \cos \gamma - \cos \alpha \cos \gamma''} . \frac{\cos \gamma''}{\cos \gamma'};$$

daher hat man die folgende ziemlich einfache Bedingungs-Gleichung

$$\frac{\cos \beta' \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma'}{\cos \beta'' \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma''} = \frac{\cos \alpha' \cos \gamma - \cos \alpha \cos \gamma'}{\cos \alpha'' \cos \gamma - \cos \alpha \cos \gamma''},$$

und wenn diese erfüllt ist, so befinden sich die drei Chordal-Punkte (ABC), (A'B'C') und (A''B''C'') in Einem Hauptkreise. Diese Gleichung ist von der Länge der Seite CA und CB und von dem Winkel ACB ganz unabhängig, und drückt also, wie verlangt wurde, eine Relation bloß unter den Radien der drei Kreise aus.

§. 318.

Lehrsatz. Werden die Radien dreier Kreise (A), (B), (C) zweimal hinter einander um gleichviel verlängert oder auch verkürzt, so erhält man zwei neue Chordal-Punkte (A'B'C') und (A''B''C''), für die vergrößerten oder auch verkleinerten Kreise, welche mit dem vorigen Chordal-Punkte (ABC) sich jedesmal in Einem Hauptbogen befinden.

Beweis. Sind α, β, γ die Radien der Kreise (A), (B), (C), so sind $\alpha+\delta$, $\beta+\delta$, $\gamma+\delta$ die Radien der Kreise (A'), (B'), (C') und $\alpha+\delta'$, $\varepsilon+\delta'$, $\gamma=\delta'$ die Radien der Kreise (A''), (B''), (C'').

Setzt man aber $\alpha'=\alpha+\delta$, $\beta'=\beta+\delta$, $\gamma'=\gamma+\delta$ $\alpha''=\alpha+\delta'$, $\beta''=\beta+\delta'$ und $\gamma''=\gamma+\delta'$, so ist

$$\cos \beta' \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma' = \sin (\gamma - \beta) \sin \delta,$$
$$\cos \beta'' \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma'' = \sin (\gamma - \beta) \sin \delta',$$

$$\cos\alpha' \cos\gamma - \cos\alpha \cos\gamma' = \sin(\gamma-\alpha) \sin\delta,$$
$$\cos\alpha'' \cos\gamma - \cos\alpha \cos\gamma'' = \sin(\gamma-\alpha) \sin\delta'.$$ und also
$$\frac{\cos\beta' \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma'}{\cos\beta'' \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma''} = \frac{\cos\alpha' \cos\gamma - \cos\alpha \cos\gamma'}{\cos\alpha'' \cos\gamma - \cos\alpha \cos\gamma''} = \frac{\sin}{\sin\delta'};$$
daher liegen nach §. 315 die drei Chordal-Punkte (ABC) (A'B'C') und (A''B''C'') in Einem Hauptkreise. Die Größen δ und δ' können aber sowohl positiv, als auch negativ sein.

Zusatz. Auf gleiche Art wird bewiesen, daß wenn man aus denselben drei Mitelpunkten A, B, C Kreise mit den Radien α, β, γ; $\alpha' = \pm(\delta-\alpha)$, $\beta' = \pm(\delta-\beta)$, $\gamma' = \pm(\delta-\gamma)$ und $\alpha'' = \pm(\delta'-\alpha)$, $\beta'' = \pm(\delta'-\beta)$ und $\gamma' = \pm(\delta'+\gamma)$ beschreibt, die drei Chordal-Punkte (ABC), (A'B'C') und (A''B''C'') sich wieder jedesmal in Einem Hauptbogen befinden, es mögen δ und δ' positiv oder negativ sein. Die Vorzeichen $\pm$ sind jedesmal so zu bestimmen, daß die Ausdrücke der Radien positiv werden. Wenn also aus denselben drei Mittelpunkten Kreise beschrieben werden, so bleibt ihr Chordal-Punkt (ABC) doch immer in Einem Hauptkreise befindlich, wenn auch die Radien zweier Kreise um gleichviel in demselben Sinne, verändert werden, während der Radius des dritten Kreises um ebensoviel im entgegengesetzten Sinne verändert wird, und es ist gleichgiltig, wieviel eine solche Änderung betrage, ob sie verkürzend oder verlängernd sei.

Da Punkte als Kreise angesehen werden können, wenn der Radius eines solchen Kreises gleich Null ist, so gelten die obigen Sätze auch noch, wenn statt eines der drei Kreise ein Punkt genommen wird.

§. 319.

Lehrsatz. Haben zwei Kreise, welche außer einander enthalten sind, keinen Punkt gemein, so gibt es zwei Linien-Paare, welche gemeinschaftliche Tangenten der beiden Kreise sind, die Durchschnitts-Punkte dieser Linien-Paare befinden sich auf der Centrallinie der beiden Kreise und jeder solcher Durchschnittspunkt theilt die Centrallinie, der eine innerlich, der andere äußerlich so, daß die Sinus der Theile sich zu einander verhalten, wie die Sinus der Radien der Kreise.

Die beiden Punkte heißen Symmetral-Punkte der beiden Kreise, der eine heißt der innere, der andere der äußere Symmetral-Punkt.

Beweis. In Fig. 186 sei tT eine Tangente der beiden Kreise (m) und (M), deren Radien r und R sein mögen; die Centrallinie werde davon in dem Punkte S geschnitten. Zieht man die Radien mt=r und MT=R, so sind die Dreiecke mtS und MTS rechtwinkelig und es ist also

$\sin Sm \,.\, \sin mSt = \sin r$ und $\sin SM \,.\, \sin MST = \sin R$ und also

$$1.\quad \frac{\sin Sm}{\sin SM} = \frac{\sin r}{\sin R}.$$

Vom Punkte S aus kann offenbar noch eine zweite gemeinschaftliche Tangente der beiden Kreise (m) und (M) gezogen werden; er ist der äußere Central-Punkt der beiden Kreise.

Ist t'T' eine dritte Tangente der beiden Kreise, wovon die Centrallinie mM innerlich im Punkte S' getheilt wird, so sind auch die Dreiecke MT'S' und mt'S' rechtwinkelig, und man erhält auf ähnliche Art, wie vorhin

$$2.\quad \frac{\sin S'm}{\sin S'M} = \frac{\sin r}{\sin R}.$$

Weil endlich $\frac{\sin S'm}{\sin S'M} = \frac{\sin Sm}{\sin SM}$ ist, so ist also Sm S'M harmonisch getheilt. Die Centrallinie zweier Kreise wird also von ihren beiden Symmetral-Punkten harmonisch getheilt.

§. 320.

Zwei Kreise haben nicht immer eine solche Lage, daß zwei Paare gemeinschaftlicher Tangenten möglich sind. In Fig. 187 haben die beiden Kreise (m) und (M) eine reelle Sehne und es können nur zwei Tangenten vom Punkte S gezogen werden. In Fig. 188 haben die beiden Kreise (m) und (M) gar keine Tangente gemein. Immer aber kann die Centrallinie durch einen Punkt S äußerlich und durch einen Punkt S' innerlich so getheilt werden, daß sich die Sinus der Theile zu einander verhalten, wie die Sinus der Radien, nämlich daß

$$\frac{\sin Sm}{\sin SM} = \frac{\sin S'm}{\sin S'M} = \frac{\sin r}{\sin R}$$

ist, und die Punkte S und S' heißen immer der äußere und der innere Symmetral-Punkt, gleichviel, ob die beiden Kreise vier, drei, oder zwei, oder eine, oder endlich gar keine gemeinschaftliche Tangenten haben. Die angegebenen Figuren stellen nicht alle möglichen Fälle der Lage zweier nicht concentrischen Kreise dar.

§. 321.

Lehrsatz. Zieht man durch einen Symmetral-Punkt zweier Kreise eine Sekante derselben, so macht sie in den vier Durchschnitts-Punkten der Peripherien mit den entsprechenden Radien gleiche Winkel.

Beweis. Wird in Fig. 186, 187, 188 durch den äußeren Symmetral-Punkt S eine Sekante gezogen, welche den Kreis (m)

in a und b und den Kreis (M) in A und B schneidet, so ziehe man die Radien ma, mb, MA, MB, dann ist im Dreiecke Sma

$$\frac{\sin Sm}{\sin r} = \frac{\sin mab}{\sin mSa},$$

und im Dreiecke MSA ist $\frac{\sin SM}{\sin R} = \frac{\sin MAB}{\sin MSA}$, und da $\frac{\sin Sm}{\sin r}$ $= \frac{\sin SM}{\sin R}$ ist, so folgt, daß $\sin mab = \sin MAB$ ist, und da diese Winkel gleichartig sind, so ist

$$mab = mba = MAB = MBA.$$

Wird die Sekante durch den inneren Symmetral-Punkt S′ gezogen, so beweiset man ebenso, daß $ma'b' = mb'a' = MA'B' = MB'A'$ sei.

Zusatz 1. Legt man in Fig. 188 durch die Punkte a und A die Tangenten $a\alpha$ und $A\alpha'$, so ist $ma\alpha' = 90^0$ und $MA\alpha' = 90^0$, und da $mab = MAB$ ist, so ist also $BA\alpha' = ba\alpha$. Ähnliches kann auch von der durch S′ gehenden Sekante gezeigt werden. Die Winkel $BA\alpha'$ und $ba\alpha'$ und $ba\alpha$ sind aber die Winkel, unter welchen die Peripherien der beiden Kreise (M) und (m) von der durch S gehenden Sekante geschnitten werden. Daher hat man folgenden allgemeinen Satz: **Zieht man durch einen Symmetral-Punkt zweier Kreise eine beliebige Sehne oder Sekante, so werden die Peripherien der beiden Kreise von ihr jedesmal unter Winkeln geschnitten, welche entweder gleich sind, oder sich zu zwei Rechten ergänzen.**

Zusatz 2. Werden die Peripherien zweier Kreise von einer Sehne oder Sekante unter gleichen Winkeln geschnitten, so geht die Sekante durch einen von den beiden Symmetral-Punkten.

§. 322.

Lehrsatz. Sind in Fig. 189 Kreise (A), (B), (C) mit den Radien α, β, γ construirt, so bestimmen ihre Mittelpunkte ein Dreieck ABC in dessen jeder Seite ein innerer und ein äußerer Symmetral-Punkt liegen; diese Punkte sind a′ und a, b′ und b, c′ und c, und von ihnen liegen erstens die drei äußeren, ferner ein äußerer mit den beiden inneren auf den anderen Centrallinien jedesmal in Einem Hauptkreise; endlich schneiden sich die drei Hauptbogen, wodurch die inneren Symmetral-Punkte mit den gegenüberstehenden Mittelpunkten verbunden werden, in Einem Punkte.

Beweis. Es ist $\frac{\sin Ca'}{\sin Ba'} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$, $\frac{\sin Bc'}{\sin Ac'} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ und $\frac{\sin Ab'}{\sin Cb'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$, und werden diese drei Proportionen multiplicirt, so hat man

$$\frac{\sin Ca'}{\sin Ba'} \cdot \frac{\sin Bc'}{\sin Ac'} \cdot \frac{\sin Ab'}{\sin Cb'} = 1,$$

daher ist ABC ein Proportional Dreieck mit den P. Punkten a', b', c' und es schneiden sich also Aa', Bb' und Cc' in Einem Punkte. Da nun aber Ca'Ba, Ab'Cb, Bc'Ac harmonisch getheilt sind, so liegen erstens die drei äußeren Symmetral-Punkte a, b, c in Einem Hauptkreise; ferner a, c', b' in einem zweiten; b, a', c' in einem dritten und endlich c, b', a' in einem vierten Hauptkreise.

Zusatz. Die vier Hauptkreise abc, ac'b', ba'c', cb'a' heißen die vier Symmetralen der drei Kreise (A), (B) und (C) und zwar heißt der Hauptkreis abc, in welchem sich die drei äußeren Symmetral-Punkte der drei paarweise genommenen Kreise befinden, die äußere Symmetrale.

§. 323.

Lehrsatz. Der äußere Symmetral-Punkt zweier Kreise ist das sphärische Centrum der Chordale der beiden reciproken Kreise.

Beweis. Construirt man die Chordale zweier Kreise (m) und (M) in Fig. 190, deren Radien r und R sein mögen, so wird dadurch die Centrallinie Mm in einem Punkte O (nach §. 307) so getheilt, daß ist $\frac{\cos MO}{\cos mO} = \frac{\cos r}{\cos R}$, daher theilt die Chordale der beiden reciproken Kreise diese Centrallinie in einem Punkte O so, daß ist $\frac{\cos MO'}{\cos mO'} = \frac{\cos(90^0 - r)}{\cos(90^0 - R)}$ oder auch $\frac{\cos MO'}{\cos mO'}$ $= \frac{\sin r}{\sin R}$. Nimmt man aber im Hauptbogen MO'm, worin S' und S der innere und äußere Symmetral-Punkt der beiden Kreise sein mögen, einen Punkt x an, welcher 90^0 von O' absteht, so ist $\cos MO' = \sin MX$ und $\cos mO' = \sin mX$, also hat man

$$\frac{\sin MX}{\sin mX} = \frac{\sin r}{\sin R},$$

und da auch $\frac{\sin MS}{\sin mS} = \frac{\sin r}{\sin R}$ ist, so ist also

$$\frac{\sin MX}{\sin mX} = \frac{\sin MS}{\operatorname{siu} mS}$$ und da die Linie Mm äußerlich nur in Einem Punkte so getheilt werden kann, daß die Sinus der Theile ein gegebenes Verhältniß haben, so ist der Punkt X mit dem Punkte S einerlei und also $SO' = 90^0$; der Punkt O' ist aber der Chordal-Punkt der beiden reciproken Kreise, während S der äußere Symmetral-Punkt der beiden gegebenen Kreise selbst ist. Daher ist

S das Centrum der Chordale der beiden reciproken Kreise, denn diese Chordale steht in O' auf dem Radius SO' senkrecht.

§. 324.

Lehrsatz. Sind drei Kreise (A), (B), (C) gegeben, so hat ihre äußere Symmetrale zum sphärischen Centrum den Chordal-Punkt der drei reciproken Kreise.

Beweis. Es sei S der äußere Symmetral-Punkt der beiden Kreise (A) und (B); S' der äußere Symmetral-Punkt der beiden Kreise (A) und (B); S'' der Symmetral-Punkt der Kreise (B) und (C); die reciproken Kreise seien (a), (b) und (c); dann ist nach §. 323 der Punkt S das Centrum der Chordale (ab); S' das Centrum der Chordale (ac), und S'' das Centrum der Chordale (bc), und da diese drei Mittelpunkte nach §. 322 in Einem Hauptkreise liegen, so schneiden sich die genannten Chordalen in dem Chordal-Punkte (abc), welcher das Centrum der äußeren Symmetrale SS'S'' ist.

Zusatz. Der vorstehende Satz kann auch also ausgedrückt werden: **der Chordal-Punkt dreier Kreise ist das sphärische Centrum der äußeren Symmetrale der drei reciproken Kreise.**

§. 325.

Construirt man in Fig. 191 zum Dreiecke ABC, aus dessen Ecken die Kreise (A), (B), (C) beschrieben sind, die drei Nebendreiecke CBA', ACB' und ABC' und beschreibt aus den Mittelpunkten A', B', C' noch die Gegenkreise (A'), (B'), (C') von (A), (B), (C), so hat man ein System von sechs Kreisen, deren reciproke Kreise (α), (β), (γ), (α'), (β'), (γ') sein mögen, so daß also A auch das Centrum von (α), C von (β), C von (γ), A' von (α'), B' von (β') und C' von (γ') ist.

Ist nun o der Chordalpunkt (αβγ), o' der Chordalpunkt (α'βγ), o'' der Chordalpunkt (αβ'γ) und o''' der Chordalpunkt (αβγ') ist; sind ferner a, b, c, wie im §. 322 die äußeren, a', b', c' die drei inneren Symmetral-Punkte der Kreise (A), (B), (C); sind endlich a'', b'', c'' die Gegen-Punkte von a, b, c, so ist nach §. 324 o das Centrum der Symmetrale, worin die Punkte a, b'', c, a'', b, c'' liegen; ebenso ist aber auch o' das Centrum der Symmetrale, worin die Punkte a, c', b', a'' liegen; o'' das Centrum der Symmetrale, worin die Punkte b'', c', a', b liegen und o''' das Centrum der Symmetrale, worin die Punkte c, b', a', c'' liegen. Hiermit ist aber für jede der vier Symmetralen das sphärische Centrum nachgewiesen.

§. 326.

Drei Kreise (A), (B), (C) können im Allgemeinen eine solche Lage haben, daß acht neue Kreise möglich sind, von denen ein jeder

die drei gegebenen Kreise berührt. In Fig. 192 berührt der Kreis (m) die drei gegebenen Kreise, indem er sie alle drei ausschließt, der Kreis (m') berührt auch die drei gegebenen Kreise, indem er sie umschließt, der Kreis (a) berührt den Kreis (A) einschließend und die Kreise (B) und (C) ausschließend, der Kreis (a') berührt den Kreis A ausschließend und die Kreise (B) und (C) einschließend; der Kreis (b) berührt den Kreis (B) einschließend und die Kreise (A) und (C) ausschließend; der Kreis (b') berührt den Kreis (B) ausschließend, und die Kreise (A) und (C) einschließend; der Kreis (c) berührt den Kreis (C) einschließend und die Kreise (A) und (B) ausschließend; der Kreis (c') berührt den Kreis (C) ausschließend und die Kreise (A) und (B) einschließend. Die drei Kreise (A), (B), (C) können aber offenbar eine solche Lage haben, daß sogar nur einer oder endlich gar keiner von den vorhin genannten acht Kreisen sie sämmtlich berühren kann.

§. 327.

Lehrsatz. Die Mittelpunkte von zwei Kreisen (m) und (m'), wovon der eine drei gegebene Kreise (A), (B), (C) einschließend, der andere ausschließend berührt, liegen auf einem Hauptkreise, welcher durch den Chordal-Punkt der drei gegebenen Kreise geht, und auf ihrer äußeren Symmetrale senkrecht steht.

Beweis. In Fig. 192 seien α, β, γ die Radien der drei gegebenen Kreise (A), (B), (C); x und x' seien die Radien der Kreise (m) und (m'); beschreibt man nun aus den Mittelpunkten A, B, C drei neue Kreise mit den Radien $\alpha + x$, $\beta + x$, $\gamma + x$, so schneiden sich diese drei Kreise im Punkte m und es ist also m der Chordal-Punkt dieser drei Kreise; beschreibt man ebenso aus denselben Mittelpunkten drei neue Kreise mit den Radien $x' + \alpha$, $x' + \beta$, $x' + \gamma$, so schneiden sich diese drei Kreise im Punkte m', welcher also ihr Chordal-Punkt ist, beschreibt man endlich noch aus diesen Mittelpunkten drei Kreise mit den Radien $(90^0 - \alpha)$, $(90^0 - \beta)$, $90^0 - \gamma)$, so mag der Chordal-Punkt dieser drei Kreise o heißen, und nach §. 316 liegen diese drei Punkte m, m', o mit dem Chordal-Punkte (ABC) der drei gegebenen Kreise in Einem Hauptkreise; da nun aber o der Chordal-Punkt der drei reciproken Kreise und also nach §. 324 das Centrum der äußeren Symmetrale der drei gegebenen Kreise ist, so steht also der Hauptkreis mm'o auf dieser Symmetrale senkrecht, weil er ihr sphärisches Centrum enthält. Bezeichnet man also den Chordal-Punkt (ABC) mit O, so liegen die drei Punkte m, m', O in einem Hauptkreise, welcher die äußere Symmetrale der drei gegebenen Kreise unter rechten Winkeln schneidet, und in welchem sich noch unzählige andere Chordal-Punkte von je drei Kreisen befinden, welche aus den Mittelpunkten A, B, C mit den Ra-

dien $\alpha+\delta$, $\beta+\delta$, $\gamma+\delta$, oder auch mit den Radien $\delta-\alpha$, $\delta-\beta$, $\delta-\gamma$ beschrieben sind, wobei δ eine willkürliche Länge haben darf.

§. 328.

Wenn in Fig. 192 jetzt die Radien der Kreise a und a' mit x uud x' bezeichnet werden, und man aus den Mittelpunkten A, B, C Kreise mit den Radien $x-\alpha$, $x+\beta$, $x+\gamma$ beschreibt, so schneiden sie sich im Punkte a, welcher der Chordal-Punkt dieser Kreise ist; beschreibt man aus denselben Mittelpunkten Kreise mit den Radien $x'+\alpha$, $x'-\beta$, $x'-\gamma$, so schneiden sie sich im Punkte a', welcher der Chordal-Punkt dieser drei Kreise ist; beschreibt man endlich aus den genannten Mittelpunkten Kreise mit den Radien $90^0+\alpha$, $90^0-\beta$, $90^0-\gamma$, so kann der erste Kreis auch aus dem Gegenpunkte von A mit dem Radius $90^0-\alpha$ beschrieben werden, und wenn der Chordal-Punkt dieser drei Kreise, wie im §. 325 mit o' bezeichnet wird, so liegt der Chordal-Punkt (ABC) oder O mit den Punkten a, a' und o' nach dem Zusatze zu §. 318 in Einem Hauptkreise.

Nun ist aber o' nach §. 325 das Centrum des Hauptkreises, worin sich der äußere Symmetral-Punkt der Kreise B und C, ferner der innere Symmetral-Punkt der Kreise (A) und (C) und der innere Symmetral-Punkt der Kreise (A) und (B) befinden. Daher ist der Hauptkreis Oaa'o' senkrecht auf dieser inneren Symmetrale.

In demselben Hauptkreise Oaa' befinden sich unzählige Chordal-Punkte von je drei Kreisen, welche aus den Mittelpunkten A, B, C mit den Radien $\delta-\alpha$, $\delta+\beta$, $\delta+\gamma$ oder $\delta+\alpha$, $\delta-\beta$, $\delta-\gamma$ beschrieben sind, wobei δ eine beliebige Länge haben kann.

Ebenso wird bewiesen, daß der Chordal-Punkt O oder (ABC) mit den Punkten b und b' in Einem Hauptkreise liegt, welcher senkrecht steht auf einer inneren Symmetrale, worin der äußere Symmetral-Punkt der beiden Kreise (A) und (C), der innere von den Kreisen (B) und (A) und der innere von den Kreisen (B) und (C) sich befindet. Ferner liegen im Hauptkreise Obb' die Chordal-Punkte unzähliger Kreise, welche aus den Mittelpunkten A, B, C mit den Radien $\delta+\alpha$, $\delta-\beta$, $\delta+\gamma$ oder $\delta-\alpha$, $\delta+\beta$ und $\delta-\gamma$ beschrieben sind.

Endlich zeigt man noch ebenso, daß der Chordal-Punkt O mit den Mittelpunkten c und c' in Einem Hauptkreise liegt, welcher die dritte innere Symmetrale rechtwinkelig schneidet, nämlich die, in welcher sich der äußere Symmetral-Punkt der beiden Kreise (A) und (B), der innere Symmetral-Punkt der Kreise (A) und (C) und innere Symmetral-Punkt der Kreise (B) und (C) befindet.

Im Hauptkreise Occ' befinden sich endlich noch unzählige Chordal-Punkte von je drei Kreisen, welche aus den Mittelpunkten A, B, C mit den Radien $\delta+\alpha$, $\delta+\beta$ und $\delta-\gamma$ oder auch mit den Radien $\delta-\alpha$, $\delta-\beta$, $\delta+\gamma$ beschrieben sind. Schließlich verdient

angemerkt zu werden, daß sich die vier Linien aa', bb', cc', nm', wovon jede auf einer der vier Symmetralen der drei Kreise (A), (B), (C) senkrecht steht, in Einem Punkte O schneiden, nämlich im Chordal-Punkte dieser drei Kreise.

Hiermit sind aber die Centrallinien der vier Paare von Kreisen construirt, wovon drei gegebene Kreise berührt werden, und zwar jeder als der geometrische Ort unendlich vieler Chordal-Punkte von je drei Kreisen.

§. 329.

Aufgabe. Man soll eine Bedingung unten den Radien von Kreisen finden, die aus denselben drei Mittelpunkten A, B, C beschrieben sind, wenn die Symmetralen dieser Kreise sich in Einem Punkte schneiden sollen.

Aus A seien Kreise (A), (A'), (A'') mit den Radien α, α', α'', aus B seien die Kreise (B), (B'), (B'') mit den Radien β, β', β'' und aus C die Kreise (C), (C'), (C'') mit den Radien γ, γ', γ'' beschrieben. Die äußere Symmetrale der drei Kreise (A), (B), (C) hat nun nach §. 324 zum sphärischen Centrum den Chordal-Punkt der drei reciproken Kreise, die also mit den Radien $90^\circ-\alpha$, $90^\circ-\beta$, $90^\circ-\gamma$ beschrieben sind; die äußere Symmetrale der Kreise (A'), (B'), (C') hat ebenso zum Centrum den Chordal-Punkt der reciproken Kreise, deren Radien $90^\circ-\alpha'$, $90^\circ-\beta'$, $90^\circ-\gamma'$ sind, und die äußere Symmetrale der Kreise (A''), (B''), (C'') hat endlich zum Centrum den Chordal-Punkt der reciproken Kreise, deren Radien $90^\circ-\alpha''$, $90^\circ-\beta''$, $90^\circ-\gamma''$ sind; wenn nun diese drei Chordal-Punkte in Einem Hauptkreise liegen, so schneiden sich jene drei Symmetralen in Einem Punkte. Nach §. 317 liegen aber jene drei Chordal-Punkte in Einem Hauptkreise, wenn dieselbe Relation, wie im §. 317, unter den Complementen der Radien Statt findet; daher hat man die gesuchte Bedingungs-Gleichung

$$\frac{\sin\beta' \sin\gamma - \sin\beta \sin\gamma'}{\sin\beta'' \sin\gamma - \sin\beta \sin\gamma''} = \frac{\sin\alpha' \sin\gamma - \sin\alpha \sin\gamma'}{\sin\alpha'' \sin\gamma - \sin\alpha \sin\gamma''},$$

und wenn diese erfüllt ist, so schneiden sich die äußeren Symmetrale der Kreise (A), (B), (C), die äußeren Symmetrale der Kreise (A'), (B'), (C') und die äußeren Symmetrale der Kreise (A''), (B''), (C'') in Einem Punkte.

Dieselbe Bedingungs-Gleichung erhält man aber auch für die gleichliegenden inneren Symmetralen.

Zusatz. Aus der erhaltenen Bedingungs-Gleichung können ähnliche Resultate, wie im §. 318, §. 327 und §. 328 hergeleitet werden.

§. 330.

Hülfssatz. Wenn auf einem Hauptbogen AB zwei Fig. 193 andere Aa und Bb senkrecht stehen, so läßt sich die Entfernung ab ihrer Endpunkte auf folgende Art finden. Man verlängere Aa und Bb, bis sie sich im Punkte P schneiden, dann ist P das Centrum von AB, und also $PA = PB = 90^0$, auch ist AB das Maß des Winkels P. Ferner gilt von dem Dreiecke Pab die Formel

$$\cos ab = \cos Pa \,.\, \cos Pb + \sin Pa \,.\, \sin Pb \,.\, \cos P,$$

daher hat man auch $\cos ab = \sin Aa . \sin Bb + \cos Aa . \cos Bb . \cos AB.$

Wenn die Perpendikel Aa' und Bb auf entgegengesetzten Seiten von AB stehen, dann gilt von dem Dreiecke Pa'b

$$\cos a'b = \cos Pa' \cos Pb + \sin Pa' \sin Pb \cos P,$$

und da nun $\cos Pa' = -\sin Aa'$, $\sin Pa' = \cos Aa'$ ist, so hat man nun

$$\cos a'b = -\sin Aa' \,.\, \sin Bb + \cos Aa' \,.\, \cos Bb. \cos AB.$$

§. 331.

Lehrsatz. Wenn ein Kreis zwei andere berührt, und man von seinem Centrum ein Loth auf ihre Chordale fällt, so ist das Verhältniß zwischen dem Sinus dieses Lothes und dem Sinus des Radius des berührenden Kreises für alle Lagen desselben von gleicher Größe.

Beweis. In Fig. 194 werden die Kreise (M) und (M'), deren Radien R und R' sein mögen, von einem dritten Kreise (C), dessen Radius r sei, in den Punkten A und A' berührt; vom Mittelpunkte C sei ferner das Loth $Cc = d$ auf die Chordale PQ der beiden Kreise (M) und (M') gefället.

Man ziehe die Centrallinien MM', wovon die Chordale PQ in O getroffen werde; ferner MC und M'C, welche also durch die Berührungs-Punkte A und A' gehen; dann ist $CM = R - r$ und $CM' = R' + r$; setzt man ferner $Oc = c$, $OM = D$, $OM' = D'$, so ist

$$\cos (R - r) = \sin D \sin d + \cos D \cos d \cos c \text{ und}$$
$$\cos (R' + r) = -\sin D' \sin d + \cos D' \cos d \cos c.$$

Weil nun aber O der Chordal-Punkt der beiden Kreise (M) und (M') ist, so hat man $\dfrac{\cos MO}{\cos M'O} = \dfrac{\cos R}{\cos R'}$ oder $\cos D . \cos R' = \cos D' \cos R$; wenn man also die erste der beiden vorigen Gleichungen mit cos R' und die zweite mit cos R multiplicirt, so hat man durch Subtraction

$$\cos (R - r) \cos R' - \cos (R' + r) \cos R$$
$$= \sin D \sin d \cos R' + \sin D' \sin d \cos R.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist $= \sin (R + R') \sin r$, daher hat man

$$\frac{\sin(R+R')}{\sin D\cos R' + \sin D'\cos R} = \frac{\sin d}{\sin r} \text{ oder auch}$$

$$\frac{\sin d}{\sin r} = \frac{\sin(R+R')}{\sin(D+D')} \cdot \frac{\cos D}{\cos R}.$$

Welche Lage also auch immer der Kreis (C) erhalten mag, so ist das Verhältniß $\frac{\sin d}{\sin r}$ immer dasselbe, wenn der Kreis (C) nur die beiden Kreise ungleichartig berührt.

Zusatz. Wenn der Kreis (C') die beiden Kreise äußerlich in B und B' berührt, und man wieder das Loth C'c' auf die Chordale PQ fällt, so hat man, wenn wieder Oc' = c gesetzt wird,

$$\cos(R+r) = -\sin D . \sin d + \cos D \cos d \cos c$$
$$\cos(R'+r) = +\sin D' . \sin d + \cos D' \cos d \cos c$$

und man erhält $\cos(R'+r)\cos R - \cos(R+r)\cos R' = (+\sin D' \cos R + \sin D \cos R')\sin d$ oder auch

$$\frac{\sin d}{\sin r} = \frac{\sin(R-R')}{\sin(D+D')} \cdot \frac{\cos R}{\cos D}.$$

§. 332.

Lehrsatz. Wenn zwei Kreise (A) und (B) in Fig. 195 zwei andere Kreise (M) und (M') berühren, so liegt jedesmal ein leicht zu bestimmender Symmetral-Punkt der beiden ersten Kreise auf der Chordale der beiden anderen Kreise.

Beweis. Sind wieder R und R' die Radien der beiden Kreise (M) und (M), LM = D und LM' = D', und wird ihre Chordale PQ von der Centrallinie AB im Punkte N geschnitten, so lasse man noch die Perpendikel Aa = a und Bb = b auf PQ, dann ist, wenn die Radien der Kreise (A) und (B) mit α und β bezeichnet werden, nach §. 331

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin(R+R')}{\sin(D+D')} \cdot \frac{\cos D}{\cos R} \text{ und}$$

$$\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin(R+R')}{\sin(D+D')} \cdot \frac{\cos D}{\cos R}.$$

Also ist $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}$. Nun ist aber $\frac{\sin Aa}{\sin Bb} = \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin NA}{\sin NB}$, also hat man $\frac{\sin NA}{\sin NB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$; daher ist N der äußere Symmetral-Punkt der beiden Kreise (A) und (B).

Wird statt des Kreises (B) der Kreis (D) genommen, so beweiset man auf ähnliche Art, daß der innere Symmetral-Punkt S der beiden Kreise A und D sich in der Chordale PQ der Kreise (M) und (M') befinde, wenn (D) diese beiden Kreise berührt.

Zusatz 1. Werden die Kreise (A), (B), (C) von den Kreisen (M) und (M') berührt, so befinden sich die drei äußeren Symmetral-Punkte der drei ersten paarweise genommenen Kreise in einem Hauptkreise, nämlich in ihrer äußeren Symmetrale, und da dieselben drei äußeren Symmetral-Punkte sich auch in der Chordale PQ der Kreise (M) und (M') dem vorhin Bewiesenen gemäß befinden, so ist also die Chordale PQ dieser Kreise mit der äußern Symmetrale der drei Kreise (A) (B), und (C) einerlei. Bei einer anderen Berührung kann eine innere Symmetrale mit der Chordale der beiden Kreise (M) und (M') einerlei sein.

Zusatz 2. **Drei Kreise (A), (B), (C) können nach §. 326 im Allgemeinen von vier Paaren neuer Kreise berührt werden, und die Chordalen dieser vier Paare sind also nach dem vorigen Zusatze mit den vier Symmetralen der drei Kreise (A), (B), (C) einerlei.**

Zusatz 3. Weil umgekehrt auch die Kreise (A) und (B) von den Kreisen (M) und (M') berührt werden, so befindet sich ein Symmetral-Punkt dieser Kreise auf der Chordale pq. Wird die Centrale MM' von pq in O geschnitten, so ist also O ein Symmetral-Punkt der beiden Kreise (M) und (M'), und zwar in der Figur der innere Symmetral-Punkt. Ebenso wird auch die Chordale der Kreise (A) und (D) durch den Chordal-Punkt O gehen. Hierdurch sind aber die Sätze im §. 327 und §. 328 noch näher bestimmt.

§. 333.

Werden mehrere Kreise (A), (B), (C), (D) etc. von zwei anderen Kreisen (M) und (M') berührt, und zwar dem einen einschließend, von dem anderen ausschließend, so schneiden sich die Berührungs-Sehnen jener Kreise und auch ihre Chordalen in Einem Punkte, dem inneren Symmetral-Punkte der beiden Kreise (M) und (M').

Beweis. Wird der Kreis (A) in Fig. 195 von den Kreisen (M) und (M') in den Punkten o und o' berührt und legt man durch die Punkte o und o' die Tangenten oT und o'T, so ist oT die Chordale der beiden Kreise (A) und (M), und o'T die Chordale der Kreise (A) und (M'), und da PQ die Chordale von (M) und (M') ist, so schneiden sich diese drei Chordalen in Einem Punkte T, dem Chordal-Punkte (AMM'). Insofern nun oT und o'T Tangenten des Kreises (A) sind, sind sie gleich und also auch die Winkel Too' und To'o; weil aber oT und o'T auch Tangenten der Kreise (M) und (M') sind, schneidet also die Sehne oo' die beiden zuletzt genannten Kreise unter gleichen Winkeln; daher geht die Seh-

ne oo' nach dem Zusatze 2 zu §. 321 durch einen Symmetral-Punkt der Kreise (M) und (M') und zwar in der Figur durch den inneren Symmetral-Punkt O der Kreise (M) und (M'). Ein Gleiches gilt aber auch von den Berührungssehnen der übrigen Kreise (B), (C), (D), u. s. w.

Anmerkung. Die vorhergehenden Lehrsätze reichen hin, um die sogenannten Appollonischen Aufgaben aufzulösen, welche im Früheren nicht schon aufgelöset worden sind, und welche immer darauf hinaus kommen, einen Kreis zu construiren, welcher drei gegebene Kreise berührt. Unter diesen Kreisen dürfen auch Hauptkreise vorkommen, auch können einer, oder zwei oder alle drei Kreise sich bloß auf Punkte reducirt haben. Die letzte Aufgabe und die, in welcher drei Hauptkreise gegeben sind, sind schon aufgelöset worden und es bleiben daher von den Aufgaben dieser Art nur noch acht aufzulösen übrig.

Diese Auflösungen selbst übergehen wir hier der Kürze wegen, weil sie zusehr mit den analogen planimetrischen übereinstimmen, welche der Herr Prof. Plücker in seinem analitisch-geometrischen Entwickelungen angegeben hat.

§. 334.

Lehrsatz. Zieht man durch einen Punkt innerhalb oder außerhalb eines Kreises (in Fig. 196) eine Sehne AB, und halbirt man die Stücke VA und VB durch a und b, um in ihnen die Perpendikel bβ und aα zu errichten, welche von den Tangenten der Punkte A und B in α und β getroffen werden, so befinden sich die Punkte α und β jedesmal in Einem unveränderlichen Hauptkreise PQ, welcher auf der von V aus durch den Mittelpunkt gehenden Sehne senkrecht steht.

Beweis. Um abzukürzen, kehren wir den Satz um, indem wir annehmen, daß PQ die Chordale für den Punkt V und den Kreis sei; auch nehmen wir in PQ willkürlich den Punkt β an, um von ihm aus die Tangente βB zu ziehen, wird dann noch VAB und βb darauf senkrecht gefällt, so ist nach §. 314 Vβ = Bβ und QβB ein gleichschenkeliges Dreiecks, welches durch das Loth bβ in zwei symmetrische getheilt wird. Daher ist b die Mitte von VB; ebenso wird gezeigt, daß a die Mitte von VA sei.

Zusatz 1. Jede von V aus an den Kreis gezogene Tangente VM oder VN wird von $\alpha\beta$ halbirt. Da nämlich $\alpha\beta$ die Chordale für den Punkt V und den Kreis ist, so ist nach §. 314 mM = mV und nN = nV.

Zusatz 2. Da Va = $\frac{1}{2}$ VA und Vb = $\frac{1}{2}$ VB ist, so ist ab = $\frac{1}{2}$ AB.

Zusatz 3. Zieht man von einem Punkte V aus zwei Tangenten, so ist ein Hauptbogen mn, welcher die beiden Tangenten halbirt, die Chordale für den Punkt V und den Kreis.

Zusatz 4. Es ist $\operatorname{tng} \frac{1}{2} VN = \sqrt{\operatorname{tng} \frac{1}{2} VA \operatorname{tng} \frac{1}{2} VB}$ und also $\operatorname{tng} Vn^2 = \operatorname{tng} Va \,.\, \operatorname{tng} Vb$; beschreibt man also aus V einen Kreis mit dem Radius Vn, welcher VAB in μ und ν schneiden mag, so ist immer $\mu a \nu b$ harmonisch getheilt.

§. 335.

Wenn man in Fig. 197 von einem beliebigen Punkte V außerhalb des Kreises nach einem festen Punkte O seiner Peripherie einen Hauptbogen zieht, und in seiner Mitte b ein Perpendikel $b\beta$ auf VO errichtet, so wird es von einem Hauptbogen mn, welcher die beiden aus V gezogenen Tangenten VM und VN halbirt im Punkte β jedesmal auf einem festen Hauptkreise, der Tangente des Punktes O, geschnitten.

Beweis. Da nach Zusatz 3. zu §. 334 mn die Chordale für den Punkt V und den Kreis ist, wovon die Tangente POQ in β geschnitten werden mag, so ist, wenn noch $V\beta$ gezogen wird, $V\beta = O\beta$ und also $V\beta O$ ein gleichschenkeliges Dreieck; dieses wird aber durch ein Loth βb in zwei symmetrische getheilt, also ist $Vb = Ob$; im Punkte b kann aber nur ein Perpendikel auf VO errichtet werden.

§. 336.

Lehrsatz. Sind zwei feste Punkte V und W in Fig. 198 gegeben, so kann man einen beliebigen Kreis, der jene Punkte nicht umschließt, und von ihnen aus zwei Tangenten-Paare VM, VM und VN, VN an den Kreis ziehen; die beiden Hauptbogen mm und nn, wodurch die Tangenten eines jeden Paares halbirt werden, schneiden sich dann, wie immer auch der Kreis construirt wird, auf einem festen Hauptkreise PQ, welcher die Linie VW senkrecht halbirt.

Beweis. Es ist mm die Chorale für den Punkt V und den Kreis, nn die Chordale für den Punkt W und den Kreis, und PQ ist die Chordale für die beiden Punkte V und W, und diese drei Chordalen schneiden sich jedesmal in Einem Punkte α.

Man kann aber auch, wenn sich mm und nn in α schneiden, $V\alpha$ und $W\alpha$ ziehen, welche $= VM = WN$ sind und im gleichschenkeligen Dreiecke $V\alpha W$ ein Loth αU auf VW fällen, wodurch VW halbirt wird.

§. 337.

Aufgabe. Wenn sich Fig. 199 zwei Kreise (M) und (M'), deren Radien r und r' sein mögen, in einem Punkte A ihrer Peripherie, und zwei andere Kreise (m) und (m'), deren Radien ϱ und ϱ' sein mögen, und welche sich ebenfalls berühren, von jenen Kreisen ungleichartig berührt werden, so kann man die Perpendikel $mn = z$ und

$m'n' = z'$ auf die Centrallinie AMM'BC fällen, und es soll der Zusammenhang unter den Größen z, z', ϱ, ϱ' ermittelt werden.

Es sei $An = \alpha$ und $An' = \alpha$; zieht man ferner die Centrale Mm, so ist $Mm = r + \varrho$ und also

1. $\cos(r + \varrho) = \cos z \cos(r - \alpha)$ und ebenso
2. $\cos(r' + \varrho) = \cos z' \cos(\alpha' - r)$;

zieht man die Centrale M'm, so ist $M'm = r' - \varrho$ und also

3. $\cos(r' - \varrho) = \cos z \cos(r' - \alpha)$, und ebenso
4. $\cos(r' - \varrho') = \cos z' \cos(r' - \alpha')$.

Weil sich endlich die Kreise (m) und (m') berühren, so hat man

5. $\cos(\varrho + \varrho') = \sin z \sin z' + \cos z \cos z' \cos(\alpha' - \alpha)$.

Aus den beiden ersten Gleichungen findet man durch Elimination von r die Gleichung

$$\frac{\cos \varrho - \cos z \cos \alpha}{\cos \varrho' - \cos z' \cos \alpha'} = \frac{\sin \varrho + \cos z \sin \alpha}{\sin \varrho' + \cos z' \sin \alpha'},$$

und aus den beiden anderen Gleichungen erhält man durch Elimination von r' die Gleichung

$$\frac{\cos \varrho - \cos z \cos \alpha}{\cos \varrho' - \cos z' \cos \alpha'} = \frac{\cos z \sin \alpha - \sin \varrho}{\cos z' \sin \alpha' - \sin \varrho'},$$

woraus noch folgt $\dfrac{\sin \varrho + \cos z \sin \alpha}{\sin \varrho' + \cos z' \sin \alpha'} = \dfrac{\cos z \sin \alpha - \sin \varrho}{\cos z' \sin \alpha' - \sin \varrho'}$,
und diese Gleichung läßt sich zusammenziehen auf

6. $$\frac{\cos z \sin \alpha}{\sin \varrho} = \frac{\cos z' \cdot \sin \alpha'}{\sin \varrho'},$$

sie gilt immer, wenn sich auch die Kreise (m) und (m') nicht berühren, da die Gleichung (5) zu ihrer Herleitung nicht benutzt worden ist. Ferner erhält man noch aus den beiden vorigen Gleichungen $\sin \varrho' (\cos \varrho - \cos z \cos \alpha) = \sin \varrho (\cos \varrho' - \cos z' \cos \alpha')$ oder

7. $$\frac{\cos \varrho - \cos z \cos \alpha}{\sin \varrho} = \frac{\cos \varrho' - \cos z' \cos \alpha'}{\sin \varrho'}.$$

Diese Gleichung, welche sich auch umformen läßt in

$$\sin(\varrho' - \varrho) = \sin \varrho' \cos z \cos \alpha - \sin \varrho \cos z' \cos \alpha'$$

gilt ebenfalls immer, wenn sich auch die Kreise (m) und (m') nicht berühren. Verbindet man damit die Gleichung $0 = \sin \varrho' \cos z \sin \alpha - \sin \varrho \cos z' \sin \alpha'$, indem man jene mit $\cos \alpha$ und diese mit $\sin \alpha$ multiplicirt, so hat man

8. $\sin(\varrho' - \varrho) \cos \alpha = \sin \varrho' \cos z - \sin \varrho \cos z' \cos(\alpha' - \alpha)$.

Multiplicirt man aber jene mit $\sin \alpha$ und diese mit $\cos \alpha$, so hat man

9. $\sin(\varrho' - \varrho) \sin \alpha = \sin \varrho \cos z' \sin(\alpha' - \alpha)$.

Werden endlich diese beiden Gleichungen quadrirt und dann addirt, so erhält man

10. $\sin(\varrho'-\varrho)^2 = \sin\varrho'^2 \cos z^2 - 2\sin\varrho \sin\varrho' \cos z\,.\, \cos z' \cos(\alpha'-\alpha) + \sin\varrho^2 \cos z'^2.$

Da nun aber nach der Formel (5) ist $\cos z \cos z' \cos(\alpha'-\alpha) = \cos(\varrho+\varrho') - \sin z \sin z'$ ist, so erhält man weiter

$$\sin(\varrho'-\varrho)^2 = \sin\varrho'^2 \cos z^2 - 2\sin\varrho \sin\varrho' \cos(\varrho+\varrho') + 2\sin\varrho \sin\varrho' \sin z \sin z' + \sin\varrho^2 \cos z'^2.$$

Weil ferner $\sin(\varrho'-\varrho)^2 + 2\sin\varrho \sin\varrho' \cos(\varrho+\varrho') = \sin\varrho'^2 - 4\sin\varrho^2 \sin\varrho'^2 + \sin\varrho^2$ ist, so hat man

$$\sin\varrho'^2 \sin z^2 - 2\sin\varrho \sin\varrho' \sin z \sin z' + \sin\varrho^2 \sin z'^2 = 4\sin\varrho^2 \sin\varrho'^2;$$

wenn auf beiden Seiten die Quadrat-Wurzel ausgezogen wird, so ist

$$\sin\varrho' \sin z - \sin\varrho \sin z' = \pm 2 \sin\varrho \sin\varrho'$$ oder

$$\frac{\sin z}{\sin\varrho} = \frac{\sin z'}{\sin\varrho'} \pm 2.$$

Für den Kreis (m) ist aber offenbar $\frac{\sin z}{\sin r}$ größer als der Quotient $\frac{\sin z'}{\sin\varrho'}$ für den Kreis m'; daher ist das Vorzeichen + anzuwenden; mithin

$$\frac{\sin z}{\sin\varrho} = \frac{\sin z'}{\sin\varrho'} + 2.$$

Anmerkung. Daß diese Formel, deren analoge planimetrische schon von Pappus ein alter Satz genannt wird, auf der Kugel gelte, ist zuerst vom Herrn Steiner gefunden worden, welcher sie im zweiten Bande (S. 190) des Journales für die reine und angewandte Mathematik von A. L. Crelle ohne Beweis mitgetheilt hat.

Man kann nun eine ganze Reihe von Kreisen (m), (m'), (m''), etc. construiren, deren jeder vom nächstfolgenden und von den beiden Kreisen (M) und (M') berührt wird, und aus dem bekannten Werthe des Verhältnisses $\frac{\sin z}{\sin\varrho}$ für einen solchen Kreis läßt sich also der Werth eines solchen Verhältnisses für den letzten Kreis finden.

§. 338.

Setzt man in Fig. 199 Mm = l und M'm = 2a − l, so ist $2a = r + r'$ und setzt man ferner Mn = x und M'n = 2e − x, so ist $2e = r' - r$. Ferner hat man offenbar

$$\frac{\cos(2a-l)}{\cos l} = \frac{\cos(2e-x)}{\cos x},$$

und hieraus folgt $\cos 2a + \sin 2a \operatorname{tng} l = \cos 2e + \sin 2e \operatorname{tng} x$. Bezeichnet man nun den Winkel CMm mit v und CMm' mit v',

so ist $\operatorname{tng} x = \operatorname{tng} l \cos v$ und also $\cos 2a + \sin 2a \operatorname{tng} l = \cos 2e + \sin 2e \operatorname{tng} l \cos v$ oder

$$\operatorname{tng} l = \frac{\cos 2e - \cos 2a}{\sin 2a - \sin 2e \cos v},$$

oder $$\cot l = \frac{\sin 2a - \sin 2e \cos v}{\cos 2e - \cos 2a}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch also schreiben:

$$\cot l = \frac{\sin 2a\,(\cos \tfrac{1}{2} v^2 + \sin \tfrac{1}{2} v^2) - \sin 2e\,(\cos \tfrac{1}{2} v^2 - \sin \tfrac{1}{2} v^2)}{\cos 2e - \cos 2a}$$

oder $$\cot l = \frac{(\sin 2a - \sin 2e) \cos \tfrac{1}{2} v^2 + (\sin 2a + \sin 2e) \sin \tfrac{1}{2} v^2}{\cos 2e - \cos 2a},$$

und es ist also

$$\cos l = \frac{\sin (a-e) \cos (a+e) \cos \tfrac{1}{2} v^2 + \sin (a+e) \cos (a-e) \sin \tfrac{1}{2} v^2}{\sin (a-e) \,.\, \sin (a+e)}$$

oder endlich

$$\cot l = \cot (a+e) \cos \tfrac{1}{2} v^2 + \cot (a-e) \sin \tfrac{1}{2} v^2,$$

und da $l = r + \varrho$, $a + e = r'$, $a - e = r$ ist, so kann man auch setzen

$$\cot (r+\varrho) = \cot r' \cos \tfrac{1}{2} v^2 + \cot r \sin \tfrac{1}{2} v^2.$$

Da nun aber $\sin (r+\varrho) \,.\, \sin v = \sin z$ ist, so erhält man durch die Multiplication dieser Gleichungen $\cos (r + \varrho) = (\cot r' \cos \tfrac{1}{2} v^2 + \cot r \sin \tfrac{1}{2} v^2) \,.\, \dfrac{\sin z}{\sin v}$.

Da weiter $\sin \varrho = \sin (r + \varrho) \cos - r \cos (r + \varrho) \sin r$ ist, so hat man also

$$\sin \varrho = [\cos r - (\cot r' \cos \tfrac{1}{2} v^2 + \cot r \sin \tfrac{1}{2} v^2) \sin r] \,.\, \frac{\sin z}{\sin v}$$ oder endlich

$$1. \quad \frac{\sin \varrho}{\sin z} = \frac{\sin (r' - r)}{2 \sin r'} \cdot \cot \tfrac{1}{2} v,$$

Um diese Formel in die des §. 335 zu setzen, kehren wir sie um; dann ist

$$\frac{\sin z}{\sin \varrho} = \frac{2 \sin r'}{\sin (r' - r)} \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} v$$ und ebenso

$$\frac{\sin z'}{\sin \varrho'} = \frac{2 \sin r'}{\sin (r' - r)} \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} v',$$

und werden diese Ausdrücke wirklich substituirt, so hat man

$$2. \quad \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} v = \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} v' + \frac{\sin (r' - r)}{\sin r'}.$$

Anmerkung. Die Mittelpunkte m, m', m'', etc. befinden sich auf dem Umfange eines Kegelschnitts, und die Schenkel Mm,

Mm′, Mm″, etc. der Winkel v, v′, v″, etc., welche nach dem durch die gefundene einfache Formel ausgedrückten Gesetze auf einander folgen, bestimmen durch die Einschnitte in diese Kurve die Lage der Mittelpunkte m, m′, m″ etc. Ist ein solcher Mittelpunkt gegeben und die Menge der Mittelpunkte, welche darauf folgen sollen, ebenfalls gegeben, so sind ihre sämmtlichen Örter auf diese Weise bestimmt.

§. 339.

Da nach §. 338 ist $\cot(r+\varrho) = \cot r' \cos\frac{1}{2}v^2 + \cot r \sin\frac{1}{2}v^2$, so hat man auch $\cot(r+\varrho) + \cot(r+\varrho)\,\mathrm{tng}\,\frac{1}{2}v^2 = \cot r' + \cot r\,.\,\mathrm{tng}\,\frac{1}{2}v^2$ oder

$$\mathrm{tng}\,\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{\cot(r+\varrho) - \cot r'}{\cot r - \cot(r-\varrho)}}, \text{ oder}$$

$$\mathrm{tng}\,\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\left(\frac{\sin(r'-r-\varrho)}{\sin\varrho}\cdot\frac{\sin r}{\sin r'}\right)} \text{ und ebenso}$$

$$\mathrm{tng}\,\tfrac{1}{2}v' = \sqrt{\left(\frac{\sin(r'-r-\varrho')}{\sin\varrho'}\cdot\frac{\sin r}{\sin r'}\right)}.$$

Werden aber diese Werthe in der letzten Formel des §. 238 substituirt, so erhält man

$$\sqrt{\frac{\sin(r'-r-\varrho)}{\sin\varrho}} = \sqrt{\frac{\sin(r'-r-\varrho')}{\sin\varrho'}} + \frac{\sin(r'-r)}{\sqrt{(\sin r \sin r')}},$$

oder auch $\sqrt{\dfrac{\sin(r'-r-\varrho)}{\sin(r'-r)\sin\varrho}} = \sqrt{\dfrac{\sin(r'-r-\varrho')}{\sin(r'-r)\sin\varrho'}}$

$+ \sqrt{\dfrac{\sin(r'-r)}{\sin r \sin r'}}$ und wenn man wieder zu den Cotangenten übergeht, so ist also

$$\sqrt{[\cot\varrho - \cot(r'-r)]} = \sqrt{[\cot\varrho' - \cot(r'-r)]} + \sqrt{[\cot r - \cot r']}.$$

Nach dieser einfachen Formel können nun die Radien ϱ, ϱ', ϱ'', etc. der auf einander folgenden Kreise (m), (m′), (m″), etc., wenn einer von ihnen gegeben ist, berechnet werden.

§. 340.

Bleiben wir bei den vier Kreisen (m), (m′), (M), (M′) stehen, indem wir die drei ersten als gegeben betrachten, so ist (M′) der Kreis, welcher die drei gegebenen Kreise einschließend berührt. Bezeichnen wir ferner die Cotangenten der Radien ϱ, ϱ', r mit α, β, γ und die Cotangente des unbekannten Radius r′ mit δ, so ist

$\cot(r'-r) = \dfrac{\gamma\delta+1}{\gamma-\delta}$ und also

$$\sqrt{\left[\alpha - \frac{\gamma\delta+1}{\gamma-\delta}\right]} = \sqrt{\left[\beta - \frac{\gamma\delta+1}{\gamma-\delta}\right]} + \sqrt{[\gamma-\delta]} \text{ oder auch}$$

$$\sqrt{(\alpha\gamma - \alpha\delta - \gamma\delta - 1)} = \sqrt{(\beta\gamma - \beta\delta - \gamma\delta - 1)} + \gamma - \delta.$$

Wird diese Gleichung geordnet und in Hinsicht auf δ aufgelöset, so erhält man

$$\delta = -(\alpha + \beta + \gamma) + 2\sqrt{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - 1)}.$$

Diese Formel zeigt nun, wie man aus den Cotangenten der Radien dreier sich äußerlich berührender Kreise die Cotangente des Radius eines Kreises finden kann, welcher jene drei Kreise berührt, indem er sie umschließt.

Nimmt man statt der drei Radien ihre Supplemente, so verwandelt sich $+\alpha$ in $-\alpha$, $+\beta$ in $-\beta$, $+\gamma$ in $-\gamma$, dabei bleiben aber die Kreise (m), (m'), (M) von derselben Größe und man erhält nun

$$\delta' = \alpha + \beta + \gamma + 2\sqrt{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - 1)};$$

für die Cotangente des Radius eines Kreises, welcher die drei gegebenen Kreise ebenfalls, nun aber äußerlich berührt.

Anmerkung. Versteht man in dem analogen Falle der Planimetri unter α, β, γ, δ, δ' die reciproken Werthe der Radien, so hat man die Formeln

$$\delta = -(\alpha + \beta + \gamma) + 2\sqrt{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)} \text{ und}$$
$$\delta' = \alpha + \beta + \gamma + 2\sqrt{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)},$$

welche schon von dem Herrn Steiner im ersten Bande des oben erwähnten Journales für die reine und angewandte Mathematik Seite 274 hergeleitet worden sind.

§. 341.

Es mag jetzt auch der Fall besonders betrachtet werden, wenn die Kreise (M) und (M') in Fig. 200 sich äußerlich berühren, und sie wieder von den Kreisen (m) und (m') berührt werden, welche sich außerdem selbst äußerlich berühren. Setzen wir nun wieder $An = \alpha$, $An' = \alpha'$, so ist

$$\cos(r + \varrho) = \cos(r - \alpha) . \cos z; \quad \cos(r + \varrho') = \cos(r - \alpha') . \cos z',$$
$$\cos(r' + \varrho) = \cos(r' + \alpha) . \cos z; \quad \cos(r' + \varrho') = \cos(r' + \alpha') . \cos z'.$$
$$\text{und } \cos(\varrho + \varrho') = \sin z \sin z' + \cos z \cos z' \cos(\alpha' - \alpha).$$

Aus den vier ersten Gleichungen zieht man nun

$$\frac{\sin\varrho + \sin\alpha\cos z}{\cos\varrho - \cos\alpha\cos z} = \frac{\sin\varrho' + \sin\alpha'\cos z'}{\cos\varrho' - \cos\alpha'\cos z'} \text{ und}$$
$$\frac{\sin\varrho - \sin\alpha\cos z}{\cos\varrho - \cos\alpha\cos z} = \frac{\sin\varrho' - \sin\alpha'\cos z'}{\cos\varrho' - \cos\alpha'\cos z'};$$

hieraus erhält man aber durch Subtraction und Addition

$$\frac{\sin\alpha\cos z}{\cos\varrho - \cos\alpha\cos z} = \frac{\sin\alpha'\cos z'}{\cos\varrho' - \cos\alpha'\cos z'} \text{ und}$$
$$\frac{\sin\varrho}{\cos\varrho - \cos\alpha\cos z} = \frac{\sin\varrho'}{\cos\varrho' - \cos\alpha\cos z}.$$

Daher hat man nun die beiden Gleichungen

$$\frac{\sin \alpha \cos z}{\sin \varrho} = \frac{\sin \alpha' \cos z'}{\sin \varrho'} \text{ und}$$

$$\frac{\cos \varrho - \cos \alpha \cos z}{\sin \varrho} = \frac{\cos \varrho' - \cos \alpha' \cos z'}{\sin \varrho'},$$

ganz ebenso, wie im §. 335, und die weiteren Schlüsse bleiben ebenfalls unverändert; mithin gilt die Formel $\frac{\sin z}{\sin r} = \frac{\sin z'}{\sin r'} + 2$ auch bei der gegenwärtigen Construction.

Daher können wir hier von der weiteren Ausführung abstehen.

§. 342.

Wenn in Fig. 201 in ein Zweieck die drei Kreise (A), (B), (B) geschrieben sind, welche die Seiten des Zweiecks und einander äußerlich in m und n berühren, so stehen die Radien dieser Kreise in einem Zusammenhange, welcher jetzt ermittelt werden soll.

Man bezeichne die Radien der Kreise der Reihe nach mit a, b, c, setze Dm = m und Dn = n, ferner sei der Winkel im Zweiecke = 2v. Die Mittelpunkte der Kreise liegen bekanntlich auf einem Hauptkreise, welcher den eben genannten Winkel halbirt. Da DA = m — a und DB = m + b ist, so hat man also

$$\sin (m - a) \sin v = \sin a \text{ und } \sin (m + b) \sin v = \sin b;$$

wenn wir uns vorläufig auf die beiden Kreise (A) und (B) beschränken, so ist also

$$\sin m \,.\, \cot a - \cos m = \frac{1}{\sin v} \text{ und}$$

$$\sin m \,.\, \cot b + \cos m = \frac{1}{\sin v}.$$

Setzen wir also zur Abkürzung $\cot a = \alpha$, $\cot b = \beta$ und $\cot c = \gamma$, $\frac{1}{\sin v} = k$, so ist

$$\alpha \sin m - \cos m = k \text{ und}$$

$$\beta \sin m + \cos m = k.$$

Hieraus erhält man aber $\sin m = \frac{2\,k}{\alpha + \beta}$ und

$$\cos m = \frac{(\alpha - \beta)\,k}{\alpha + \beta},$$

und da $\sin m^2 + \cos m^2 = 1$ ist, so hat man also

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2\, k^2 + 4\, k^2 \text{ oder auch}$$

$$k^2 = \frac{(\alpha - \beta)^2 + 4}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{1}{\sin v^2}, \text{ und}$$

$$\text{1. also } \sin v = \frac{\sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4]}}{\alpha + \beta}.$$

Berühren sich also zwei Kreise äußerlich, so läßt sich nach dieser Formel die Hälfte des Winkels berechnen, welchen ihre äußeren Tangenten mit einander machen. Man findet auch noch

$$2. \quad \cos v = \frac{2\sqrt{(\alpha\beta-1)}}{\alpha+\beta}.$$

Auf gleiche Art findet man aber auch $\cos v = \frac{2\sqrt{(\beta\gamma-1)}}{\beta+\gamma}$, daher hat man die Gleichung

$$3. \quad (\beta+\gamma)\sqrt{(\alpha\beta-1)} = (\alpha+\beta)\sqrt{(\beta\gamma-1)},$$

unter den Radien der drei Kreise (A), (B), (C). Wird diese Gleichung entwickelt, so ist sie durch $\alpha-\gamma$ theilbar und verwandelt sich dadurch in

$$4. \quad \beta^3 + (2-\alpha\gamma)\beta + \alpha+\gamma = 0,$$

welche, wie man sieht, in Hinsicht auf β vom dritten Grade ist.

Anmerkung. Nach dieser Abschweifung kommen wir auf die Eigenschaften der Symmetral-Punkte zweier Kreise zurück.

§. 343.

Lehrsatz. Zieht man in Fig. 202 vom äußeren Symmetral-Punkte S zweier Kreise (o) und (O) eine Sekante durch die beiden Kreise, so liegen ihre Pole in Ansehung der beiden Kreise mit dem Symmetral-Punkte S in Einem Hauptkreise.

Beweis. Man habe die Sekante SnmNM gezogen, deren Pole f und F sein mögen. Zieht man die Sekanten fo und FO, so werden die Sehnen mn und MN dadurch unter rechten Winkeln halbirt und es ist

$$\text{tng ok} = \text{tng oSk} \,.\, \sin \text{Sk},$$
$$\text{tng OK} = \text{tng OSK} \,.\, \sin \text{SK},$$

also $$\frac{\text{tng ok}}{\text{tng OK}} = \frac{\sin \text{Sk}}{\sin \text{SK}}.$$

Ferner ist tng ok = tng onk . sin nk und tng OK = tng ONK . sin NK, und weil, wie früher bewiesen ist, die Winkel onk und ONK gleichgroß sind, so ist auch $\frac{\text{tng ok}}{\text{tng OK}} = \frac{\sin \text{nk}}{\sin \text{NK}}$, daher hat man die Proportion

$$1. \quad \frac{\sin \text{Sk}}{\sin \text{SK}} = \frac{\sin \text{nk}}{\sin \text{NK}}.$$

Weil ferner tng fk = tng knf . sin nk und tng FK = tng KNF . sin NK ist, und auch die Winkel knf und KNG gleich sind, so hat man

$$2. \quad \frac{\text{tng fk}}{\text{tng FK}} = \frac{\sin \text{nk}}{\sin \text{NK}}.$$

Da weiter tng fk = tng kSf . sin kS und tng FK = tng KSF . sin SK ist, so hat man auch

$$\frac{\text{tng fk}}{\text{tng FK}} = \frac{\text{tng kSf . sin kS}}{\text{tng KSF . sin KS}} \text{ und also}$$

$$\frac{\text{sin nk}}{\text{sin NK}} = \frac{\text{sin Sk . tng kSf}}{\text{sin SK . tng KSF}},$$

und wird hiermit die Proportion (1) verbunden, so folgt, daß tng kSf = tng KSF und also auch Winkel kSf = KSF sei; mithin geht die Linie Sf verlängert auch durch den zweiten Pol F.

Aus dem vorhergehenden schließt man auch die Proportion

$$\frac{\text{tng ko}}{\text{tng kf}} = \frac{\text{tng KO}}{\text{tng KF}}.$$

Zusatz 1. Verlängert man die Tangenten MF und nf, bis sie sich in P schneiden, so ist wegen der Gleichheit der Winkel PMn und PnM auch PM = Pn und daher ist P ein Punkt der Chordale der beiden Kreise (o) und (O). Verlängert man die Tangenten FN und fm, bis sie sich in Q schneiden, so ist QN = Qm und also Q ein zweiter Punkt der Chordale; wird also die Linie PQ gezogen, so ist sie die Chordale der beiden Kreise.

Zusatz 2. Verlängert man die Radien MO und no, bis sie sich in R schneiden, so ist, weil sie gleiche Winkel mit MnS machen, RM = Rn; beschreibt man also aus R einen Kreis mit dem Radius RM, so geht er durch die Punkte M und n, auch berührt er die beiden Kreise (o) und (O) in den genannten beiden Punkten. Wenn man die Radien ON und om bis zu ihrem Durchschnitts-Punkte R′ verlängert, so ist auch R′N = R′m; man kann also aus R′ mit dem Radius R′N einen Kreis beschreiben, und dieser Kreis, welcher durch die Puncte N und m geht, berührt offenbar ebenfalls die beiden gegebenen Kreise (o) und (O) in den genannten beiden Punkten.

Zusatz 3. Die vorstehenden Sätze gelten und können auch mit einer geringen Abänderung ebenso von dem inneren Symmetral-Punkte zweier Kreise bewiesen werden. Wenn man ferner den vorigen Satz umkehrt, so hat man das folgende Theorem: Wenn ein Kreis zwei andere Kreise berührt und man durch die beiden Berührungs-Punkte einen Hauptkreis legt, so geht dieser durch einen Symmetral-Punkt dieser beiden Kreise, und zwar durch den äußeren, wenn die Berührungen der beiden Kreise gleichartig sind; im entgegengesetzten Falle geht der Hauptkreis durch den inneren Symmetral-Punkt.

(Man vergleiche den Zusatz 3. zu §. 832).

Zusatz 4. Weil $\frac{\sin nk}{\sin Sk} = \frac{\sin no \,.\, \sin nok}{\sin So \,.\, \sin Sok}$ und ebenso $\frac{\sin NK}{\sin SK} = \frac{\sin NO \,.\, \sin NOK}{\sin SO \,.\, \sin SOK}$ ist, so hat man der Proportion (1) im obigen Beweise gemäß

$$\frac{\sin no \,.\, \sin nok}{\sin So \,.\, \sin Sok} = \frac{\sin NO \,.\, \sin NOK}{\sin SO \,.\, \sin SOK};$$

da aber S ein Symmetral-Punkt der beiden Kreise (o) und (O) und also $\frac{\sin So}{\sin SO} = \frac{\sin on}{\sin ON}$ ist, so reducirt sich die vorige Proportion auf die einfachere

$$1. \quad \frac{\sin nok}{\sin Sok} = \frac{\sin NOK}{\sin SOK}.$$

Diese Proportion läßt sich aber leicht umformen in die folgende

$$2. \quad \frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} Son}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} Som} = \frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} SON}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} SOM},$$

welche man auch leicht nach der allgemeinen Formel im §. 156 herleiten kann.

Zusatz 5. Das von den Tangenten der Punkte M, N, m, n gebildete Viereck FQfP hat die besondere Beschaffenheit, daß $FP + FQ = fP + fQ$ ist; im analogen Falle der Planimetrie ist es ein Parallelogramm.

§. 344.

Da das Tangenten-Paar MP und nP, ferner NQ und mQ, sich auf der Chordale PQ der beiden Kreise (o) und (O) schneidet, so erhält man durch Umkehrung den folgen Satz: Wenn man von einem Punkte der Chordale zweier Kreise an einen jeden Kreis eine Tangente zieht, so geht ein Hauptbogen, welcher die beiden Berührungen verbindet, jedesmal durch einen von den beiden Symmetral-Punkten der beiden Kreise.

Zieht man nämlich die Tangente PM′, und verbindet man M′ mit n durch einen Hauptbogen, so geht dieser durch den inneren Symmetral-Punkt S′. Ebenso kann man von P aus eine zweite Tangente an den Kreis (o) ziehen, und verbindet man den Berührungs-Punkt n′ mit dem Berührungs-Punkte M durch einen Hauptbogen, so geht er ebenfalls durch den inneren Symmetral-Punkt S′; so wie die Linien Mn oder Nm durch den äußeren Symmetral-Punkt S gehen.

§. 345.

Aufgabe. Man soll eine Relation unter den Theilen der Schenkel eines Winkels finden, wenn sie von einem Kreise und seinem Mittelkreise geschnitten werden.

In Fig. 203 werden die Schenkel des Winkels V vom Kreise (m) in A und B und von seinem Mittelkreise in A′ und B′ geschnitten. Man ziehe die Radien mA, mB, mA′, mB′, so sind die beiden letzten Quadranten; ferner ziehe man mV und setze mA=mB=r und mV=d, dann ist nach §. 239

$\cos mA . \sin VA' = \cos mA' . \sin VA + \cos mV \sin AA'$ oder

$\cos r . \sin VA' = \cos d . \sin AA'$.

Ebenso ist aber $\cos r . \sin VB' = \cos d . \sin BB'$, und wird die erste Proportion durch die zweite dividirt, so hat man

$$\frac{\sin VA'}{\sin VB'} = \frac{\sin A'A}{\sin B'B}.$$

In Fig. 204 hat man ebenso

$\cos mA' . \sin VA = \cos mV . \sin AA' + \cos mA . \sin VA'$

oder auch $\cos d . \sin AA' = \cos r . \sin VA'$, und ebenso

$\cos d . \sin BB' = \cos r . \sin VB'$; hieraus aber erhält man durch Division die Proportion

$$\frac{\sin VA'}{\sin VB'} = \frac{\sin A'A}{\sin B'B}.$$

Zusatz. Wenn umgekehrt $\frac{\sin VA'}{\sin A'A} = \frac{\sin VB'}{\sin B'B}$ ist, so kann man durch A′ und B′ einen Hauptkreis legen, und wenn man aus seinem Mittelpunkte einen Nebenkreis beschreibt, welcher durch den Punkt A geht, so geht er auch durch den Punkt B.

§. 346.

Wenn zwei Kreise gegeben sind, und der eine also fortrückt, daß einer von den beiden Symmetral-Punkten einen Hauptkreis MN beschreibt, so beschreibt der Mittelpunkt des bewegten Kreises einen Kreis, welcher mit dem Hauptkreise MN concentrisch ist.

Beweis. In Fig. 205 sei c der Radius des festen Kreises (C) und a der Radius des bewegten Kreises; der innere Symmetral-Punkt s der beiden Kreise beschreibe den Bogen ss′ des Hauptkreises MN, während der Mittelpunkt A nach A′ fortrückt.

Da nun $\frac{\sin Cs}{\sin As} = \frac{\sin c}{\sin a}$ und $\frac{\sin Cs'}{\sin As'} = \frac{\sin c}{\sin a}$ ist, so hat man also

$$\frac{\sin Cs}{\sin sA} = \frac{\sin Cs'}{\sin s'A'},$$

aber wegen dieser Proportion befinden sich nach §. 344 die Punkte A und A′ in der Peripherie eines zum Hauptkreise MN parallelen oder damit concentrischen Kreises. Man kann aber auch ohne den im §. 344 bewiesenen Satz auf folgende Art zur Einsicht gelangen. Man fälle die Perpendikel AP, A′P′ und CQ auf den Hauptkreis MN; dann ist

$\sin AP = \sin sA \cdot \sin AsP$ und $\sin CQ = \sin As \cdot \sin CsQ$ und also

$$\frac{\sin CQ}{\sin AP} = \frac{\sin Cs}{\sin sA};$$ ebenso findet man aber auch

$$\frac{\sin CQ}{\sin A'P'} = \frac{\sin Cs'}{\sin s'A'},$$

und da $\frac{\sin Cs}{\sin sA} = \frac{\sin Cs'}{\sin s'A'}$ ist, so folgt also $\sin AP = \sin A'P'$ oder $PA = P'A'$.

Verlängert man nun die Perpendikel PA und P′A′, bis sie sich in X schneiden, so ist X das Centrum des Hauptkreises MN, und da also $XP = XP' = 90^0$ ist, so ist auch $XA = XA'$; d. h. die Puncte A und A′ befinden sich in der Peripherie eines Kreises, der mit dem Hauptkreise MN denselben Mittelpunkt X hat.

§. 347.

Lehrsatz. Sind drei Kreise gegeben und man fällt aus den Mittelpunkten zweier von ihnen auf irgend eine von den vier Symmetralen Perpendikel, so verhalten sich jedesmal die Sinus dieser Perpendikel zu einander, wie die Sinus der Radien, aus deren Mittelpunkten die Perpendikel gefällt sind.

In Fig. 206 seien ab, ac, bc die drei inneren und a′b′ sei die äußere Symmetrale dreier Kreise (A), (B), (C), deren Radien α, β, γ sein mögen.

Von den Mittelpunkten A und B seien auf die Symmetrale cb die Perpendikel Am und Bn, auf die Symmetrale ac die Perpendikel Am′ und Bn′, auf ab die Perpendikel Am″ und Bn″, und endlich auf a′b′ die Perpendikel Am‴ und Bn‴ gefällt, dann ist

$\sin Ac \cdot \sin Acm = \sin Am$ und $\sin Bc \cdot \sin Bcn = \sin Bn$,

also $\frac{\sin Am}{\sin Bn} = \frac{\sin Ac}{\sin Bc}$ und da $\frac{\sin Ac}{\sin Bc} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ ist, so folgt also

$$1. \quad \frac{\sin Am}{\sin Bn} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Ganz ebenso wird die folgende Proportion bewiesen:

$$2. \quad \frac{\sin Am'}{\sin Bn'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Fällt man ferner noch die Perpendikel Cp und Cq auf die Symmetralen ab und a'b', so ist nach dem vorigen

$$\frac{\sin Am''}{\sin Cp} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \text{ und } \frac{\sin Bn''}{\sin Cp} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma},$$

und wird die erste Proportion durch die zweite dividirt, so hat man

3. $$\frac{\sin Am''}{\sin Bn''} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Weiter ist $Am''' = \sin Ab' \cdot \sin Ab'm'''$ und $\sin Cq = \sin Cb' \cdot \sin Cb'q$, also $\frac{\sin Am'''}{\sin Cq} = \frac{\sin Ab'}{\sin Cb'}$, und da $\frac{\sin Ab'}{\sin Cb'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ ist, so ist also $\frac{\sin Am'''}{\sin Cq} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$; ganz ebenso wird gezeigt, daß $\frac{\sin Bn''}{\sin Cq} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ ist, und aus diesen beiden Proportionen folgt endlich

4. $$\frac{\sin Am'''}{\sin Bn'''} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

§. 347.

Zieht man in Fig. 203 von einem Symmetral-Punkte S zweier Kreise (o) und (O) die willkürliche Sekante oder Sehne SmnMN, so ist nach §. 241

$$\frac{\sin Sk}{\sin nk} = \frac{\sin SK}{\sin NK},$$

sowie in der Richtung der Centrallinie selbst ist

$$\frac{\sin So}{\sin ao} = \frac{\sin SO}{\sin AO}.$$

Die erste Proportion läßt sich auch umformen in die folgende

$$\frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} Sn}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} Sm} = \frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} SN}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} SM}$$ und ebenso die zweite in

$$\frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} Sa}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} Sb} = \frac{\operatorname{tng} \frac{1}{2} SA}{\operatorname{tng} \frac{1}{2} SB}.$$

Setzen wir nun für den Augenblick zur Abkürzung $\operatorname{tng} \frac{1}{2} Sa = a$, $\operatorname{tng} \frac{1}{2} Sb = b$, $\operatorname{tng} \frac{1}{2} SA = A$, $\operatorname{tng} \frac{1}{2} SA = B$, $\operatorname{tng} \frac{1}{2} Sm = m$, $\operatorname{tng} \frac{1}{2} Sn = n$, $\operatorname{tng} \frac{1}{2} SM = M$ und $\operatorname{tng} \frac{1}{2} SN = N$, wobei also die Buchstaben m, n, M, N, a, b, A, B von den Buchstaben der Figur unterschieden werden müssen, so ist also

$$\frac{m}{n} = \frac{M}{N} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{A}{B}.$$

Ferner ist für den Kreis (o) bekanntlich $mn = ab$ und ebenso für den Kreis (O) auch $MN = AB$, daher hat man $N = \frac{AB}{M}$

und $m = \frac{ab}{n}$; werden diese Werthe in der Proportion $\frac{m}{n} = \frac{M}{N}$ substituirt, so hat man $\frac{ab}{n^2} = \frac{M^2}{AB}$ oder auch $M^2 . n^2 = ab . AB = aB . Ab$, und da $aB = Ab$ ist, so hat man auch $M^2 . n^2 = A^2 b^2$ oder auch $M . n = A . b$, und da $M . n = m . N$ ist, so ist also

$$tng \tfrac{1}{2} SM . tng \tfrac{1}{2} Sn = tng \tfrac{1}{2} SN . tng \tfrac{1}{2} Sm = tng \tfrac{1}{2} SB . tng \tfrac{1}{2} Sa = tng \tfrac{1}{2} SA . tng \tfrac{1}{2} Sb.$$

Für den inneren Symmetral-Punkt S′ können offenbar ähnliche Resultate auf ähnliche Weise hergeleitet werden.

§. 348.

Zieht man also in Fig. 207 etwa vom inneren Symmetral-Punkte S der Kreise (A) und (B) aus die Sekanten SNM und SN′M′, so ist $tng \tfrac{1}{2} SN . tng \tfrac{1}{2} SM = tng \tfrac{1}{2} Sn . tng \tfrac{1}{2} Sm$ und auch $tng \tfrac{1}{2} SN' . tng \tfrac{1}{2} SM' = tng \tfrac{1}{2} Sn . tng \tfrac{1}{2} Sm$; daher hat man

$$tng \tfrac{1}{2} SN . tng \tfrac{1}{2} SM = tng \tfrac{1}{2} SM' . tng \tfrac{1}{2} SN;$$

wenn man also durch drei von den vier Punkten M, N, M′, N′ einen Kreis schreibt, so geht derselbe auch durch den vierten Punkt. Weil aber die Punkte M, N, M′, N′ in der Peripherie eines Kreises (X) liegen, so ist, wenn die Sehnen MM′ und NN′ gezogen werden, MM′ die Chordale der Kreise (A) und (X); NN′ die Chordale der Kreise (B) und (X), und wenn cc die Chordale der Kreise (A) und (B) ist, so schneiden sich also MM′ und NN′ auf der Chordale cc im Chordal-Punkte (ABX). Hiermit haben wir aber eine neue Eigenschaft der Symmetral-Punkte und der von ihnen aus gezogenen Sekanten ausgesprochen.

§. 349.

Ziehen wir nach dem gemeinschaftlichen Punkte c der Peripherien der Kreise (A) und (B) die Radien Ac, Bc und noch Sc, so ist nach §. 178

$$\frac{\sin AS}{\sin BS} = \frac{\sin Ac . \sin AcS}{\sin Bc . \sin BcS},$$

und da, weil S der Symmetral-Punkt der beiden Kreise (A) und (B) ist, auch noch $\frac{\sin AS}{\sin BS} = \frac{\sin Ac}{\sin Bc}$ ist, so ist also $\sin AcS = \sin BcS$ oder der Winkel $AcS = BcS$; der Winkel AcB wird also von Sc halbirt. Dieses ist jedoch nur eine specielle Form eines schon früher hergeleiteten Gesetzes.

Macht man nun $S\nu$ so groß, daß $\operatorname{tng}\frac{1}{2}S\nu = \sqrt{(\operatorname{tng}\frac{1}{2}Sn \cdot \operatorname{tng}\frac{1}{2}Sm)}$ ist, und beschreibt man mit dem Radius $S\nu$ aus S einen Kreis $\nu\mu'\mu\nu'$, so ist nach §. 305 die Linie $m\nu n\nu'$ semiharmonisch getheilt, und überhaupt wird nun jede durch S gehende Sekannte $M'\mu'N'\mu''$ in den genannten Punkten und auch in den Punkten $\mu'M''\mu''N''$ semiharmonisch getheilt. Da nun die beiden Kreise A und B sich in c und c schneiden, so muß also auch der aus S beschriebene Kreis durch die Punkte c und c gehen, und es ist also, wenn Sc gezogen wird

$$\operatorname{tng}\tfrac{1}{2}Sc^2 = \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}Sn \cdot \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}Sm = \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}Sn' \cdot \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}Sm'.$$

Zusatz. Da $Sn = Bn - BS = Bc - SB$, $Sm = Am + SA = Ac + SA$, $Sn' = An' - SA = Ac - SA$, $Sm' = Bm' + SB = Bc + SB$ ist, so ist also auch

$$\operatorname{tng}\tfrac{1}{2}Sc^2 = \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}(Bc - BS) \cdot \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}(Ac + AS)$$
$$= \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}(Bc + BS)\operatorname{tng}\tfrac{1}{2}(Ac - AS).$$

§. 350.

Wenn in Fig. 207 also ein Kreis (P) die beiden Kreise (A) und (B) in den Punkten M und N berührt, und ein Kreis (P') die beiden Kreise (A) und (B) ebenfalls, und zwar in den Punkten M' und N' berührt, so gehen nach §. 331 die Berührungssehnen MN und M'N' durch den inneren Symmetral-Punkt S der Kreise (A) und (B); daher kann nach §. 247 durch die vier Berührungen M, N, M', N' der Kreise (P) und (P') jedesmal ein fünfter Kreis geschrieben werden.

Solcher Kreise können aber unzählige (P), (P'), (P'') etc. construirt, wovon jeder die beiden Kreise (A) und (B), und zwar jenen äußerlich, diesen innerlich berührt, und werden sie zu zweien combinirt, so läßt sich also jedesmal durch die vier Berührungen eines solchen Kreises ein neuer Kreis beschreiben. Wir erhalten daher noch eine zweite Reihe von Kreisen, welche mit (p), (p'), (p'') etc. bezeichnet werden mögen, und wovon jeder durch die vier Berührungen eines Paares von Kreisen der ersten Reihe geht.

Ziehen wir nun vom Symmetral-Punkte S an irgend einen Kreis der einen oder anderen Reihe, etwa an einen solchen, der durch die Punkte M und N geht, eine Tangente und setzen wir ihre Länge $= l$, so ist

$$\operatorname{tng}\tfrac{1}{2}l^2 = \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}SN \cdot \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}SM,$$

und da $\operatorname{tng}\frac{1}{2}SN \cdot \operatorname{tng}\frac{1}{2}SM$ constant und $= \operatorname{tng}\frac{1}{2}Sc^2$ ist, so ist also $l = Sc$; daher schneidet der mit dem Radius Sc beschriebene Kreis alle Kreise (P), (P'), (P'') etc. und auch die Kreise (p), (p'), (p''), etc. der anderen Reihe orthogonal, d. h. der Punkt S ist der Chordal-Punkt aller Kreise der genannten beiden Schaaren.

§. 351.

Eine durch den Punkt S gehende Sekante schneidet die beiden Kreise (A) und (B) in vier Punkten, aber diese Punkte dürfen, wenn die erwähnten Gesetze statt finden sollen, nicht willkürlich combinirt werden, sondern es müssen jedesmal solche zwei zu einem Paare verbunden werden, daß die Tangenten der Kreise (A) und (B) in jenen Punkten sich auf der Chordale der beiden Kreise schneiden. Zwei solche Punkte kann man im Bezug auf den Symmetral-Punkt conjugirte Punkte nennen.

Zieht man nach zwei conjugirten Punkten Radien, und verlängert man sie, so machen sie jedesmal ein gleichschenkeliges Dreieck; zieht man aber nach zwei nicht conjugirten Punkten Radien, und verlängert man sie ebenfalls, bis sie sich schneiden, so entsteht jedesmal ein Dreieck, worin die beiden den nicht conjugirten beiden Punkten gegenüberstehenden Seiten sich zu 180° oder einem Halbkreise ergänzen. Alles dieses findet Statt für einen jeden der beiden Symmetral-Punkte zweier Kreise, in Beziehung auf welchen zwei Punkte in den Peripherien zweier Kreise conjugirt sind; und diese Beziehung auf den Symmetral-Punkt selbst besteht darin, daß ein Hauptbogen, welcher durch zwei conjugirte Punkte geht, durch den genannten Symmetral-Punkt geht.

Hat man von den vier Punkten, in welchen zwei Peripherien von einem durch einen Symmetral-Punkt derselben gehenden Hauptkreise geschnitten werden, zwei als conjugirte zusammengeordnet, so sind die beiden übrigen jedesmal auch conjugirt.

Die beiden noch übrigen Combinationen unter den vier Punkten sind die beiden Paare nicht conjugirter Punkte.

Zieht man also durch einen Symmetral-Punkt zweier Kreise zwei Sekanten, und wählt man auf jeder Sekante ein Paar conjugirter Punkte, so kann durch solche vier Punkte jedesmal ein neuer Kreis geschrieben werden; und da vier Verbindungen unter den Paaren conjugirter Punkte möglich sind, so erhält man also vier solche neue Kreise.

Wird ferner durch zwei conjugirte Punkte ein Kreis geschrieben, welcher die beiden Peripherien in noch zwei Punkten schneidet, so sind auch diese Punkte in Ansehung desselben Symmetral-Punktes conjugirt, in Ansehung dessen die beiden vorigen Punkte conjugirt sind.

§. 352.

Lehrsatz. Sind zwei Punkte V und v in den Peripherien zweier Kreise (A) und (B) conjugirt, und schneidet ein dritter Kreis

(C) jene Peripherien in den Punkten V und v, so sind die Winkel, unter welchen sie davon geschnitten werden, gleichgroß.

Beweis. Da in Fig. 208 der Hauptbogen Vv durch zwei conjugirte Puncte, und also auch durch einen Symmetral-Punkt (in der Figur durch den äußeren) der beiden Kreise (A) und (B) geht, so schneidet Vv die Kreise (A) und (B) unter gleichen Winkeln und es ist also der Winkel

$$PVv = pvV;$$

da ferner die Sehne Vv den Kreisbogen Vv unter gleichen Winkeln schneidet, so ist auch

$QVv = qvV$, und also $PVv - QVv = pvV - qvV$, oder auch

$$PVQ = pvq.$$

Der Kreis (C) schneidet die beiden Kreise (A) und (B) in noch zwei Punkten W und w, und da nach §. 250 auch diese beiden Punkte conjugirt sind, so gilt von den Winkeln an W und w dasselbe.

Es erhellet aber auch ohnedies, daß der Winkel $PWQ = PVQ$ und $pwq = pvq$ sei, und so wird nicht nur klar, daß die Winkel PWQ und pwq gleich sind, sondern daß überhaupt die vier zuletzt genannten Winkel gleichgroß sind.

Zusatz. Wenn ein Kreis zwei andere Kreise unter gleichen Winkeln schneidet, so gehen zwei Hauptkreise durch die Scheitel dieser Winkel und durch einen Symmetral-Punkt der beiden Kreise.

§. 353.

Aufgabe. Man soll die beiden Symmetral-Punkte zweier Kreise finden.

Auflösung. Wenn die beiden Kreise eine reelle gemeinschaftliche Sehne haben, wie in Fig. 209 die beiden Kreise (B) und (C), welche sich in p und p′ schneiden, so construire man das Dreieck CpB; halbirt man nun den Winkel CpB durch eine Linie ps, wovon die Centrale CB in σ geschnitten wird, so ist σ der innere Symmetral-Punkt der beiden Kreise nach §. 349; halbirt man den äußeren Winkel bei p, oder errichtet man auf ps ein Loth ps, wovon CB in s geschnitten wird, so ist s der äußere Symmetral-Punkt der beiden Kreise (B) und (C); denn es ist nun BσCs harmonisch getheilt.

Wenn aber in Fig. 209 die beiden gegebenen Kreise (A) und (B) keine reelle Sehne gemein haben, so construire man einen willkürlichen Kreis (C), nur so, daß er die beiden gegebenen schneidet; bestimme dann nach dem vorigen die beiden Symmetral-Punkte σ und s der Kreise (B) und (C); ferner die beiden Symmetral-Punkte σ′ und s′ der Kreise (A) und (C); schneiden sich dann die beiden Scheitel-Linien Aσ und Bσ′ in O, und wird AB von CO in σ″

und von ss' in s'' geschnitten, so sind σ'' und s'' die beiden gesuchten Symmetral-Punkte der Kreise (A) und (B).

Es reicht offenbar schon hin, die beiden Symmetral-Punkte σ und σ' vorher zu bestimmen; hieraus findet man schon σ'', wie vorhin, und wird $\sigma\sigma''$ gezogen, so geht sie durch s'', wodurch also dieser Punkt ebenfalls schon gefunden wird (nach §. 322).

Zusatz. Man kann auch von den Symmetral-Punkten für einen Punkt und einen Kreis reden, aber die beiden Symmetral-Punkte fallen dann mit dem vorgelegten Punkte zusammen. Wird also in Fig. 209 ein Punkt A mit zwei Kreisen (B) und (C) zusammengestellt, so fallen die Punkte σ'' und s'' (oder sein Gegenpunkt), ferner die Punkte σ' und s' mit dem Punkte A zusammen. Von den vier Symmetral-Linien (im §. 322) bleiben daher nur noch zwei, nämlich $A\sigma$ und As.

§. 354.

Aufgabe. Man soll die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise ziehen, falls solche Tangenten möglich sind.

Auflösung. Man construire nach §. 252 die beiden Symmetral-Punkte der beiden Kreise, ziehe von ihnen aus an einen Kreis zwei Tangenten-Paare; diese Tangenten berühren dann auch den anderen Kreis.

§. 355.

In Fig. 210 werden drei Kreise (A), (B), (C) von einem dritten Kreise (O) unter den Winkeln α, β, γ geschnitten; wir bezeichnen die Radien der drei gegebenen Kreise mit a, b, c, und den Radius des Kreises (O) mit r, dann ist, wenn wir auch noch $OA = A$, $OB = B$, $OC = C$ setzen, nach §. 305

$$\cos A = \cos a \cos r - \sin a \sin r \cos \alpha,$$
$$\cos B = \cos b \cos r - \sin b \sin r \cos \beta,$$
$$\cos C = \cos c \cos r - \sin c \sin r \cos \gamma.$$

Beschreibt man aber aus A, B, C drei neue Kreise mit den Radien A, B, C, so schneiden sich dieselben im Punkte O, und der Mittelpunkt des Kreises (O) ist also der Chordal-Punkt der drei so eben genannten Kreise. Durch die angegebenen drei Bedingungen ist nun aber der Kreis (O) vollkommen bestimmt. Der Kreis (O) wird ein anderer, wenn statt der Winkel α, β, γ drei andere Winkel α', β', γ' genommen werden, und man erhält dann für den Kreis (O') die drei Gleichungen

$$\cos A' = \cos a \cos r' - \sin a \sin r' \cos \alpha',$$
$$\cos B' = \cos b \cos r' - \sin b \sin r' \cos \beta',$$
$$\cos C' = \cos c \cos r' - \sin c \sin r' \cos \gamma'.$$

Für einen dritten Kreis (O'') erhält man drei neue Gleichungen, wenn sein Radius mit r'' und die Winkel mit α'', β'', γ'' bezeichnet werden, unter welchen er die drei gegebenen Kreise schneidet.

Nach §. 317 befindet sich aber die Mittelpunkte O, O', O'' in Einem Hauptkreise, d. h. der Mittelpunkt O des veränderlichen Kreises (O) beschreibt diesen Hauptkreis, wenn

$$\frac{\cos A' \cos C - \cos A \cos C'}{\cos A' \cos B - \cos A \cos B'}$$ eine constante Größe behält, die wir mit k bezeichnen wollen. Sehr einfach wird aber der Werth von k, wenn wir setzen $\cos\beta = m\cos\alpha$, $\cos\beta' = m\cos\alpha'$, $\cos\gamma = n\cos\alpha$ und $\cos\gamma' = n\cos\alpha'$; denn dann erhält man nach einer geringen Reduction

$$\cos A' \cos C - \cos A \cos C' = (\sin a \cos c - n \cos a \sin c)$$
$$(\sin r \cos r' \cos \alpha - \sin r' \cos r \cos \alpha')$$ und
$$\cos A' \cos B - \cos A \cos B' = (\sin a \cos b - m \cos a \sin b)$$
$$(\sin r \cos r' \cos \alpha - \sin r' \cos r \cos \alpha')$$; daher ist

$$k = \frac{\sin a \cos c - n \cos a \sin c}{\sin a \cos b - m \cos a \sin b},$$ und also von r, r', α und α' unabhängig; daher ist k constant, wenn die Verhältnißzahlen m und n dieselben bleiben; d. h. wenn die Proportionen

$$\frac{\cos\gamma'}{\cos\gamma} = \frac{\cos\beta'}{\cos b} = \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}$$ und

$$\frac{\cos\gamma''}{\cos\gamma} = \frac{\cos\beta''}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha''}{\cos\alpha}$$ Statt finden.

Schneidet also ein Kreis O die drei gegebenen Kreise (A), (B), (C) unter den Winkeln α, β, γ, welche völlig willkürlich sind, schneidet ferner ein Kreis O' die gegebenen Kreise unter den Winkeln α', β', γ', endlich noch ein Kreis O'' diese Kreise unter den Winkeln α'', β'', γ'', und leisten die Cosinus dieser Winkel den vorstehenden beiden Proportionen Genüge, so liegen die drei Mittelpunkte O, O', O'', dieser Kreise in Einem Hauptkreise.

Es gibt aber offenbar unzählige Kreise (O), (O'), (O''), (O'') etc., wovon jeder die drei gegebenen Kreise unter solchen Winkeln schneidet, daß sich die Cosinus dieser Winkel jedesmal verhalten, wie 1 : m : n und die Mittelpunkte aller dieser Kreise liegen also in Einem Hauptkreise. Eine gleiche Bewandtniß hat es mit dem analogen Falle der Planimetrie.

Zusatz 1. Ein einfacher hieher gehöriger Fall ist der, wenn $\alpha=\beta=\gamma$ sein soll, dann muß offenbar aber auch $\alpha'=\beta'=\gamma'$ und $\alpha''=\beta''=\gamma''$ sein; die Kreise (O), (O'), etc. schneiden dann also die drei gegebenen Kreise jedesmal unter gleichen Winkeln, ihre Mittelpunkte befinden sich also in Einem Hauptkreise. Unter diese Kreise reihen sich offenbar auch die beiden Kreise, wovon der eine die drei gegebenen Kreise ausschließend, der andere aber eben diese Kreise einschließend be-

rührt, und folglich befinden sich ihre Mittelpunkte ebenfalls in dem vorerwähnten Hauptkreise; in diesem Hauptkreise, welcher nach §. 325 auf der äußeren Symmetrale der drei gegebenen Kreise senkrecht steht, befindet sich endlich auch noch der Chordal-Punkt dieser drei Kreise.

Zusatz 2. Es lassen sich außer dem erwähnten Hauptkreise noch drei andere nachweisen, worin die Mittelpunkte von solchen Kreisen (O) liegen, welche die drei gegebenen Kreise unter solchen drei Winkeln schneiden, deren Cosinus sich zu einander verhalten, wie $+1 : -1 : -1$ oder wie $-1 : +1 : -1$, oder endlich wie $-1 : -1 : +1$, und diese drei Hauptkreise sind dann mit den drei im §. 328 behandelten Hauptkreisen dieselben.

§. 356.

In Fig. 211 mögen die Kreise (O) und (O), deren Chordale CC sein mag, den Kreis (A) unter dem Winkel α schneiden, und auf diese Chordale sei das Loth $AP = d$ gefällt, ferner sei $QP = m$, der Radius des Kreises (A) sei a, die Radien der Kreise (O) und (O′) mögen r und r′ sein, auch sei $QO = q$, $QO' = q'$.

Zieht man nun noch die Centralen OA und O′A, dann ist nach §. 305

$$\cos OA = \cos a \cos r - \sin a \sin r \cos \alpha \text{ und}$$
$$\cos AO' = \cos a \cos r' - \sin a \sin r' \cos \alpha.$$

Ferner ist nach §. 330 noch

$$\cos AO = -\sin d \sin q + \cos d \cos q \cos m \text{ und}$$
$$\cos AO' = +\sin d \sin q' + \cos d \cos q' \cos m,$$

daher ist

$$\cos a \cos r - \sin a \sin r \cos \alpha = -\sin d \sin q + \cos d \cos q \cos m \text{ und auch}$$
$$\cos a' \cos r' - \sin a \sin r' \cos \alpha = +\sin d \sin q' + \cos d \cos q' \cos m;$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit cos q′ und die zweite mit cos q, so erhält man durch Subtraction

$$(\cos a \cos r' - \sin a \sin r' \cos \alpha)\cos q - (\cos a \cos r - \sin a \sin r \cos \alpha)\cos q' = \sin d\,(\sin q \cos q' + \cos q \sin q').$$

Außer dieser Gleichung hat man noch eine zweite; weil nämlich Q der Chordal-Punkt der beiden Kreise (O) und (O′) ist, so ist

$$\frac{\cos q}{\cos q'} = \frac{\cos r}{\cos r'} \text{ und also}$$
$$\cos q \cos r' = \cos q' \cos r.$$

Die vorige Gleichung kann nun aber also geordnet werden:

$$\cos a\,(\cos r' \cos q - \cos r \cos q') - \sin a \cos \alpha\,(\sin r' \cos q - \sin r \cos q') = \sin d\,(\sin q \cos q' + \cos q \sin q'),$$

und sie zieht sich daher zusammen auf

$(\sin r \cos q' - \sin r' \cos q) \cdot \frac{\sin a \cos \alpha}{\sin d} = \sin q \cos q' + \cos q$ $\sin q'$, oder auch

$$\cos q \left(\sin r \frac{\cos q'}{\cos q} - \sin r'\right) \cdot \frac{\sin a \cos \alpha}{\sin d} = \sin (q + q');$$ sub-

stituirt man hierin noch den Werth $\frac{\cos r'}{\cos r}$ für $\frac{\cos q'}{\cos q}$, so hat man also

$$\frac{\cos q}{\cos r} (\sin r \cos r' - \cos r \sin r') \cdot \frac{\sin a \cos \alpha}{\sin d} = \sin (q + q')$$

und endlich

$$\frac{\sin d}{\sin a \cdot \cos \alpha} = \frac{\cos q \cdot \sin (r - r')}{\cos r \cdot \sin (q + q')}.$$

Für alle Kreise (A) also, die von den Kreisen (O) und (O') unter dem Winkel α geschnitten werden, ist das Verhältniß $\frac{\sin d}{\sin a \cdot \cos \alpha}$ von gleicher Größe.

Setzen wir $\alpha = o$, so kommen wir auf das im §. 331 gefundene Resultat zurück, und der Kreis A berührt dann die beiden Kreise (O) und (O').

§. 357.

In Fig. 195 mögen nun die Kreise (A) und (B) von den Kreisen (M) und (M') nicht berührt werden, obgleich diesen Fall die Figur darstellt, sondern die Kreise (A) und (B) mögen vom Kreise (M) unter den Winkeln α und β, und vom Kreise (M') ebenfalls unter den Winkeln α und β geschnitten werden.

Zieht man dann die Centrale AB und fällt man die Perpendikel Aa und Bb auf die Chordale PQ der Kreise (M) und (M'), so ist also nach §. 356

1. $\frac{\sin Bb}{\sin b \cdot \cos \beta} = \frac{\sin Aa}{\sin a \cdot \cos \alpha}$,

wenn die Radien der Kreise (A) und (B) mit a und b bezeichnet werden.

Man beschreibe nun aus denselben Mittelpunkten A und B zwei andere Kreise (A') und (B') und zwar den ersten mit einem Radius a' und den zweiten mit einem Radius b' dergestalt, daß ist

2. $\sin a' = \sin a \cos \alpha$ und $\sin b' = \sin b \cdot \cos \beta$,

dann verwandelt sich die Proportion (1) in die folgende

3. $\frac{\sin Bb}{\sin b'} = \frac{\sin Aa}{\sin a'}$.

Verlängert man nun die Centrale AB, bis die Chordale PQ davon in N geschnitten wird, so ist offenbar

$$\frac{\sin Bb}{\sin NB} = \frac{\sin Aa}{\sin Na},$$

und wird die vorige Proportion hierdurch dividirt, so hat man

$$4.\quad \frac{\sin NB}{\sin b'} = \frac{\sin NA}{\sin a'},$$

d. h. der Punkt N ist der äußere Symmetral-Punkt der beiden Kreise (A′) und (B′).

Zusatz 1. Wenn drei Kreise (A), (B), (C), deren Radien a, b, c sein mögen, von zwei Kreisen (M) und (M′) unter den Winkeln α, β, γ geschnitten werden, und man bestimmt drei neue Radien a′, b′, c′ so, daß $\sin a' = \sin a . \cos \alpha$, $\sin b' = \sin b . \cos \beta$ und $\sin c = \sin c . \cos \gamma$ ist, um mit ihnen aus den Mittelpunkten A, B, C drei neue Kreise (A′), (B′), (C′) zu beschreiten, so befinden sich die äußeren Symmetral-Punkte je zweier von diesen drei Kreisen in der Chordale PQ der beiden Kreise (M) und (M′); daher ist die Chordale PQ die äußere Symmetrale dieser drei Kreise.

Zusatz 2. Außer den beiden Kreisen (M) und (M′) gibt es noch drei andere Paare von Kreisen, und die beiden Kreise eines solchen Paares schneiden jedesmal einen der drei Kreise (A), (B), (C) unter dem gegebenen Winkel, während sie die beiden anderen Kreise unter solchen Winkeln schneiden, welche die Ergänzungen der gegebenen Schneidungs-Winkel zu 180° sind; und so hat man also im Ganzen vier Paare von Kreisen, welche die gegebenen Kreise entweder unter den gegebenen Winkeln oder unter ihren Nebenwinkeln schneiden, auf ähnliche Art, wie es im Falle der Berührung nach §. 326 im Allgemeinen vier Paare von Kreisen gibt, wovon jeder die drei gegebenen Kreise berührt.

Neunter Abschnitt.

Vom arithmetischen Zusammenhange unter den Radien der in und um ein Dreieck und seine Nebendreiecke geschriebenen Kreise und den Seiten und Winkeln des ursprünglichen Dreiecks.

§. 358.

Werden die Seiten eines Dreiecks ABC durch a, b, c und die ihnen gegenüberstehenden Winkel durch A, B, C bezeichnet, der Ra-

dius des um das Dreieck geschriebenen Kreises aber mit r und der Radius des hineingeschriebenen Kreises mit ϱ, so ist nach §. 181 und §. 137

$$1.\quad \operatorname{tng} r = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin C},$$

$$2.\quad \operatorname{tng} \varrho = \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin c}.$$

Diese Formeln haben die einfachste Form, aber es enthält eine jede vier von den sechs Bestandtheilen der Construction des Dreiecks ABC; daher werden wir diese Formeln nun so umformen, daß sie nur drei von den genannten Bestandtheilen enthalten. Werden die Seiten a und b mit dem eingeschlossenen Winkel C als gegeben betrachtet, so ist $\sin \frac{1}{2} c$ durch a und b auszudrücken. Es ist aber nach §. 150

$$\sin \tfrac{1}{2} c^2 = \sin \tfrac{1}{2} (a - b)^2 \cos \tfrac{1}{2} C^2 + \sin \tfrac{1}{2} (a + b)^2 \sin \tfrac{1}{2} C^2$$

und also

$$\operatorname{tng} r = \frac{\sqrt{[\sin \frac{1}{2} (a-b)^2 \cos \frac{1}{2} C^2 + \sin \frac{1}{2} (a+b)^2 \sin \frac{1}{2} C^2]}}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} c \sin C}.$$

Dieser Formel kann man aber auch eine noch einfachere Gestalt geben. Es ist zuerst

$$\operatorname{tng} r = \frac{\sqrt{\left[\frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)^2}{\cos \frac{1}{2} a^2 \cos \frac{1}{2} b^2} \cos \frac{1}{2} C^2 + \frac{\sin \frac{1}{2} (a+b)^2}{\cos \frac{1}{2} a^2 \cos \frac{1}{2} b^2} \sin \frac{1}{2} C^2\right]}}{\sin C};$$

weil aber

$$\frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b} = \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} a - \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} b \text{ und } \frac{\sin \frac{1}{2} (a+b)}{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b} = \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} a + \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} b$$

ist, so hat man

$$\operatorname{tng} r = \frac{\sqrt{[(\operatorname{tng} \frac{1}{2} a - \operatorname{tng} \frac{1}{2} b)^2 \cos \frac{1}{2} C^2 + (\operatorname{tng} \frac{1}{2} a + \operatorname{tng} \frac{1}{2} b)^2 \sin \frac{1}{2} C^2]}}{\sin C}$$

und durch eine neue leicht zu findende Umformung erhält man

$$3.\ \operatorname{tng} r = \frac{\sqrt{[(\operatorname{tng} \frac{1}{2} a^2 - 2 \operatorname{tng} \frac{1}{2} a \operatorname{tng} \frac{1}{2} b \cos C + \operatorname{tng} \frac{1}{2} b^2]}}{\sin C}.$$

In ähnlicher Weise findet man die Formel

$$4.\ \operatorname{tng} \varrho = \frac{\sqrt{[(\cot \frac{1}{2} A^2 + 2 \cot \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} B \cos c + \cot \frac{1}{2} B^2]}}{\sin c},$$

wenn zwei Winkel mit der eingeschlossenen Seite zur Berechnug von ϱ gegeben sind.

§. 359.

Sind die drei Seiten des Dreiecks gegeben, und substituirt man den Werth

$$\sin C = \frac{2\,w}{\sin a \sin b}$$ aus §. 142, so hat man

$$\operatorname{tng} r = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}\cdot\frac{\sin a\sin b}{2\,w} = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{w},$$

oder auch

5. $$\cot r = \frac{\sqrt{[\sin\frac{1}{2}(a+b+c).\sin\frac{1}{2}(b+c-a).\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)]}}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.$$

Sind die drei Winkel gegeben zur Berechnung von ϱ und substituirt man den Werth

$$\sin c = \frac{\sin A\sin B}{2\,W}$$ aus §. 136, so hat man

$$\cot\varrho = \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B}\cdot\frac{\sin A\sin B}{2\,W} = \frac{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{W}$$

oder

6. $$\operatorname{tng}\varrho = \frac{\sqrt{[-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)]}}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$$

Sind die drei Winkel des Dreiecks zur Berechnung von r gegeben, so kann man die Formel ebenfalls durch Substitution leicht aus der Formel 1 herleiten. Das folgende Verfahren verdient aber den Vorzug.

Es ist in Fig. 31 *a* nach §. 57 die Winkel MAB = MBA $= \gamma = \frac{A+B-C}{2}$, und weil das Dreieck ABM gleichschenkelig ist, so ist

$$\operatorname{tng} MA\,.\cos\gamma = \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}AB,$$ oder

7. $$\operatorname{tng} r = \frac{\operatorname{tng}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}.$$

In ähnlicher Weise findet man nach §. 64 die Formel

8. $$\operatorname{tng}\varrho = \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}C\,.\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c).$$

Wird in der Formel 7 der Werth von $\operatorname{tng}\frac{1}{2}c$ aus §. 136 substituirt, so hat man auf der Stelle

9. $$\cot r = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}},$$

und wird in der Formel 8 der Werth von $\operatorname{tng}\frac{1}{2}C$ aus §. 142 substituirt, so verwandelt sie sich in

10. $$\operatorname{tng}\varrho = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\,.\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\,.\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}}.$$

Aus den Formeln 7 und 8 gehen noch auf eine andere Weise die im §. 148 bewiesenen Proportionen hervor, was auch schon dort angedeutet wurde.

§. 360.

Mit dem Dreiecke ABC oder Δ stehen drei Nebendreiecke Δ', Δ'', Δ''' in Verbindung; die Dreiecke Δ und Δ' haben die Seite BC gemein, Δ und Δ'' die Seite AC, endlich Δ und Δ''' die Seite BC. Die Radien der um die Dreiecke Δ', Δ'', Δ''' geschriebenen Kreise mögen sein r', r'', r'''. Nach §. 131 ist nun

$$\operatorname{tng} r = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} c \,.\, \cos \frac{1}{2} b \,.\, \sin A};$$

$$\operatorname{tng} r' = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} c \,.\, \sin \frac{1}{2} b \sin A};$$

$$\operatorname{tng} r = \frac{\sin \frac{1}{2} b}{\cos \frac{1}{2} a \,.\, \cos \frac{1}{2} c \sin B};$$

$$\operatorname{tng} r'' = \frac{\sin \frac{1}{2} b}{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} c \sin B};$$

$$\operatorname{tng} r = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} a \,.\, \cos \frac{1}{2} b \,.\, \sin C};$$

$$\operatorname{tng} r''' = \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}.$$

Hieraus folgt durch Division

$$\frac{\operatorname{tng} r}{\operatorname{tng} r'} = \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} b \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} c;$$

$$\frac{\operatorname{tng} r}{\operatorname{tng} r''} = \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} c;$$

$$\frac{\operatorname{tng} r}{\operatorname{tng} r'''} = \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} b.$$

Betrachten wir nun drei von den vier Radien r, r', r'', r''', oder vorläufig alle vier als gegeben, und setzen wir der Kürze wegen

$$\operatorname{tng} r' = \alpha, \quad \operatorname{tng} r'' = \beta, \quad \operatorname{tng} r''' = \gamma, \quad \operatorname{tng} r = \delta,$$

so sind die drei vorigen Gleichungen

$$\frac{\delta}{\alpha} = \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} b \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} c; \quad \frac{\delta}{\beta} = \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} c, \quad \frac{\delta}{\gamma} = \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} b;$$

das Product derselben ist also

$$\frac{\delta^3}{\alpha\beta\gamma} = (\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} b \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} c)^2, \text{ mithin}$$

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} b \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\delta^3}{\alpha\beta\gamma}}.$$

Wird diese Gleichung der Reihe nach durch jede der vorigen dividirt, so erhält man die einfachen Formeln

$$1.\ \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}}; \quad \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\beta\delta}{\alpha\gamma}}; \quad \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}},$$

nach welchen die Seiten des Dreiecks ABC aus den vier gegebenen Größen α, β, γ, δ berechnet werden können. Aus den gefundenen Formeln leiten wir noch zum künftigen Gebrauche her

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\alpha\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma}};\ \cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta + \beta\gamma}};$$

$$2.\quad \sin \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\beta\delta}{\beta\delta + \alpha\gamma}};\ \cos \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta + \alpha\gamma}};$$

$$\sin \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\gamma\delta}{\gamma\delta + \alpha\beta}};\ \cos \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta + \alpha\beta}}.$$

Hieraus erhalten wir durch Zusammensetzung

$$\sin a = \frac{2\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{\alpha\delta + \beta\gamma};\ \cos a = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\beta\gamma + \alpha\delta};$$

$$3.\quad \sin b = \frac{2\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{\beta\delta + \alpha\gamma};\ \cos b = \frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha\gamma + \beta\delta};$$

$$\sin c = \frac{2\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{\gamma\delta + \alpha\beta};\ \cos c = \frac{\alpha\beta - \gamma\delta}{\alpha\beta + \gamma\delta}.$$

§. 361.

Die eigenthümliche Form der so eben erhaltenen Formeln bringt es mit sich, daß man auch andere von den Seiten des Dreiecks △ abhängige Funktionen bequem durch α, β, γ, δ ausdrücken kann.

Da $\sin \frac{1}{2}(a \pm b) = \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \pm \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b$ ist, so hat man

$$1.\quad \sin \tfrac{1}{2}(a \pm b) = \frac{(\alpha \pm \beta)\sqrt{(\gamma\delta)}}{\sqrt{[(\alpha\gamma + \beta\delta)(\beta\gamma + \alpha\delta)]}}.$$

Weil ferner $\cos \frac{1}{2}(a \pm b) = \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \mp \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b$ ist, so findet man

$$2.\quad \cos \tfrac{1}{2}(a \pm b) = \frac{(\gamma \mp \delta)\sqrt{(\alpha\beta)}}{\sqrt{[(\alpha\gamma + \beta\delta)(\beta\gamma + \alpha\delta)]}}.$$

Weil $\sin \frac{1}{2}(a + b \pm c) = \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2} c \pm \cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2} c$ ist, so haben wir zunächst

$$\sin \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2} c = \frac{(\alpha+\beta)\sqrt{(\gamma\delta)}}{\sqrt{[(\alpha\gamma+\beta\delta)(\beta\gamma+\alpha\delta)]}} \cdot \frac{\sqrt{(\alpha\beta)}}{\sqrt{(\alpha\beta+\gamma\delta)}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2} c = \frac{(\gamma-\delta)\sqrt{(\alpha\beta)}}{\sqrt{[(\alpha\gamma+\beta\delta)(\beta\gamma+\alpha\delta)]}} \cdot \frac{\sqrt{(\gamma\delta)}}{\sqrt{(\alpha\beta+\gamma\delta)}},$$ und

also

$$3.\quad \sin \tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{\sqrt{[(\beta\gamma+\alpha\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)]}}.$$

$$4.\quad \sin \tfrac{1}{2}(a+b-c) = \frac{(\alpha+\beta+\delta-\gamma)\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{\sqrt{[(\beta\gamma+\alpha\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)]}};$$ eben-

so findet man

5. $\sin \frac{1}{2}(a+c-b) = \frac{(\alpha+\gamma+\delta-\beta)\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{\sqrt{[(\beta\gamma+\alpha\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)]}}$.

6. $\sin \frac{1}{2}(b+c-a) = \frac{(\beta+\gamma+\delta-\alpha)\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{\sqrt{[(\beta\gamma+\alpha\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)]}}$.

Da der etwas zusammengesetzte Wurzelausdruck, welcher der Nenner in den vorstehenden Formeln 3, 4, 5, 6 ist, sich im Nachfolgenden sehr oft wiederholt, so werden wir der Kürze wegen setzen

$$G = \sqrt{[(\beta\gamma+\alpha\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)]}.$$

§. 362.

Werden die so eben erhaltenen Formeln multiplicirt, und wird das Product, wie im §. 142 mit w^2 bezeichnet, so haben wir

$$w^2 = \frac{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\beta+\gamma+\delta-\alpha)(\alpha+\gamma+\delta-\beta)(\alpha+\beta+\delta-\gamma).(\alpha\beta\gamma\delta)^2}{G^4}$$

und also, wenn wir noch setzen

$$g^2 = \sqrt{[(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\beta+\gamma+\delta-\alpha)(\alpha+\gamma+\delta-\beta)(\alpha+\beta+\delta-\gamma)]}.$$

1. $w = \frac{g.\alpha\beta\gamma\delta}{G^2}$.

Ferner ist $2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c = \frac{2\,\delta\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{G}$, und weil nach §. 359. ist

$$\cot r = \frac{1}{\delta} = \frac{W}{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c},$$ so haben wir

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta\,.\,g}{G^2} . \frac{G}{2\,\delta\sqrt{(\alpha\gamma\delta)}};$$

diese Gleichung reducirt sich aber, wie man sieht, auf

2. $g\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)} = 2\,G$.

Erheben wir dieselbe zum Quadrate, und setzen wir für g^2 und G^2 die Bedeutungen an die Stelle, so haben wir die folgende merkwürdige Gleichung

2. $(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\beta+\gamma+\delta-\alpha)(\alpha+\gamma+\delta-\beta)(\alpha+\beta+\delta-\gamma).\alpha\beta\gamma\delta$
$= 4.(\beta\gamma+\alpha\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)$,

unter den vier Größen α, β, γ, δ oder tng r', tng r'', tng r''' und tng r. Vertauschen wir in dieser Gleichung irgend zwei von den vier Größen, z. B. α und δ, so bleibt die Gleichung ungeändert.

Das Vorhandensein dieser Gleichung gibt zu erkennen, daß nur drei von den vier Größen α, β, γ, δ brauchen gegeben zu sein, wenn die Seiten des Dreiecks △ berechnet werden sollen, wie sich vorhersehen ließ. Die vierte Größe muß so gewählt werden, daß sie die so eben gefundenen Bedingungs-Gleichung befriedigt, oder was

damit einerlei ist, sie muß mittelst eben dieser Gleichung aus den drei gegebenen Größen berechnet werden.

Sieht man aber z. B. α, β, γ als gegeben an, und ordnet man die Gleichung nach Potenzen von δ, so ist sie vom fünften Grade; in ihr fehlt aber das Glied mit δ^4, woraus man schließt, daß die Summe der fünf Wurzeln der Gleichung = o ist.

§. 363.

Auch die Winkel des Dreiecks ABC können durch die Größen α, β, γ, δ auf eine bequeme Weise ausgedrückt werden. Es ist

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

und also $\cos C =$

$$\frac{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\beta\gamma+\alpha\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)-(\beta\gamma-\alpha\delta)(\alpha\gamma-\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)}{4\,\alpha\beta\gamma\delta\,(\alpha\beta+\gamma\delta)}.$$

Wird der Zähler entwickelt und reducirt, so verwandelt er sich in $2\,\alpha\beta\gamma\delta\,(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)$, und es ist mithin

1. $$\cos C = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2}{2\,(\alpha\beta+\gamma\delta)}.$$

Weil $1-\cos C = 2\sin\frac{1}{2}C^2$ und $1+\cos C = 2\cos\frac{1}{2}C^2$ ist, so erhält man

$$\sin\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\gamma+\delta)^2-(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta+\gamma\delta}}$$ und

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)^2-(\gamma-\delta)^2}{\alpha\beta+\gamma\delta}}.$$

Die Zähler dieser Ausdrücke lassen sich aber in Factoren zerlegen, wodurch man erhält

2. $$\sin\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\gamma+\delta+\beta-\alpha)(\gamma+\delta+\alpha-\beta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}.$$

3. $$\cos\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta+\delta-\gamma)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}.$$

Aus diesen Formeln erhält man noch

4. $$\operatorname{tng}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(\gamma+\delta+\beta-\alpha)(\gamma+\delta+\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta+\delta-\gamma)}}.$$

Weil $\sin C = 2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C$ ist, so ist noch

5. $$\sin C = \frac{g}{2\,(\alpha\beta+\gamma\delta)}.$$

Aus diesen Formeln erhält man leicht durch ein Vertauschen der Buchstaben α, β, γ die Formeln für die Funktionen der Winkel A und B.

§. 364.

Auch der Flächeninhalt Δ des Dreiecks ABC läßt sich durch α, β, γ, δ auf eine bemerkenswerthe Weise ausdrücken. Es ist nach §. 132 Zusatz 1

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c}, \text{ also}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta = \sqrt{\frac{\alpha\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma}} \cdot \sqrt{\frac{\beta\delta + \alpha\gamma}{\beta\gamma}} \cdot \frac{g}{2(\alpha\beta + \gamma\delta)} \cdot \sqrt{\frac{\gamma\delta + \alpha\beta}{\alpha\beta}} \text{ oder}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta = \frac{\delta \,.\, g}{2 \,.\, G};$$

weil aber $\frac{g}{2\,G} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}$, so reducirt sich die Formel auf

$$1. \quad \sin \tfrac{1}{2} \Delta = \sqrt{\frac{\delta}{\alpha\beta\gamma}}.$$

Für den Umfang $a + b + c$ des Dreiecks Δ fanden wir schon

$$\sin \tfrac{1}{2} (a+b+c) = \frac{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{G},$$

weil aber $\frac{\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{G} = \frac{2}{g}$ ist, so reducirt sich die Formel auf

$$\sin \tfrac{1}{2} U = \frac{2(\alpha+\beta+\gamma-\delta)}{g},$$

wenn wir $a + b + c = U$ setzen. Setzen wir für g die Bedeutung an die Stelle, so ist die Formel

$$2. \quad \sin \tfrac{1}{2} U = 2\sqrt{\frac{\alpha+\beta+\gamma-\delta}{(\beta+\gamma+\delta-\alpha)(\alpha+\gamma+\delta-\alpha)(\alpha+\beta+\delta-\gamma)}},$$

Es ist $\sin \frac{1}{2} \Delta''' = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c} = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta + \beta\gamma}}$

$$\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta+\alpha\gamma}} \cdot \frac{2\,g}{2(\alpha\beta+\gamma\delta)} \cdot \sqrt{\frac{\gamma\delta+\alpha\beta}{\alpha\beta}}, \text{ oder}$$

$\sin \frac{1}{2} \Delta''' = \frac{\gamma \,.\, g}{2 \,.\, G}$ und diese Formel reducirt sich noch auf

$$3. \begin{cases} \sin \frac{1}{2} \Delta''' = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha\beta\delta}}, \text{ ebenso ist} \\ \sin \frac{1}{2} \Delta'' = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha\gamma\delta}}, \\ \sin \frac{1}{2} \Delta' = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta\gamma\delta}}, \end{cases}$$

Werden die Perimeter der Dreiecke Δ', Δ'', Δ''' mit U', U'', U''' bezeichnet, so ist

$$4.\quad\begin{cases}\sin\tfrac{1}{2}U' = 2\sqrt{\dfrac{\beta+\gamma+\delta-\alpha}{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\gamma+\delta-\beta)(\alpha+\beta+\delta-\gamma)}},\\[2ex] \sin\tfrac{1}{2}U'' = 2\sqrt{\dfrac{\alpha+\gamma+\delta-\beta}{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\beta+\gamma+\vartheta-\alpha)(\alpha+\beta+\delta-\alpha)}},\\[2ex] \sin\tfrac{1}{2}U''' = 2\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta+\delta-\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\beta+\gamma+\delta-\alpha)(\alpha+\gamma+\delta-\beta)}}.\end{cases}$$

§. 365.

Werden die Radien der in die Dreiecke Δ, Δ', Δ'', Δ''' geschriebenen Kreise mit ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' bezeichnet, und setzt man zur Abkürzung

$$\cot\varrho' = \alpha',\ \cot\varrho'' = \beta',\ \cot\varrho''' = \gamma',\ \cot\varrho = \delta',$$

so ist $\delta' = \dfrac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A\,.\,\sin\frac{1}{2}B\,.\,\sin c}$, es ist aber

$$\cos\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\ (\alpha+\beta+\delta-\gamma)}{\alpha\beta+\gamma\delta}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\alpha+\delta+\beta-\gamma)\ (\alpha+\delta+\gamma-\beta)}{\beta\gamma+\alpha\delta}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\beta+\delta+\alpha-\gamma)\ (\beta+\delta+\gamma-\alpha)}{\alpha\gamma+\beta\delta}},$$

$$\sin c = \frac{2\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{\gamma\delta+\alpha\beta},$$

und werden diese Werthe substituirt, so erhält man

$$\delta' = \frac{G}{\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}\cdot\frac{\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)}}{\sqrt{[(\beta+\delta+\gamma-\alpha)(\alpha+\delta+\gamma-\beta)(\beta+\delta+\alpha-\gamma)]}}.$$

Weil aber $\dfrac{G}{\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}} = \frac{1}{2}\,g$ ist, so reduzirt sich die Formel auf

1. $\delta' = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\delta)$.

Ganz ebenso oder auch schon durch ein Vertauschen der Buchstaben findet man noch die Formeln

$$(2).\quad \begin{aligned}\alpha' &= \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma+\delta-\alpha),\\ \beta' &= \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma+\delta-\beta),\\ \gamma' &= \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\delta-\gamma).\end{aligned}$$

Werden die Gleichungen 1 und 2 zu einander addirt, so erhält man

(3). $\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta' = \alpha+\beta+\gamma+\delta$, und also auch $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \frac{1}{2}(\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta')$, subtrahirt man hiervon aber die Gleichung $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\delta) = \delta'$, so erhält man umgekehrt

(4). $\delta = \frac{1}{2}(\alpha'+\beta'+\gamma'-\delta')$,

und in ähnlicher Weise erhält man durch das Subtrahiren der übrigen Gleichungen die Formeln

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\,(\beta' + \gamma' + \delta' - \alpha'),$$
$$(5).\quad \beta = \tfrac{1}{2}\,(\alpha' + \gamma' + \delta' - \beta'),$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2}\,(\alpha' + \beta' + \delta' - \gamma').$$

Es sind demnach nun auch rückwärts die Größen α, β, γ, δ durch α' β', γ', δ' ausgedrückt, und vergleicht man die Formeln (4) und (5) mit den Formeln (1) und (2), so sieht man, daß die Größen α', β', γ', δ' ebenso abhängen von den Größen α, β, γ, δ, wie umgekehrt diese von jenen.

Ist mittelst der Gleichung 2 im §. 362. die Größe δ aus den drei gegebenen Größen bestimmt, und substituirt man die gefundene Wurzel in den 5 Gleichungen (1) und (2), so erhält man in diesem Werthe von δ zugehörigen Werthe der 4 Größen α', β', γ', δ'.

§. 366.

Man überzeugt sich auf der Stelle von der Richtigkeit der Gleichungen

1. $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \delta + \delta' = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \frac{1}{2}(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta')$.

Setzt man also $\frac{1}{2}\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \frac{1}{2}\,(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta') = \sigma$, so ist

$$2.\quad \begin{aligned} \alpha' &= \sigma - \alpha,\\ \beta' &= \sigma - \beta,\\ \gamma' &= \sigma - \gamma,\\ \delta' &= \sigma - \delta. \end{aligned}$$

Also ist $\beta'\gamma' = \sigma^2 - (\beta + \gamma)\,\sigma + \beta\gamma$ und
$\alpha'\delta' = \sigma^2 - (\alpha + \delta)\,\sigma + \alpha\delta$,

mithin $\beta'\gamma' + \alpha'\delta' = 2\,\sigma^2 - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\,\sigma + \beta\gamma + \alpha\delta$, weil aber $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\,\sigma$ ist, so erhält man durch die Substitution dieses Werthes die Gleichung

$$3.\quad \begin{aligned} \beta'\gamma' + \alpha'\delta' &= \beta\gamma + \alpha\delta, \text{ ebenso findet man}\\ \alpha'\gamma' + \beta'\delta' &= \alpha\gamma + \beta\delta \text{ und}\\ \alpha'\beta' + \gamma'\delta' &= \alpha\beta + \gamma\delta. \end{aligned}$$

Es ist mithin auch

4. $G^2 = G'^2 = (\alpha\beta + \gamma\delta)\,(\alpha\gamma + \beta\delta)\,(\beta\gamma + \alpha\delta) = (\alpha'\beta' + \gamma'\delta')\,(\alpha'\gamma' + \beta'\delta')\,(\beta'\gamma' + \alpha'\delta')$.

Ferner ist $g^2 = 16\,.\,\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, also $g = 4\,\sqrt{(\alpha'\beta'\gamma'\delta')}$; wird dieser Werth in der Gleichung $g\,\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)} = 2\,G$ substituirt, so hat man

$4\,\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta')} = 2\,G = 2\,\sqrt{(G\,.\,G')}$ oder auch

5. $G\,.\,G' = 4\,\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'$.

Diese Gleichung ist symmetrisch in Ansehung der 8 Größen α, β, γ, δ, α', β', γ', δ', d. h. sie bleibt unverändert, wenn irgend zwei von diesen Größen permutirt werden.

Bezeichnet man mit g' den Wurzelausdruck

$$g' = \sqrt{[(\alpha' + \beta' + \gamma' - \delta')\,(\beta' + \gamma' + \delta' - \alpha')\,(\alpha' + \gamma' + \delta' - \beta')\,(\alpha' + \beta' + \delta' - \gamma')]}$$

so ist $g'^2 = 16 \,.\, \alpha\beta\gamma\delta$; wird aber $4\,\alpha\beta\gamma\delta = \frac{1}{4}\,g'^2$ in der vorigen Gleichung substituirt und G' für G gesetzt, so hat man

$$4\,G'^2 = g'^2 \,.\, \alpha'\beta'\gamma'\delta' \text{ oder}$$

6. $$g'\sqrt{(\alpha'\beta'\gamma'\delta')} = 2\,.\,G'.$$

Diese Gleichung, in welcher die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht mehr enthalten sind, zeigt nun ebenfalls, daß der Zusammenhang unter den Größen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ völlig übereinstimmt mit dem Zusammenhange unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Sind drei von den Größen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ etwa α', β', γ' gegeben, so ist dadurch die Größe der vierten δ' bestimmt, und ist sie gefunden, so ergibt sich die Größe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nach den Formeln (4) und (5) im §. 365.

§. 367.

In Anwendung der Größen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ lassen sich die Functionen der Winkel des Dreiecks ABC sehr bequem ausdrücken. Es ist

1. $$\operatorname{tng}\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\alpha'\beta'}{\gamma'\delta'}};\ \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\alpha'\gamma'}{\beta'\delta'}};\ \operatorname{tng}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\beta'\gamma'}{\alpha'\delta'}}.$$

2. $$\sin\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\alpha'\beta'}{\alpha'\beta'+\gamma'\delta'}};\ \sin\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\alpha'\gamma'}{\alpha'\gamma'+\beta'\delta'}};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\beta'\gamma'}{\beta'\gamma'+\alpha'\delta'}}.$$

3. $$\cos\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\gamma'\delta'}{\alpha'\beta'+\gamma'\delta'}};\ \cos\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\beta'\delta'}{\beta'\delta'+\alpha'\gamma'}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\alpha'\delta'}{\beta\gamma'+\alpha'\delta'}}.$$ Hieraus folgt

4. $$\sin C = \frac{2\sqrt{(\alpha'\beta'\gamma'\delta')}}{\alpha'\beta'+\gamma'\delta'}$$ und da

$$\sin c = \frac{2\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{\alpha'\beta'+\gamma'\delta'}$$

ist, so folgt, da auch noch $\alpha\beta+\gamma\delta = \alpha'\beta'+\gamma'\delta'$ ist, daß

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sqrt{(\alpha'\beta'\gamma'\delta')}}{\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}} = \frac{g}{g'}$$ sei.

Der Algorithmus mit den Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$, ist überhaupt von so einfacher Art, daß, wenn es noch neue interessante metrische Relationen unter den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks gäbe, sie in Folge des einfachen Zusammenhanges unter den Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta.\ \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ leicht gefunden werden könnten.

Ferner ist

5. $$\cos C = \frac{\gamma'\delta' - \alpha'\beta'}{\gamma'\delta' + \alpha'\beta'}$$

Die Perimeter der vier Dreiecke Δ, Δ', Δ'', Δ''' lassen sich am einfachsten durch die Größen α', β', γ', δ' ausdrücken; die Formeln sind

6. $\sin\frac{1}{2}U = \sqrt{\frac{\delta'}{\alpha'\beta'\gamma'}}$; $\sin\frac{1}{2}U' = \sqrt{\frac{\alpha'}{\beta'\gamma'\delta'}}$; $\sin\frac{1}{2}U'' = \sqrt{\frac{\beta'}{\alpha'\gamma'\delta'}}$;

$\sin\frac{1}{2}U''' = \sqrt{\frac{\gamma'}{\alpha'\beta'\delta'}}$,

und haben nun mit den Formeln für $\sin\frac{1}{2}\Delta$, $\sin\frac{1}{2}\Delta'$, $\sin\frac{1}{2}\Delta''$, $\sin\frac{1}{2}\Delta'''$ die größte Ähnlichkeit.

§. 368.

Sowie $g'^2 = 16\,\alpha\beta\gamma\delta$ ist, so ist auch $g^2 = 16\,.\,\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ und also

$$g^2\, g'^2 = 256\,.\,\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta';$$

weil aber $G^2 = 4\,.\,\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ ist, so ist auch

$$g^2\,.\,g'^2 = 64\,.\,G^2, \text{ oder also}$$

1. $g\,.\,g' = 8\,.\,G = 16.\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta')}$.

Läßt man von den Ecken A, B, C Perpendikel p, p', p'', auf die gegenüberstehenden Seiten, so ist

$$\sin p'' = \sin a\,.\,\sin B = \sin b\,.\,\sin A.$$

Weil aber $\sin A = \frac{2\sqrt{(\alpha'\beta'\gamma')}}{\beta'\gamma' + \alpha'\delta'}$ und $\sin b = \frac{2\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{\alpha\gamma + \beta\delta}$ ist, so ist

$$\sin p'' = \frac{4\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta')}}{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\beta\delta + \alpha\delta)},$$

und weil $4\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta')} = 2\,G$ ist, so ist also

$$\sin p'' = \frac{2\,G}{(\alpha\gamma + \beta\delta)\,(\beta\gamma + \alpha\delta)} = \frac{2\,G\,.\,(\alpha\beta + \gamma\delta)}{G^2}$$

$= \frac{2\,(\alpha\beta + \gamma\delta)}{G}$; weil aber $\sin c = \frac{2\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{\alpha\beta + \gamma\delta}$ ist, so ist

$$\sin p''\,.\,\sin c = \frac{4\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}{G} = \frac{g'}{G} \text{ oder}$$

$$\sin p''\,.\,\sin c = \frac{8}{g} \text{ und also überhaupt}$$

2. $\sin p\,.\,\sin a = \sin p'\,.\,\sin b = \sin p''\,.\,\sin c = \frac{8}{g}$

$= \frac{2}{\sqrt{(\alpha'\beta'\gamma'\delta')}}$.

Ebenso findet man die Formel

3. $\sin p\,.\,\sin A = \sin p'\,.\,\sin B = \sin p''\,.\,\sin C = \frac{8}{g'} = \frac{2}{\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta)}}$.

Ferner ist ähnlich der Formel

$$\sin p'' = \frac{2\,(\alpha\beta+\gamma\delta)}{G},$$

$$\sin p' = \frac{2\,(\alpha\gamma+\beta\delta)}{G},$$

$$\sin p = \frac{2\,(\beta\gamma+\alpha\delta)}{G},$$

hieraus erhält man durch Multiplication $\sin p \,.\, \sin p' \,.\, \sin p'' = \frac{8\,.\,G^2}{G^3}$ oder

$$4.\quad \sin p . \sin p' . \sin p'' = \frac{8}{G} = \frac{64}{g . g'} = \frac{4}{\sqrt{(\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta')}}.$$

§. 369.

Um die Leichtigkeit des Rechnens mit den Größen α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' an einem schicklichen Beispiele mehr ins Klare zu setzen, leiten wir die Gauß'schen Proportionen in Anwendung der genannten Hülfsgrößen her. Es ist

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\gamma+\delta+\beta-\alpha)\,(\gamma+\delta+\alpha-\beta)}{\alpha\beta+\gamma\delta}} \text{ und}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\,(\alpha+\beta+\delta-\gamma)}{\alpha\beta+\gamma\delta}},$$

oder auch $\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\alpha'\beta'}{\alpha'\beta'+\gamma'\delta'}}$ und $\cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\gamma'\delta'}{\alpha'\beta'+\gamma'\delta'}}$, ebenso ist

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\beta'\gamma'}{\beta'\gamma'+\alpha'\delta'}},\quad \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\alpha'\delta'}{\beta'\gamma'+\alpha'\delta'}},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\alpha'\gamma'}{\alpha'\gamma'+\beta'\delta'}},\quad \cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\beta'\delta'}{\alpha'\gamma'+\beta'\delta'}}.$$

Weil nun $\cos\frac{1}{2}(A\mp B) = \cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B \pm \sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B$ und $\sin\frac{1}{2}(A\mp B) = \sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B \mp \cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B$ ist, so finden wir durch Zusammensetzung

$$\cos \tfrac{1}{2}(A\mp B) = \frac{(\delta'\pm\gamma')\sqrt{(\alpha'\beta')}}{\sqrt{[(\beta'\gamma'+\alpha'\delta')\,(\alpha'\gamma'+\beta'\delta')]}} \text{ und}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(A\mp B) = \frac{(\beta'\mp\alpha')\sqrt{(\gamma'\delta')}}{\sqrt{[(\beta'\gamma'+\alpha'\delta')\,(\alpha'\gamma'+\beta'\delta')]}},$$

welche Ausdrücke auch noch zu andern Zwecken gebraucht werden können. Es ist also

$$1.\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(A\mp B)}{\sin\frac{1}{2} C} = \frac{(\delta'\pm\gamma') + (\alpha'\beta'+\gamma'\delta')}{\sqrt{[(\beta'\gamma'+\alpha'\delta')\,(\alpha'\gamma'+\beta'\delta')]}}$$

$$= \frac{(\delta'\pm\gamma')\,.\,(\alpha'\beta'+\gamma'\delta')}{G} \text{ und}$$

2. $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A \mp B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \dfrac{(\beta' \mp \alpha')(\alpha'\beta' + \gamma'\delta')}{G}$,

3. $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(a \mp b)}{\sin\frac{1}{2}c} = \dfrac{(\alpha \mp \beta)(\alpha\beta + \gamma\delta)}{G} = \dfrac{(\alpha \mp \beta)(\alpha'\beta' + \gamma'\delta')}{G}$,

4. $\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a \mp b)}{\cos\frac{1}{2}c} = \dfrac{(\gamma \pm \delta)(\alpha\beta + \gamma\delta)}{G} = \dfrac{(\gamma \pm \delta)(\alpha'\beta' + \gamma'\delta')}{G}$;

Weil nun aber $\delta' + \gamma' = \alpha + \beta$, $\delta' - \gamma' = \gamma - \delta$, $\beta' + \alpha' = \gamma + \delta$ und $\beta' - \alpha' = \alpha - \beta$ ist, so entstehen auf der Stelle die gesuchten Gleichungen

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\text{oos}\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

Zehnter Abschnitt.

Das drei=rechtwinkelige Dreieck in seiner Anwendung zur Bestimmung der Lage und Größe.

§. 370.

Der Gebrauch eines dreirechtwinkeligen Dreiecks zur Bestimmung der Lage von Punkten und ihrer Entfernungen von einander, ferner zur Bestimmung der Lage der Hauptkreise und der Winkel, welche sie mit einander machen, ist sehr wichtig, weil die besondere Beschaffenheit jenes Dreiecks einen hohen Grad der Einfachheit der Formeln bei seiner Anwendung zur Folge hat.

Die Lage eines Punktes M in Fig. 210 ist bestimmt durch die drei Abstände MA, MB, MC desselben von den drei Ecken A, B, C eines dreirechtwinkeligen Dreiecks ABC.

Eigentlich reichen schon zwei von diesen Abständen, etwa MA und MB, zur Bestimmung der Lage des Punktes M hin. Werden aus den Ecken A und B Kreise mit den Radien MA und MB beschrieben, so ist ihr Durchschnitts=Punkt der zu bestimmende Punkt M; da sich die beiden Kreise im Allgemeinen in zwei Punkten schneiden, die auf entgegengesetzten Seiten von AB liegen, so bringt diese

Bestimmung der Lage also eine Zweideutigkeit mit sich, die von selbst aufhört, wenn bekannt ist, ob der Punkt M im Dreiecke ACB oder in dem Nebendreiecke ABC′ an der Seite AB enthalten ist; im ersten Falle wird der dritte Abstand MC kleiner und im zweiten Falle größer als ein Quadrant sein.

Was vom Punkte M gesagt wurde, gilt von jedem anderen Punkte N in Ansehung seiner drei Abstände NA, NB, NC von den Ecken desselben dreirechtwinkeligen Dreiecks ABC.

§. 371.

Die Summe der Quadrate der Cosinus der drei Abstände eines Punktes von den Ecken eines dreirechtwinkeligen Dreiecks ist immer = 1.

Da das Dreieck AMB in Fig. 210 ein rechtseitiges, oder AB ein Quadrant ist, so ist cos MB = sin MA cos MAB, und ebenso cos MC = sin MA cos MAC, und weil ausserdem der Winkel BAC ein rechter oder cos MAC = sin MAB ist, so ist

$$1. \quad \sin MAB = \frac{\cos MC}{\sin MA} \text{ und } \cos MAB = \frac{\cos MB}{\sin MA}.$$

Werden die Quadrate dieser beiden Gleichungen addirt, so erhält man

$$1 = \frac{\cos MB^2 + \cos MC^2}{\sin MA^2}, \text{ oder}$$

$\sin MA^2 = \cos MB^2 + \cos MC^2$, und wird noch $1 - \cos MA^2$ für $\sin MA^2$ gesetzt, so erhält man schon

$$2. \cos MA^2 + \cos MB^2 + \cos MC^2 = 1.$$

Sind also MA und MB gegeben, so läßt sich daraus schon MC berechnen, denn es ist

$$\sin MC = \sqrt{(\cos MB^2 + \cos MA^2)} = \sin (180^0 - MC).$$

Diese Formel bringt aber eine Zweideutigkeit mit sich, indem dadurch zwei Abstände von C gefunden werden, die sich aber zu einem Halbkreise ergänzen.

§. 372.

Der Abstand zweier Punkte von einander kann nach einer einfachen Formel aus den Abständen dieser Punkte von den drei Ecken eines dreirechtwinkeligen Dreiecks berechnet werden. Es seien in Fig. 210 M und N die beiden Punkte, dann ist

$$\cos MAB = \frac{\cos MB}{\sin MA} \text{ und } \cos NAB = \frac{\cos NB}{\sin NA},$$

$\sin MAB = \frac{\cos MC}{\sin MA}$ und $\sin NAB = \frac{\cos NC}{\sin NA}$,
und weil $\cos MAN = \cos (MAB - NAB) = \cos MAB \cos NAB + \sin MAB \sin NAB$ ist, so ist

$$\cos MAN = \frac{\cos MB . \cos NB + \cos MC . \cos NC}{\sin MA . \sin NA},$$ und weil

$$\cos MN = \cos MA . \cos NA + \sin MA . \sin NA . \cos MAN$$

ist, so ist

$$\cos MN = \cos MA . \cos NA + \cos MB . \cos NB + \cos MC . \cos NC$$

schon die gesuchte Formel, zu welcher man durch ein gleiches Verfahren immer gelangt, wenn auch die beiden Punkte eine beliebige andere Lage auf der Kugel haben.

Setzt man $\cos MA = a$, $\cos MB = b$, $\cos MC = c$, $\cos NA = x$, $\cos NB = y$, $\cos NC = z$ und $MN = d$, so ist nach §. 371

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

und die so eben hergeleitete Formel ist nun

1. $\cos d = ax + by + cz.$

Es ist nicht selten auch der Ausdruck für $\sin d$ nöthig, welcher aus dem gefundenen für $\cos d$ leicht hergeleitet wird. Es ist zunächst

$$\sin d = \sqrt{[1 - (ax + by + cz)^2]};$$

man kann aber diesem Ausdrucke eine bemerkenswerthe andere Gestalt geben. Es ist nämlich

$$1 = (a^2+b^2+c^2)\ (x^2+x^2+z^2)$$
$$= a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2$$

und $(ax+by+cz)^2 = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz$; wird also subtrahirt, so erhält man

$$\sin r^2 = (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) + (a^2z^2 - 2acxz + c^2z^2) + (c^2y^2 - 2bcyz + b^2z^2)$$ oder

2. $\sin d = \sqrt{[(ay-bx)^2 + (az-cx)^2 + (cy-bz)^2]}.$

§. 373.

Die Binome $\pm (ay - bx)$, $\pm (az - cx)$; $\pm (cy - bz)$, deren Quadrate im Ausdrucke von $\sin d$ enthalten sind, und welche auch noch öfter vorkommen, verdienen eine nähere Betrachtung. Es ist in Fig. 210 zuerst

$$a = \cos Ap . \cos pM,\ b = \cos Bp \cos pM,$$
$$x = \cos Ap' . \cos p'N,\ y = \cos Bp' \cos p'N,$$

also ist $ay - bx = \cos pM \cos p'N . (\cos Ap \cos Bp' - \cos Bp \cos Ap')$,
$= \cos pM \operatorname{coc} p'N . (\sin Bp \cos Bp' - \cos Bp \sin Bp')$,
oder $ay - bx = \cos pM \cos p'N \sin pp'$.

Aus den Formeln $a = \cos Aq \cos qM$, $c = \cos Cq \cos qM$,
$z = \cos Cq' \cos q'N$, $x = \cos Aq' \cos q'N$,

folgt $az - cx = (\cos Aq \cos Cq' - \cos Cq \cos Aq') \cos qM \cos q'N$
$= (\sin Aq' \cos Aq - \cos Aq' \sin Aq) \cos qM \cos q'N$,
oder $az - cx = \cos qM \cos q'N \sin qq'$.

Aus den Formeln $c = \cos Cr \cos rM$, $b = \cos Br \cos rM$,
$y = \cos Br' \cos r'N$, $z = \cos Cr' \cos r'N$,
folgt $cy - bz = (\cos Cr \cos Br' - \cos Cr' \cos Br) \cos rM \cos r'N$
$= (\sin Br \cos Br' - \cos Br \sin Br') \cos rM \cos r'N$ oder
$cy - bz = \cos rM \cos r'N \sin rr'$.

Die gefundenen Formeln können auch also dargestellt werden

$$ay - bx = \sin CM \sin CN \sin MCN,$$
1. $$az - cx = \sin BM \sin BN \sin MBN,$$
$$cy - bz = \sin AM \sin AN \sin MAN,$$

weil pp' das Maaß des Winkels MCN, qq' das Maaß des Winkels MBN und rr' das Maaß des Winkels MAN ist.

Werden ferner von den Ecken des Coordinaten-Dreiecks ABC Perpendikel auf MN gefällt, und wird das Perpendikel aus A mit r, das Perpendikel aus B mit q und das Perpendikel aus C mit p bezeichnet, so ist nach §. 124 Zusatz 1, da die Linie $MN = d$ ist

$$\sin CM \sin CN \sin MCN = \sin d \,.\, \sin p,$$
$$\sin BM \sin BN \sin MBN = \sin d \,.\, \sin q,$$
$$\sin AM \sin AN \sin MAN = \sin d \,.\, \sin r;$$

und also auch

$$ay - bx = \sin d \,.\, \sin p,$$
2. $$az - cx = \sin d \,.\, \sin q,$$
$$cy - bz = \sin d \,.\, \sin r;$$

Es sind mithin die Ausdrücke $\pm (ay - bx)$, $\pm (az - cx)$ und $\pm (cy - bz)$ den Sinus der Perpendikel proportional, welche von den Ecken des Coordinaten-Dreiecks auf die Linie MN gefällt werden.

Wird das Perpendikel p verlängert, bis AB davon getroffen wird, so steht es auch auf AB senkrecht, und es ist also $90° - p$ der Abstand der Linie MN von AB, oder das Maaß des Winkels, unter welchem AB von MN bei der Verlängerung dieser Linie geschnitten wird; ebenso ist $90° - q$ das Maaß des Winkels, unter welchem AC von MN geschnitten wird, und $90° - r$ das Maaß des Winkels, unter welchem BC von MN geschnitten wird.

Ist O das Centrum des Hauptkreises MN, so ist

$$OC \pm p = 90°,$$
$$OB \pm q = 90°,$$
$$OA \pm r = 90°,$$

also $\sin p = \pm \cos OC$, $\sin q = \pm \cos OB$, $\sin r = \pm \cos OA$, und da nach §. 870 ist $\cos OA^2 + \cos OB^2 + \cos OC^2 = 1$, so ist also auch $\sin p^2 + \sin q^2 + \sin r^2 = 1$; es ist mithin
$(ay - bz)^2 + (az - cx)^2 + (cy - bz)^2 = \sin d^2 \,.\, (\sin p^2 + \sin q^2 + \sin r^2)$
$= \sin d^2$,

und also die vorige Formel für sin d auf eine andere Art hergeleitet werden.

Werden in Fig. 211 die Seiten des Coordinaten-Dreiecks von der Linie MN unter den Winkeln D, E, F geschnitten, so ist

$$8.\quad \frac{ay-bx}{\sin d} = \cos D,\quad \frac{az-cx}{\sin d} = \cos E,\quad \frac{cy-bz}{\sin d} = \cos F$$

und entweder $\begin{cases} D = 180^\circ - OC \\ E = OB \\ F = OA \end{cases}$ oder $\begin{cases} D = OC \\ F = 180^\circ - OB \\ F = 180^\circ - OA \end{cases}$

je nachdem der sphärische Mittelpunkt O auf der einen oder anderen Seite von MN genommen wird.

§. 374.

Zieht man durch den gegebenen Punkt M, dessen Lage durch die Distanz-Coordinaten a, b, c bestimmt ist, einen Hauptkreis, welcher die Seiten des Coordinaten-Dreiecks in D, E, F schneidet, so gibt es eine Relation unter den Abständen MD, ME, MF der Durchschnitts-Punkte vom festen Punkte M, welche ermittelt werden soll. Zieht man noch CM und CD, so entsteht ein rechtseitiges Dreieck CMD, dessen Seite CD ein Quadrant und worin der Winkel $CDM = 90^\circ - D$ ist. Es ist nun $\cos CM = \sin MD \cos CDM$, oder

1. $c = \sin MD \,.\, \sin D.$

Zieht man noch BE und BM, so entsteht ein zweites rechtseitiges Dreieck BEM, dessen Seite BE der Quadrant und worin der Winkel $BEM = 90^\circ - E$ ist; weil nun $\cos MB = \sin ME \cos BEM$ ist, so ist

2. $b = \sin ME \,.\, \sin E.$

Zieht man endlich AM und AF, so entsteht noch ein drittes rechtseitiges Dreieck AMF, und mittelst desselben erhält man die Formel

3. $a = \sin MF \,.\, \sin F.$

Weil nun $\cos D^2 + \cos E^2 + \cos F^2 = 1$ oder $\sin D^2 + \sin E^2 + \sin F^2 = 2$ ist, so erhält man

$\frac{c^2}{\sin MD^2} + \frac{b^2}{\sin ME^2} + \frac{a^2}{\sin MF^2} = 2$, oder $c^2 (1 + \cot MD^2) + b^2 (1 + \cot ME^2) + a^2 (1 + \cot MF^2) = 2$, und da auch $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ist, so erhält man endlich

$$4.\quad \frac{c^2}{\operatorname{tng} MD^2} + \frac{b^2}{\operatorname{tng} ME^2} + \frac{a^2}{\operatorname{tng} MF^2} = 1.$$

Ferner ist im rechtseitigen Dreiecke CMD offenbar

$$\sin CDM = \sin MC \,.\, \sin CMD, \text{ oder}$$

5. $\cos D = \sin MC . \sin CMD.$

Das rechtseitige Dreieck EMB gibt ebenso die Formel

6. $\cos E = \sin MB . \sin BMF,$

und das rechtseitige Dreieck AMF gibt endlich die Formel

7. $\cos F = \sin MA . \sin AMF.$

Durch diese drei Formeln sind die Winkel CMD, BMD und AMD bestimmt, welche die Linie MD mit den drei Distanzen ihres Punktes M von den drei Ecken des Coordinaten-Dreiecks macht.

Die Quadrate der drei Formeln addirt geben

8. $1 = (1-c^2)\sin CMD^2 + (1-b^2)\sin BMF + (1-a^2)\sin AME^2.$

Auch ist $-\cos CMD = \cot MC \cot MD$, $\cos BMD = \cot MB . \cot ME$ und $-\cos AMD = \cot MA . \cot MF$, also

9.
$$\begin{aligned} \cot MD &= -\operatorname{tng} MC . \cos CMD, \\ \cot ME &= \operatorname{tng} MB . \cos BMD, \\ \cot MF &= -\operatorname{tng} MA . \cos AMD; \end{aligned}$$

und werden diese Werthe in der Formel 4 substituirt, so erhält man

$1 = \sin MC^2 \cos CMD^2 + \sin MB^2 \sin BMD^2 + \sin MA^2 \sin AMD^2$,

welche Formel mit der Formel 8 übereinkommt, denn die Summe beider ist $2 = \sin MC^2 + \sin MB^2 + \sin MA^2$.

§. 375.

Nimmt man den Punkt N in D an, so ist

$$x = \cos AD = -\sin BD, \; y = \cos BD \text{ und } z = o,$$

daher verwandeln sich die Formeln $\cos d = ax + by + cz$,

$$ay - bx = \sin CM . \sin CN \sin MCN = \sin d . \cos D,$$
$$az - cx = \sin BM . \sin BN \sin MBN = \sin d . \cos E,$$
$$cy - bz = \sin AM . \sin AN \sin MAN = \sin d . \cos F,$$

dann in

1. $-a \sin BD + b \cos BD = \cos MD.$
2. $a \cos BD + b \sin BD = \sin CM . \sin pD = \sin MD \cos D,$
3. $c \sin BD = \sin MD \cos E,$
4. $c \cos BD = \sin MD . \cos F,$

aus den Formeln 3 und 4 folgt sogleich noch

5. $$\operatorname{tng} BD = \frac{\cos E}{\cos F}.$$

Nimmt man den Punkt N in E an, so ist

$x = \cos AE$, $y = o$ und $z = \sin AE$, ferner $d = -ME$,

und die allgemeinen Formeln verwandeln sich nun in

6. $a \cos AE + c \sin AE = \cos ME,$
7. $b \cos AE = \sin ME . \cos D,$
8. $b \sin AE = \sin ME . \cos F,$
9. $c \cos AE - a \sin AE = \sin BM \sin Eq = \sin ME \cos E,$

und aus den Formeln 7 und 8 folgt sogleich noch durch Division

10. $\operatorname{tng} AE = \frac{\cos F}{\cos D}$.

Nimmt man den Punkt N endlich in F an, so ist
$x = o$, $y = \cos BF$, $z = \sin BF$ und $d = MF$, also

11. $b \cos BF + c \sin BF = \cos MF$,
12. $a \cos BF = \sin MF \,.\, \cos D$,
13. $a \sin BF = \sin MF \,.\, \cos E$,
14. $c \cos BF - b \sin BF = \sin AM \,.\, \sin Fr = \sin MF \,.\, \cos F$.

Aus den Formeln 12 und 13 folgt sogleich noch

15. $\operatorname{tng} BF = \frac{\cos E}{\cos D}$.

Aus den Formeln 5, 10 und 15 erhält man endlich noch

16. $\operatorname{tng} BD \,.\, \operatorname{tng} AE = \operatorname{tng} BF$.

Es ist nach §. 186 $\frac{\sin DB}{\sin DA} = \frac{\sin BF}{\sin CF} : \frac{\sin AE}{\sin CE}$, und hieraus folgt unmittelbar die so eben auf eine andere Art hergeleitete Formel 16.

§. 376.

Werden in den beiden Formeln $\cos d = ax + by + cz$ und $\sin d = \sqrt{[(ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (cy - bz)^2]}$ die vier Größen a, b, c, d als unveränderlich, hingegen x, y, z als veränderlich angesehen, so behält der Punkt M in der Figur seine Lage, der Punkt N aber ändert die seinige, jedoch so, daß sein Abstand $NM = d$ vom festen Punkte M derselbe bleibt; d. h. der Punkt N beschreibt einen Kreis, dessen Centrum der feste Punkt M und dessen Radius d ist. Da gleichzeitig

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und}$$
$$ax + by + cz = \cos d$$

ist, so kann man nur einer von drei veränderlichen Größen x, y, z willkürliche Werthe beilegen, die Werthe der beiden anderen Größen können dann schon mittelst der genannten beiden Gleichungen berechnet werden, und sind bis auf eine vom Ausziehen der Quadrat-Wurzel herrührende Zweideutigkeit völlig bestimmt. Jede drei zusammengehörige Werthe von x, y, z, d. h. solche, welche den beiden Gleichungen Genüge leisten, bestimmen die Lage eines Punktes der Peripherie. Wir nennen a, b, c die Distanz-Coordinaten des Punktes M, und x, y, z die Distanz-Coordinaten des Punktes N.

Ist der Radius $r = 90^0$, also $\cos d = o$, so ist der Kreis ein Hauptkreis und also

1. $ax + by + cz = o$,

die Gleichung eines Hauptkreises; in ihr ist sowohl $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, als auch $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Die Gleichung des Hauptkreises hat nicht immer diese einfache

Beschaffenheit; multiplicirt man sie mit einem Factor μ und setzt man $\mu a = g$, $\mu b = g'$, $\mu c = g''$, so verwandelt sie sich in

2. $gx + g'y + g''z = o$,

und diese ist die allgemeinere Form der Gleichung eines Hauptkreises, in welcher nun nicht mehr $g^2 + g'^2 + g''^2 = 1$, sondern $= \mu^2 (a^2 + b^2 + c^2) = \mu^2$ ist; daher ist rückwärts

3. $\mu = \sqrt{(g^2 + g'^2 + g''^2)}$.

Man findet also aus der allgemeinen Gleichung 2 eines Hauptkreises die Distanz-Coordinaten seines sphärischen Centrums, indem man zuerst die Größe μ nach der Formel 3 berechnet, nach den Formeln

$$a = \cos AM = \frac{g}{\mu},$$

4. $$b = \cos BM = \frac{g'}{\mu},$$

$$c = \cos CM = \frac{g''}{\mu}.$$

Ist in der Gleichung 2 der Coeffizient $g = o$, so ist $a = o$, also $MA = 90^0$; folglich ist dann der Mittelpunkt des Hauptkreises im Hauptkreise BC enthalten, und geht er also selbst durch die Coordinaten-Ecken A; ist $g' = o$, so geht der Hauptkreis durch die Coordinaten-Ecke B, und sein Centrum ist also in AC enthalten; ist $g'' = o$, so geht der Hauptkreis durch die Ecke C und sein Centrum ist im Hauptkreise AB enthalten.

§. 377.

Wir gehen zur Auflösung der folgenden Aufgabe über: Es sind die Distanz-Coordinaten zweier Punkte m und m' gegeben, man sucht die Gleichung des Hauptkreises, welcher durch die beiden Punkte geht. Es sey der Punkt $m = (\alpha, \beta, \gamma)$, d. h. α, β, γ seien drei Distanz-Coordinaten, und ebenso $m' = (\alpha', \beta', \gamma')$; ferner sei $gx + g'y + g''z = o$ die gesuchte Gleichung des Hauptkreises, welcher also Genüge leisten müssen die Werthe $x = \alpha$, $x = \beta$, $z = \gamma$ und auch die Werthe $x = \alpha'$, $y = \beta'$, $z = \gamma'$. Es ist also

$$g\alpha + g'\beta + g''\gamma = o \text{ und}$$
$$g\alpha' + g'\beta' + g''\gamma' = o.$$

Wird aus diesen Gleichungen g'' eliminirt, so hat man $g(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) + g'(\beta\gamma' - \gamma\beta') = o$ oder

$$\frac{g'}{g} = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\gamma\beta' - \beta\gamma'},$$

und wird g' eliminirt, so erhält man $g(\alpha\beta' - \beta\alpha') + g''(\gamma\beta' - \beta\gamma') = o$ oder

$$\frac{g''}{g} = \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\gamma\beta' - \beta\gamma'}.$$

Gibt man aber der Gleichung $gx + g'y + g''z$ die Gestalt $x + \frac{g'}{g} y + \frac{g''}{g} z$, und substituirt die vorhin gefundenen Werthe, so erhält man schon die gesuchte Gleichung

$$(\gamma\beta' - \beta\gamma') x + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha') y + (\beta\alpha' - \alpha\beta') z = o.$$

Eine andere Art, diese Gleichung herzuleiten ist die folgende. Es seien a, b, c die Distanz-Coordinaten des Centrums des Hauptkreises mm', dann ist nach §. 373, indem man in den Formeln 3 daselbst setzt α, β, γ für a, b, c und α', β', γ' für x, y, z, ferner — c für cos D, b für cos E und a für cos F

$$c = \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\sin mm'},$$

$$b = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\sin mm'},$$

$$a = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\sin mm'}.$$

Die Gleichung des Hauptkreises aber, dessen Mittelpunkt die Distanz-Coordinaten a, b, c hat, ist

$$ax + by + cz = o;$$

werden hierin für a, b, c die Werthe substituirt, und wird der allen Gliedern gemeinschaftliche Nenner

$$\sin mm' = \sqrt{[(\beta\alpha' - \alpha\beta')^2 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2 + (\gamma\beta' - \beta\gamma')^2]}$$

weggelassen, so hat man dieselbe Gleichung, wie vorhin.

§. 378.

Es sei $ax' + by' + cz' = o$ die Gleichung eines Hauptkreises MN in Fig. 211, und der Punkt M in ihm durch die Distanz-Coordinaten x, y, z bestimmt; man soll alle von der Lage des Punktes M und von der Lage der Linie MN überhaupt abhängige Größen durch a, b, c, x, y, z, ausdrücken.

Der Einfachheit nehmen wir an, es sei $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Setzen wir in der Gleichung $ax' + by' + cz' = o$ die Größe $z' = o$, $x' = \cos AD = - \sin BD$ und $y' = \cos BD$, so haben wir $- a \sin BD + b \cos BD = o$ oder

1. $\operatorname{tng} BD = \frac{b}{a}$.

Setzt man $y' = o$, $x' = \cos AE$ und $z' = \sin AE$, so hat man $a \cos AE + c \sin AE = o$ oder

2. $\operatorname{tng} AE = - \frac{a}{c}$.

Setzt man $x' = o$, $y' = \cos BF$ und $z' = \sin BF$, so ist $b \,.\cos BF + c \,.\sin BF = o$ oder

3. $\operatorname{tng} BF = - \frac{b}{c}$.

Damit diese Ausdrücke positiv seien, werden wir c als negativ ansehen. Die drei Winkel D, E, F, unter welchen die Seiten des Coordinaten-Dreiecks von dem Hauptkreise MN geschnitten werden, sind bestimmt durch die Formeln

4. $\cos D = - c$,
5. $\cos E = \quad b$,
6. $\cos F = \quad a$.

Es ist EF die Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks ECF und also $\cos EF = \cot E \cot F$, oder

$$\cos EF = \frac{ab}{\sqrt{(1-a^2)}\sqrt{(1-b^2)}}$$ und hieraus folgt

7. $\cot EF = \frac{ab}{-c}$, ebenso

8. $\cot FD = \frac{-ac}{b}$.

9. $\cot ED = \frac{bc}{a}$.

§. 379.

Zur Weiterführung der Untersuchung ist es nöthig, die Gleichungen der Linien CMp, BMq und AMr, welche durch den gegebenen Punkt M gehen, zu entwickeln. Setzt man in der allgemeinen Gleichung des §. 377 x', y', z' für x, y, z; x, y, z für α, β, γ; $\alpha' = o$, $\beta' = o$, $\gamma' = 1$, so entsteht

$$- yx' + xy' = o \text{ oder } \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x},$$

als Gleichung der Linie CMp; ebenso ist $\frac{z'}{x'} = \frac{z}{x}$ die Gleichung der Linie BMq und $\frac{z'}{y'} = \frac{z}{y}$ die Gleichung der Linie AMr. Setzt man in der Gleichung CMq nun $z' = o$, $x' = \cos Ap$, $y' = \sin Ap$, so hat man

10. $\operatorname{tng} Ap = \frac{y}{x}$.

Setzt man in der Gleichung der Linie BMq, ebenso $y' = o$, $x' = \cos Aq$, $z' = \sin Aq$, so hat man

11. $\operatorname{tng} Aq = \frac{z}{x}$.

Setzt man in der Gleichung der Linie AMr endlich $x' = o$, $y' = \cos Br$, $z' = \sin Br$, so ist

12. $\operatorname{tng} Br = \frac{z}{y}$.

Ferner ist $\operatorname{tng} pB = \operatorname{tng} pMB \,.\, \sin pM = - \operatorname{tng} BMC \,.\, \cos CM$ oder

13. $- \operatorname{tng} BMC = \frac{x}{yx}$.

Aus der Formel $\operatorname{tng} Aq = \operatorname{tng} AMq \,.\, \sin qM$ folgt ebenso

14. $- \operatorname{tng} AMB = \frac{z}{xy}$,

und aus der Formel $\operatorname{tng} Ap = \operatorname{tng} AMp \,.\, \sin pM$ folgt endlich

15. $- \operatorname{tng} AMC = \frac{y}{xz}$.

§. 380.

Nun leiten wir Formeln her, welche sowohl die Größen x, y, z, als auch a, b, c enthalten. Es ist nach §. 373, wenn x, y, z für a, b, c gesetzt wird,

$x = \sin MF \,.\, \sin F$, $y = \sin ME \,.\, \sin E$, $z = \sin MD \,.\, \sin D$;

weil aber $\sin F = \sqrt{(1-a^2)}$, $\sin E = \sqrt{(1-b^2)}$, $\sin D = \sqrt{(1-c^2)}$ ist, so haben wir

$$\sin MF = \frac{x}{\sqrt{(1-a^2)}}, \quad \operatorname{tng} MF = \frac{x}{\sqrt{(1-a^2-x^2)}},$$

16. $$\sin ME = \frac{y}{\sqrt{(1-b^2)}}, \quad \operatorname{tng} ME = \frac{y}{\sqrt{(1-b^2-y^2)}},$$

$$\sin MD = \frac{z}{\sqrt{(1-c^2)}}, \quad \operatorname{tng} MD = \frac{z}{\sqrt{(1-c^2-z^2)}}.$$

Es ist $\operatorname{tng} Eq = \operatorname{tng} (Aq - AE) = \frac{\operatorname{tng} Aq - \operatorname{tng} AE}{1 + \operatorname{tng} Aq \operatorname{tng} AE}$

$= \frac{\frac{z}{x} + \frac{a}{c}}{1 - \frac{az}{cx}} = \frac{cz + ax}{cx - az}$; weil aber auch M ein Punkt von MN, und also auch $ax + by + cz = o$ ist, so haben wir

17. $\operatorname{tng} Eq = \frac{- by}{cx - az} = \frac{by}{az - cx}$.

Die Formel $\operatorname{tng} Fr = \frac{\operatorname{tng} Br - \operatorname{tng} BF}{1 + \operatorname{tng} Br \operatorname{tng} BF}$ gibt $\operatorname{tng} Fr$

$= \frac{\frac{z}{y} + \frac{b}{c}}{1 - \frac{bz}{cy}}$ oder

18. $\operatorname{tng} Fr = \frac{-ax}{cy - bz} = \frac{ax}{bz - cy}$.

Endlich gibt die Formel $\operatorname{tng} pD = \frac{\operatorname{tng} Bp + \operatorname{tng} BD}{1 - \operatorname{tng} Bp \operatorname{tng} BD}$ den Ausdruck

19. $\operatorname{tng} Dp = \frac{-cz}{ay - bx}$.

Weil $\operatorname{tng} ME = \frac{\operatorname{tng} Eq}{\cos E}$, $\operatorname{tng} MF = \frac{\operatorname{tng} Fr}{\cos F}$ und $\operatorname{tng} MD = \frac{\operatorname{tng} Dp}{\cos D}$, so ist

$\operatorname{tng} ME = \frac{-y}{cx - az}$, $\operatorname{tng} MF = \frac{-x}{cy - bz}$, $\operatorname{tng} MD = \frac{z}{ay - bx}$, oder auch

$$\operatorname{tng} MF = \frac{x}{bx - cy}.$$

20. $$\operatorname{tng} ME = \frac{y}{az - cx}.$$

$$\operatorname{tng} MD = \frac{z}{ay - bx}.$$

Diese Ausdrücke stimmen mit den früheren überein, wenn ist

$bz - cy = \sqrt{(1 - a^2 - x^2)}$,
21. $az - cx = \sqrt{(1 - b^2 - y^2)}$,
$ay - bx = \sqrt{(1 - c^2 - z^2)}$.

Von der Richtigkeit dieser Gleichungen überzeugt man sich aber bald.

Es ist nämlich $\sqrt{(1 - a^2 - x^2)} = \sqrt{(1 - a^2 - a^2x^2 - b^2x^2 - c^2x^2)}$ und weil

$-ax = by + cz$, also $a^2x^2 = b^2y^2 + 2bcyz + c^2z^2$ ist, so ist
$\sqrt{(1 - a^2 - x^2)} = \sqrt{(1 - a^2 - b^2y^2 - 2bcyz - c^2z^2 - b^2x^2 - c^2x^2)}$
$= \sqrt{(1 - a^2 - b^2y^2 - 2bcyz - c^2z^2 - b^2 + b^2y^2 + b^2z^2 - c^2 + c^2y^2 + c^2z^2)}$
$= \sqrt{(b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2)}$ oder
$\sqrt{(1 - a^2 - x^2)} = bx - cy$.

Ebenso wird die Richtigkeit der beiden übrigen Gleichungen bewiesen.

Es ist $\operatorname{tng} EMq = \frac{\operatorname{tng} Eq}{\sin Mq}$; $\operatorname{tng} FMr = \frac{\operatorname{tng} Fr}{\sin Mr}$ und

$\operatorname{tng} DMp = \frac{\operatorname{tng} Dp}{\sin Mp}$, und diese drei Formeln geben

$$\text{tng } FMr = \frac{a}{bz - cy} = - \text{tng } DMA,$$

22. $$\text{tng } EMq = \frac{b}{az - cx} = - \text{tng } DMB,$$

$$\text{tng } DMp = \frac{-c}{ay - bx} = - \text{tng } DMC.$$

§. 381.

Man soll durch den Punkt M einen Hauptkreis ziehen, welcher auf dem Hauptkreise EMFD senkrecht steht, und nicht nur die Gleichung dieses Hauptkreises herleiten, sondern auch die Winkel D′, F′, F′ durch a, b, c, x, y, z ausdrücken, unter welchen er die Seiten des Coordinaten-Dreiecks schneidet; ferner die Abstände MD′, ME′, MF′ und die Winkel, welche er mit den Linien MA, MB, MC macht, ebenfalls durch a, b, c, x, y, z ausdrücken. Der Hauptkreis E′F′ steht auf dem Hauptkreise EF senkrecht, wenn er durch sein sphärisches Centrum geht. Es sei O das Centrum von EF und O′ das Centrum von E′, F′. Da $ax' + by' + cz' = o$ die Gleichung des Hauptkreises EF ist, so ist

cos OA = a, cos OB = b, cos OC = c, und ebenso sei
cos O′A = a′, cos O′B = b, cos O′C = c′.

Setzt man in der Gleichung des §. 396 jetzt a, b, c für α, β, γ, ferner x, y, z für α', β', γ' und x′, y′, z′ für x, y, z; so erhalten wir auf der Stelle

$$(cy - bz)\, x' + (az - cx)\, y' + (bx - ay)\, z' = o,$$

oder auch

1. $$(bz - cy)\, x' + (cx - az)\, y' + (ay - bx)\, z' = o,$$

zur gesuchten Gleichung des Hauptkreises E′F′, und weil der Abstand OM der beiden Punkte O und M von einander ein Quadrant, also sin OM = 1 ist, so ist also

$$a' = bz - cy,$$
2. $$b' = cx - az,$$
$$c' = ay - bx,$$

woraus auf der Stelle folgt $aa' + bb' + cc' = o$, welche Gleichung ausdrückt, daß das Centrum eines jeden Hauptkreises allemal in dem darauf senkrechten Hauptkreise enthalten ist. In ähnlicher Weise erhält man die umgekehrten Gleichungen

$$a = c'y - b'z,$$
3. $$b = a'z - c'x,$$
$$c = b'x - a'y.$$

In Anwendung der Formel 2 ist also die Gleichung des Hauptkreises E′F′ einfacher ausgedrückt durch

4. $$a'x' + b'y' + c'z' = o.$$

Die Formeln 21 verwandeln sich nun in

$$a^2 + a'^2 + x^2 = 1 \text{ oder } \cos OA^2 + \cos O'A^2 + \cos MA^2 = 1,$$

5. $$b^2 + b'^2 + y^2 = 1 \text{ oder } \cos OB^2 + \cos O'B^2 + \cos MB^2 = 1,$$

$$c^2 + c'^2 + z^2 = 1 \text{ oder } \cos OC^2 + \cos O'C^2 + \cos MC^2 = 1.$$

Die Einfachheit dieser Formeln rührt daher, daß das Dreieck OMO' wieder ein dreirechtwinkeliges ist, und also dieselben Eigenschaften hat, als das Coordinaten-Dreieck ABC selbst. Ferner erhält man die Formeln

$$x = cb' - bc',$$

6. $$y = ac' - ca',$$

$$z = ba' - ab'.$$

Sowohl die Richtigkeit dieser Gleichungen, als auch die der Gleichungen 3 weiset man nach, wenn man die Werthe von a', b', c' nach den Formeln 2 substituirt. Endlich hat man ähnlich der Gleichung

$$ax + by + cz = o \text{ noch die Gleichung,}$$

7. $$a'x + b'y + c'z = o, \text{ und auch schon die erwähnte Gleichung}$$

$$a'a + b'b + c'c = o.$$

Weil der Fall zum Grunde gelegt wurde, in welchem c negativ ist, so folgt nun nach den Formeln 2, daß b' negativ sei, hingegen a' und c' positiv seien.

§. 382.

Wenn wir nun die früheren, sich auf die Linie EF beziehenden, Formeln auf die Linie E'F' beziehen wollen, so stellen wir uns vor, die Linie EF gehe durch eine Drehung um den Punkt M in die Lage von E'F' über; dabei rückt E abwärts nach E', F aufwärts nach F' und der Punkt D erhält eine Lage, in welcher er der Gegenpunkt von D' ist.

Die Gleichung der Linie E'F' stellen wir uns also vor

$$- a'x' - b'y' - c'z' = o,$$

weil nun a übergeht in $-a'$, b in $-b'$, c in $-c$. Wir erhalten also

$$\cos D' = c' = ay - bx,$$

1. $$\cos E' = -b' = az - cx,$$

$$\cos F' = -a' = cy - bz,$$

in Gemäßheit der Formeln 4, 5, 6 des §. 377, und die Formeln 1, 2, 3 ebendaselbst werden nun.

$$\text{tng } BD' = \frac{-b'}{a'} = \frac{az - cx}{bz - cy},$$

2. $$\text{tng } AE' = \frac{a'}{c'} = \frac{bz - cy}{ay - bx},$$

$$\text{tng } BE' = \frac{-b'}{c'} = \frac{az - cx}{ay - bx}.$$

Weiter ist nach den Formeln 7, 8, 9 im §. 377 nun

$$\cot E'F' = \frac{a'b'}{c'} = \frac{(bz-cy)\,(cx-az)}{ay-bx},$$

3. $$\cot F'D' = \frac{a'c'}{-b'} = \frac{(bz-cy)\,(ay-bx)}{az-cx},$$

$$\cot E'D' = \frac{-b'c'}{a'} = \frac{(az-cx)\,(ay-bx)}{bz-cy}.$$

Die Formeln 17, 18, 19 lassen sich nun also darstellen

$$\operatorname{tng} Eq = \frac{by}{-b'};\ \operatorname{tng} Fr = \frac{ax}{a'},\ \operatorname{tng} Dp = \frac{-cz}{c'}$$

und verwandeln sich also in

$$\operatorname{tng} qE' = \frac{b'y}{b} = -\frac{(az-cz)\,y}{b},$$

4. $$\operatorname{tng} rF' = \frac{a'x}{a} = \frac{(bz-cy)\,x}{a},$$

$$\operatorname{tng} pD' = \frac{c'z}{-c} = \frac{(ay-bx)\,z}{-c}.$$

Die Formeln 20 im §. 379 sind

$$\operatorname{tng} MF = \frac{x}{a'},\ \operatorname{tng} ME = \frac{y}{-b'},\ \operatorname{tng} MD = \frac{z}{c'},$$

weil sich aber verwandelt a' in a, b' in b, c' in c, wenn sich verwandelt a in $-a'$, b in $-b'$, c in $-c'$, so erhalten wir

5. $$\operatorname{tng} MF' = \frac{x}{a},\ \operatorname{tng} ME' = \frac{-y}{b},\ \operatorname{tng} MD' = \frac{z}{-c}.$$

die Formeln

$$\operatorname{tng} FMr = \frac{a}{a'} = -\operatorname{tng} DMA,$$

$$\operatorname{tng} EMp = \frac{b}{-b'} = \operatorname{tng} DMB,$$

$$\operatorname{tng} DMp = \frac{-c}{c'} = -\operatorname{tng} DMC,$$

verwandeln sich nun in

$$\operatorname{tng} F'Mr = \frac{a'}{a} = \operatorname{tng} D'MA,$$

6. $$\operatorname{tng} E'Mq = \frac{b'}{b} = -\operatorname{tng} D'MB,$$

$$\operatorname{tng} D'Mp = \frac{c'}{-c} = -\operatorname{tng} D'MC.$$

Da der Punkt M das Centrum der Linie OO' ist, so ist die Gleichung dieser Linie endlich

7. $$xx' + yy' + zz' = 0.$$

§. 383.

Die vorhergehenden Formeln sind für die analytische Geometrie von großer Wichtigkeit; auf sie werden wir auch bald in einer andern Beziehung zurückkommen.

Wenn der Punkt, durch welchen der neue senkrechte Hauptkreis gehen soll, nicht in der Linie MN selbst enthalten ist, und wir mit L bezeichnen, seine Distanz-Coordinaten aber mit u, v, w, so bestimmen wir wieder das Centrum O des Hauptkreises MN durch die Distanz-Coordinaten a, b, c.

Wenn wir nun in der Gleichung des §. 376 setzen a, b, c für α, β, γ und u, v, w für α', β', γ', ferner x', y', z' für x, y, z, so haben wir auf der Stelle die Gleichung

$$(cv - bw)\,x' + (aw - cu)\,y' + (bu - av)\,z' = o.$$

für den durch den gegebenen Punkt L gehenden und auf MN senkrechten Hauptkreis, dessen Gleichung

$$az' + by' + cz' = o$$

gegeben ist. Bezeichnen wir die Länge des von L auf MN gefällten Perpendikels mit p, so ist $p = 90^{o} \pm OL$ und also $\sin p = \pm \cos OL$; weil aber $\cos OL = au + bv + cw$ ist, so ist auch

$$\pm \sin p = au + bv + cw.$$

Weil aber $a^2 + b^2 + c^2$ nicht $= 1$ ist, so ist

$$\sin p = \pm \frac{au + bv + cw}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}.$$

Ebenso leicht kann auch der Winkel bestimmt werden, unter welchem sich zwei Hauptkreise schneiden, deren Gleichungen

$$ax' + by' + cz' = o \text{ und}$$
$$a'x' + b'y' + c'z' = o$$

gegeben sind. Es sei O das Centrum des ersten Hauptkreises und O' das Centrum des zweiten, der gesuchte Winkel aber $= V$, so ist entweder

$$V = OO' \text{ oder } V = 180^{o} - OO' \text{ und also}$$
$$\cos V = \pm \cos OO' \text{ oder}$$
$$\pm \cos V = aa' + bb' + cc'.$$

Wenn aber $a^2 + b^2 + c^2$ nicht $= 1$ und auch $a'^2 + b'^2 + c'^2$ nicht $= 1$ ist, so erhält man

$$\pm \cos V = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} \cdot \sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)}} \text{ und also}$$

$$\sin V = \sqrt{\frac{(ba' - ab')^2 + (ac' - ca')^2 + (cb' - bc')}{(a^2 + b^2 + c^2)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2)}}.$$

§. 384.

Es ist zuweilen nöthig, wenn die Lage eines Punktes M in Fig. 212 in Beziehung auf ein Coordinaten-Dreieck ABC durch die Distanz-Coordinaten

$$x = \cos MA, y = \cos MB, z = \cos MC$$
gegeben ist, die Lage desselben Punktes M in Beziehung auf ein neues Coordinaten-Dreieck A'B'C' durch die Distanz-Coordination
$$x' = \cos MA', y' = \cos MB', z' = \cos MC'$$
zu bestimmen, unter der Voraussetzung, daß die Lage der beiden Coordinaten-Dreiecke ABC und A'B'C' zu einander bestimmt und gegeben sei; nun werden Formeln gesucht, mittelst welcher man x', y', z' aus x, y, z und umgekehrt diese Distanz-Coordinaten aus jenen berechnen kann. Diese Formeln hängen von der Art und Weise ab, wie die Lage der beiden Coordinaten-Dreiecke zu einander bestimmt worden ist, da diese gegenseitige Lage auf mehr als eine Weise bestimmt werden kann; daher gestattet die vorgelegte Aufgabe auch mehr als eine Auflösung.

Benutzen wir zuerst das Coordinaten-Dreieck A'B'C', so ist nach §. 371
$$\cos MA = \cos A'A \cos A'M + \cos B'A \cos B'M + \cos C'A \cos C'M,$$
$$\cos MB = \cos A'B \cos A'M + \cos B'B \cos B'M + \cos C'B \cos C'M,$$
$$\cos MC = \cos A'C \cos A'M + \cos B'C \cos B'M + \cos C'C \cos C'M,$$
und werden darin die angenommenen Zeichen substituirt, so ist
$$x = \cos A'A \,.\, x' + \cos B'A \,.\, y' + \cos C'A \,.\, x',$$
1. $$y = \cos A'B \,.\, x' + \cos B'B \,.\, y' + \cos C'B \,.\, z',$$
$$z = \cos A'C \,.\, x' + \cos B'C \,.\, y' + \cos C'C \,.\, z'.$$
Benutzen wir aber das Coordinaten-Dreieck ABC, so ist
$$\cos MA' = \cos AA' \,.\, \cos AM + \cos BA' \cos BM + \cos CA' \cos CM,$$
$$\cos MB' = \cos AB' \cos AM + \cos BB' \cos BM + \cos CB' \cos CM,$$
$$\cos MC' = \cos AC' \cos AM + \cos BC' \cos BM + \cos CC' \cos CM,$$
und werden auch hierin die gewählten Zeichen substituirt, so haben wir die Formeln
$$x' = \cos AA' \,.\, x + \cos BA' \,.\, y + \cos CA' \,.\, z,$$
2. $$y' = \cos AB' \,.\, x + \cos BB' \,.\, y + \cos CB' \,.\, z,$$
$$z' = \cos AC' \,.\, x + \cos BC' \,.\, y + \cos CC' \,.\, z,$$
welche man auch durch die Umkehrung der Formeln (1) erhalten würde. Man wird nicht übersehen, daß dieselben 9 unveränderlichen Coeffizienten, welche in den Gleichungen 1 enthalten sind, auch in den Gleichungen 2 vorkommen, aber in einer anderen Ordnung. Diese neun Größen hängen aber von der Bestimmung der Lage der beiden Coordinaten-Dreiecke zu einander ab, und hängen auch so von einander ab, daß wenn drei gegeben sind, welche nicht Distanz-Coordinaten desselben Punktes sind, die sechs übrigen daraus berechnet werden können.

§. 385.

Ehe wir einige Arten der vorhin erwähnten Voraussetzungen machen, und ihnen gemäß die Formeln entwickeln, sehen wir zuerst auf den Zusammenhang zwischen den Distanzen und Winkeln. Die

sechs Winkel A, B, C, A′, B′, C′, sind rechte Winkel. Da A das Centrum von BC und A′ das Centrum von BC′ ist, so ist umgekehrt der Durchschnitts-Punkt F″ das Centrum von AA′ und die Distanz

1. AA′ = Winkel F″.

Weil A′ das Centrum von B′C′ und B das Centrum von AC ist, so ist umgekehrt E″ das Centrum von BA′ und die Distanz

2. BA′ = Winkel E″.

Es ist A′ das Centrum von B′C′ und C das Centrum von AB, also umgekehrt D″ das Centrum von CA′ und die Distanz

3. CA′ = Winkel D″.

Da A das Centrum von BC und B′ das Centrum von A′C′ ist, so ist umgekehrt F′ das Centrum von AB′ und die Distanz

4. AB′ = Winkel F′.

Es sind B und B′ die Mittelpunkte von AC und A′C′; also umgekehrt der Durchschnittspunkt E′ das Centrum von BB′ und die Distanz

5. BB′ = Winkel E′.

Es sind C und B′ die Mittelpunkte von AB und A′C′; also umgekehrt D′ das Centrum von CB′ und die Distanz

6. CB′ = Winkel D′.

Da A und C′ die Mittelpunkte von BC und A′B′ sind, so ist F das Centrum von AC′ und die Distanz

7. AC′ = Winkel F.

Ferner sind B und C′ die Mittelpunkte von AC und A′B′; also ist E das Centrum von BC′ und die Distanz

8. BC′ = Winkel E.

Endlich sind C und C′ die Mittelpunkte von AB und A′B′; also ist umgekehrt D das Centrum von CC′, und die Distanz

9. CC′ = Winkel D.

Jede der neun Distanzen ist also das Maaß eines der neun Winkel, unter welchen die Seiten des einen Coordinaten-Dreiecks von den Seiten des anderen geschnitten werden.

§. 386.

Betrachten wir nun ABC als das ursprüngliche und A′B′C′ als das neue Coordinaten-Dreieck und setzen wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned} a &= \cos AA', & b &= \cos AB' & c &= \cos AC', \\ a' &= \cos BA', & b' &= \cos BB', & c' &= \cos BC', \\ a'' &= \cos CA', & b'' &= \cos CB', & c'' &= \cos CC'; \end{aligned}$$

so sind die Gleichungen des §. 383

$$\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz', \\ 1.\quad y &= a'x' + b'y' + c'z', \\ z &= a''x' + b''y' + c''z, \end{aligned}$$

und umgekehrt

$$x' = ax + a'y + a''z,$$
2. $$y' = bx + b'y + b''z,$$
$$z' = cx + c'y + c''z.$$

Nehmen wir den Punkt M für den Augenblick in B'C' an, so ist $x' = o$ die Gleichung dieses Hauptkreises in Ansehung des Coordinaten-Dreiecks A'B'C' und also die Gleichung desselben Hauptkreises B'C' in Bezug auf das ursprüngliche Coordinaten-Dreieck ABC

3. $ax + a'y + a''z = o.$

Ganz ebenso findet man in Bezug auf das ursprüngliche Coordinaten-Dreieck ABC als Gleichung des Hauptkreises A'C' die folgende

4. $bx + b'y + b''z = o,$

und als Gleichung des Hauptkreises A'B' finden wir

5. $cx + c'y + c''z = o.$

In ähnlicher Weise finden wir in Bezug auf das neue Coordinaten-Dreieck die Gleichungen der drei Hauptkreise, welche die Seiten des ursprünglichen Coordinaten-Dreiecks sind, nämlich

6. $ax' + by' + cz' = o$ als Gleichung des Hauptkreises BC,

7. $a'x' + b'y' + c'z' = o$ als Gleichung des Hauptkreises AC, und

8. $a''x' + b''y' + c''z' = o$ als Gleichung des Hauptkreises AB.

Weil der Punkt C' zugleich in den Hauptkreisen A'C' und B'C' enthalten ist, so müssen seine Distanz-Coordinaten c, c', c'' den Gleichungen dieser beiden Hauptkreise Genüge leisten, daher ist

9. $bc + b'c' + b''c'' = o$ und

10. $ac + a'c' + a''c'' = o,$

und weil der Punkt A' zugleich in den Hauptkreisen A'B' und A'C' enthalten ist, so haben wir noch, da A' die Distanz-Coordinaten a, a', a'' hat,

11. $ba + b'a' + b''a'' = o.$

Weil der Punkt C, dessen Distanz-Coordinaten in Ansehung des neuen Coordinaten-Dreiecks A'B'C' sind a'', b'', c'', zugleich in den Hauptkreisen AC und BC enthalten ist, so ist

12. $a'a'' + b'b'' + c'c'' = o$ und

13. $aa'' + bb'' + cc'' = o;$

und da der Punkt A, dessen Distanz-Coordinaten sind a, b, c, zugleich in den Hauptkreisen AB und AC enthalten ist, so ist noch

14. $aa' + bb' + cc' = o.$

Außerdem ist noch nach §. 370

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,$$
15. $$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \text{ und } b^2 + b'^2 + b''^2 = 1,$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \qquad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1.$$

Ferner haben wir nun in den Formeln des §. 379 zu setzen

a, a', a'' für x, y, z,
c, c', c'' für a, b, c und
b, b', b'' für a', b', c'

wodurch wir in Anwendung der Formeln 3 daselbst erhalten

$$c = b''a' - b'a'',$$
16. $$c' = ba'' - b''a,$$
$$c'' = b'a - ba',$$

und in Anwendung der Formeln 2 daselbst

$$b = c'a'' - a'c'',$$
17. $$b' = c''a - a''c,$$
$$b'' = ca' - ac'.$$

Die Formeln 6 im §. 380 verwandeln sich nun in

$$a = b'c'' - c'b'',$$
18. $$a' = b''c - c''b,$$
$$a'' = bc' - cb'.$$

Nun aber sind die einfachsten Relationen unter den Distanzen der Ecken der beiden Coordinaten-Dreiecke von einander, oder was nach §. 385 dasselbe ist, unter den Winkeln, welche die Seiten der beiden Coordinaten-Dreiecke mit einander machen, sämmtlich in Formeln ausgedrückt. Aber diese Relationen sind zum Theil von der Art, daß sie auseinander hergeleitet werden können. Es gibt eigentlich nur sechs von einander unabhängige Relationen, woraus alle übrigen hergeleitet werden, und eben deswegen können auch aus solchen drei von den neun Größen a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', welche nicht Distanz-Coordinaten desselben Punktes sind, die sechs übrigen durch Rechnung gefunden werden. Ein Blick auf die Figur 212 lehrt schon, daß aus solchen drei Distanzen oder Winkeln, welche nicht durch eine der Gleichungen 15 mit einander verknüpft sind, die neun übrigen auch geometrisch auf eine einfache Weise gefunden werden können.

§. 387.

Es ist ein natürlicher Gedanke, die drei Distanzen AA', BB', CC' der gleichnamigen Ecken von einander (oder auch die Winkel F'', E' und D) als gegeben zu betrachten, und die übrigen Distanzen durch die genannten drei in Formeln ausdrücken. Wir zeichnen diese drei Distanzen, oder ihre Cosinus der bessern Übersicht wegen dadurch aus, daß wir setzen

$$A = \cos AA' = a,$$
$$B = \cos BB' = b',$$
$$C = \cos CC' = c''.$$

Aus den Formeln 16, 17 und 18 im §. 385 heben wir nun die drei hervor, welche die als gegeben betrachteten Größen am meisten enthalten, nämlich

$C = AB - ba'$, $B = AC - ca''$ und $A = BC - c'b''$;

sie enthalten Producte der unbekannten Größen nämlich

1. $ba' = AB - C$, $ca'' = AC - B$, $c'b'' = BC - A$.

Die Gleichungen 15 gruppiren wir also

$$2.\quad \begin{cases} A^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + B^2 + b''^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + C^2 = 1, \end{cases}$$

$$3.\quad \begin{cases} A^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + C^2 = 1, \\ a'^2 + B^2 + c'^2 = 1, \end{cases}$$

$$4.\quad \begin{cases} b^2 + B^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + C^2 = 1, \\ A^2 + b^2 + c^2 = 1. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 2 erhalten wir durch Addition der beiden ersten und durchs Subtrahiren der dritten

$$a'^2 + b^2 = 1 + C^2 - A^2 - B;$$

und da $2a'b = 2AB - 2C$ ist nach der ersten von den Gleichungen (1), so bekommen wir durch Addition und Subtraction

$$(a' + b)^2 = (1 - C)^2 - (A - B)^2 \text{ und}$$
$$(a' - b)^2 = (1 + C)^2 - (A + B)^2.$$

Werden die Differenzen auf der rechten Seite in Factoren aufgelöset und wird die Quadrat-Wurzel ausgezogen, so ist

$$a' + b = \pm\sqrt{[(1 - C - A + B)\ (1 - C + A - B)]},$$
$$a' - b = \pm\sqrt{[(1 + C - A - B)\ (1 + C + A + B)]},$$

setzen wir also der Einfachheit wegen

$$m^2 = 1 + A + B + C,$$
$$n^2 = 1 - B - C + A,$$
$$p^2 = 1 - A - C + B,$$
$$q^2 = 1 - A - B + C,$$

so ist $(a' + b)^2 = (1 - C)^2 - (A - B)^2 = n^2p^2$ und

$$(a' - b)^2 = (1 + C)^2 - (A + B)^2 = m^2q^2;$$

hieraus aber folgt durchs Wurzel-Ausziehen

$$a' + b = \pm np \text{ und } a' - b = \pm mq \text{ oder}$$
$$\cos BA' + \cos AB' = \pm np \text{ und } \cos BA' - \cos AB' = \pm mp.$$

Da AB' in der Figur $> 90^0$, also cos AB' negativ, hingegen cos BA' positiv ist, so ist also um so mehr cos BA' — cos AB' positiv; wir setzen also

$$\cos BA' - \cos AB' = mq \text{ und}$$
$$\cos BA' + \cos AB' = \pm np,$$

woraus folgt

$$a' = \cos BA' = \tfrac{1}{2}\,(\pm np + mq) \text{ und}$$
$$b = \cos AB' = \tfrac{1}{2}\,(\pm np - mq).$$

Außerdem ist $np^2 - m^2q^2 = -4C + 4AB = 4a'b$. eine offenbar negative Differenz, und also $mq > np$, woraus folgt, daß a' positiv und b negativ wird, welches von beiden Vorzeichen wir auch anwenden. Wir setzen

$$a' = \tfrac{1}{2}\,(\alpha np + mq) \text{ und } b = \tfrac{1}{2}\,(\alpha np - mq,$$

und werden demnach [?]st bestimmen, ob $\alpha = +1$ oder $= -1$ zu nehmen sei

Aus den Gleichungen 3 erhalten wir durch Addition der beiden ersten und durch das Subtrahiren der dritten

$c^2 + a''^2 = 1 + B^2 - A^2 - C^2$ und weil $2ca'' = 2AC - 2B$,

so erhalten wir

$(a''+c)^2 = (1-B)^2 - (A-C)^2 = (1-B-A+C)(1-B+A-C) = n^2q^2$,

und

$(a''-c)^2 = (1+B)^2 - (A+C)^2 = (1+B-A-C)(1+B+A+C) = m^2p^2$,

es ist mithin

$a'' + c = \cos CA' + \cos AC' = \pm nq$ und

$a'' - c = \cos CA' - \cos AC' = \pm p$;

da in der Figur $\cos AC'$ negativ und $\cos CA'$ positiv ist, so setzen wir

$a'' - c = mp$ und $a'' + c = \beta nq$, wo $\beta = \pm 1$,

wodurch wir erhalten

$a'' = \frac{1}{2}(\beta nq + mp)$ und $c = \frac{1}{2}(\beta nq - mp)$;

auch ist $n^2q^2 - m^2p^2 = 4a''c = 4(AC - B)$.

Aus den Gleichungen 4 ziehen wir $b''^2 + c'^2 = 1 + A^2 - B^2 - C^2$ und weil $2b''c' = 2BC - 2A$, so ist $(b''+c')^2 = (1-A)^2 - (B-C)^2 = (1-A-B+C)(1-A+B-C) = p^2q^2$, und $(b''-c')^2 = (1+A)^2 - (B+C^2 = (1+A-B-C)(1+A+B+C) = m^2n^2$; also $b''+c' = \pm pq = \cos CB' + \cos BC'$ und $b''-c' = \pm mn = \cos CB' - \cos BC'$.

Weil wieder $\cos BC'$ in der Figur negativ und $\cos CB'$ positiv ist, so setzen wir

$b'' - c' = mn$ und $b'' + c' = \gamma pq$, wo $\gamma = \pm 1$ ist;

hieraus aber folgt $b'' = \frac{1}{2}(\gamma pq + mn$ und $c' = \frac{1}{2}(\gamma pq - mn)$, und noch $p^2q^2 - m^2n^2 = 4b''c' = 4(BC - A)$.

§. 388.

Es bleibt nun noch zu bestimmen, welche Werthe die Zeichen $\alpha = \pm 1$, $b = \pm 1$, $\gamma = \pm 1$ in den Formeln

$a' = \frac{1}{2}(\alpha np + mq)$, $b = \frac{1}{2}(\alpha np - mq)$,

$a'' = \frac{1}{2}(\beta nq + mp)$, $c = \frac{1}{2}(\beta np - mp)$,

$b'' = \frac{1}{2}(\gamma pq + mn)$, $c' = \frac{1}{2}(\gamma pq - mn)$,

bekommen müssen. Da $b'' = ca' - ac'$ und $c' = ba'' - b''a$ ist, so erhält man durch Addition und Subtraction

$b''+c' = ca' + ba'' - a(c' + b''$ und $b'' - c = ca' - ba'' + a(b'' - c)$ oder $(b''+c')(1+a) = ca' + ba''$ und $(b''-c')(1-a) = ca' - ba''$.

Werden in diesen beiden Gleichungen die obigen Werthe substituirt, so erhält man

$(b''+c')(1+a) = \frac{1}{4}[2pq(\alpha\beta n^2 - m^2)]$ und

$(b''-c')(1-a) = \frac{1}{4}[2mn(\beta q^2 - \alpha p^2)]$;

weil aber $n^2 + m^2 = 2(1 + A) = 2(1+a)$ ist, so reduzirt sich die erste Gleichung auf $b'' + c' = -pq$, wenn $\alpha\beta = -1$ ist, woraus man

schließt, daß $\gamma = -1$ sei. Wenn aber $\beta = -\alpha$ ist, so verwandelt sich die zweite Gleichung in $(b''-c')(1-a) = -\frac{1}{2}[2\alpha mn(q^2+p^2)]$ und da $q^2 + p^2 = 2(1-A) = 2(1-a)$ ist, so erhalten wir $b''-c' = -\alpha mn$; es ist mithin $\alpha = -1$, $\beta = +1$ und $\gamma = -1$; hiernach ist also

$$a' = \tfrac{1}{2}(mq - np),\quad b = \tfrac{1}{2}(-mq - np),$$
$$a'' = \tfrac{1}{2}(nq + mp),\quad c = \tfrac{1}{2}(nq - mp),$$
$$b'' = \tfrac{1}{2}(mn - pq),\quad c' = \tfrac{1}{2}(-mn - pq).$$

Diese Formeln stellen den Fall der Figur 212 vor; man kann aber jede der Größen m, n, p, q nach Belieben positiv oder negativ nehmen, wenn es nur in allen Formeln gleichmäßig geschieht. Nehmen wir z. B. p negativ, so bekommen wir

$$a' = \tfrac{1}{2}(mq+np),\quad b = \tfrac{1}{2}(np-mq),$$
$$a'' = \tfrac{1}{2}(nq-mp),\quad c = \tfrac{1}{2}(nq+mp),$$
$$b'' = \tfrac{1}{2}(mn+pq),\quad c' = \tfrac{1}{2}(pq-mn);$$

in dieser Gestalt pflegen diese sinnreichen Formeln, deren Erfindung man dem französischen Mathematiker Monge zuschreibt, gewöhnlich aufgestellt zu werden.

Die erwähnte Mehrförmigkeit in denselben bezieht sich darauf, daß man statt eines der beiden Coordinaten-Dreiecke auch sein Gegendreieck nehmen oder auch die beiden Coordinaten-Dreiecke selbst mit einander vertauschen kann.

§. 389.

Nachdem die Formeln entwickelt sind, mittelst derer man aus den Entfernungen AA′, BB′, CC′ oder den Größen $a = \cos AA'$, $b' = \cos BB'$ und $c'' = \cos CC'$ die Entfernungen der übrigen Ecken der beiden Coordinaten-Dreiecke von einander berechnen kann, beantworten wir die Frage, ob das Dreieck ABC durch eine Drehung um einen Punkt L die Lage des neuen Coordinaten-Dreiecks A′B′C′ erhalten haben könne. Ist eine solche Vorstellung zulässig, so muß

$$LA = LA',\ LB = LB',\ LC = LC'$$

und außerdem der Winkel $ALA' = BLB' = CLC'$ sein. Wir setzen

$$LA = LA' = \alpha,\ LB = LB' = \beta,\ LC = LC' = \gamma$$
$$\text{und Winkel } ALA' = BLB' = CLC' = 2\varphi;$$

als gegeben betrachten wir aber wieder AA′, BB′, CC′; diese Entfernungen erscheinen bei der erwähnten Vorstellung als die Grundlinien von gleichschenkeligen Dreiecken oder als sphärische Sehnen der Kreisbogen, die durch die Endpunkte A, B, C der Radien LA, LB und LC bei einer Drehung um den Punkt L, welche $= 2\varphi$ ist, beschrieben werden. Daher setzen wir

$$AA' = 2A,\ BB' = 2B,\ CC' = 2C,$$

und es ist also $a = \cos 2A$, $b' = \cos 2B$, $c'' = \cos 2C$. Weil die Dreiecke ALA′, BLB′ und CLC′ gleichschenkelig sind, so haben wir die Formeln

$$\sin A = \sin \alpha \,.\, \sin \varphi,$$
$$\sin B = \sin \beta \,.\, \sin \varphi,$$
$$\sin C = \sin \gamma \,.\, \sin \varphi,$$

welche auch also dargestellt werden können

$$a = \cos 2A = \cos \alpha^2 + \sin \alpha^2 \cos 2\varphi = 1 - 2 \sin \alpha^2 \sin \varphi^2,$$
$$b' = \cos 2B = \cos \beta^2 + \sin \beta^2 \cos 2\varphi = 1 - 2 \sin \beta^2 \sin \varphi^2,$$
$$c'' = \cos 2C = \cos \gamma^2 + \sin \gamma^2 \cos 2\varphi = 1 - 2 \sin \gamma^2 \sin \varphi^2.$$

Ferner ist in Beziehung auf jedes der beiden Coordinaten-Dreiecke nach §. 370

$$\cos \alpha^2 + \cos b^2 + \cos \gamma^2 = 1 \text{ oder}$$
$$\sin \alpha^2 + \sin \beta^2 + \sin \gamma^2 = 2,$$

daher erhält man durch die Addition der Formeln 2 auf der Stelle

$$a + b' + c'' = 1 + 2 \cos 2\varphi \text{ oder auch}$$
$$\tfrac{1}{2} [\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C - 1] = \cos 2\varphi,$$

und durch diese Formel ist die Größe der Drehung bestimmt; ist sie berechnet, so findet man die drei Radien α, β, γ nach den Formeln

$$\sin \alpha = \frac{\sin A}{\sin \varphi},$$
$$\sin \beta = \frac{\sin B}{\sin \varphi},$$
$$\sin \gamma = \frac{\sin C}{\sin \varphi}.$$

Man kann auch die Drehung bestimmen, indem man die Quadrate der Gleichungen 1 addirt; dadurch erhält man

$$\sin \varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2} (\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2)}, \text{ und dann ist}$$
$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2 \sin A^2}{\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C}},$$
$$\sin B = \sqrt{\frac{2 \sin B^2}{\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2}},$$
$$\sin \gamma = \sqrt{\frac{2 \sin C^2}{\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2}}.$$

Diese Formeln sind reell, wenn $\sin B^2 + \sin C^2 > \sin A^2$, $\sin A^2 + \sin C^2 > \sin B^2$ und $\sin A^2 + \sin B^2 > \sin C^2$ ist; d. h. construirt man ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten die Abstände AA', BB', CC' sind, so muß der Mittelpunkt des um dieses Dreieck geschriebenen Kreises nicht außerhalb desselben sein; es muß also die Summe je zweier Winkel dieses Dreiecks größer sein, als der dritte; ist diese Bedingung durch die Länge der drei Abstände AA', BB', CC' nicht erfüllt, so kann auch das eine Coordinaten-Dreieck ABC nicht durch eine Drehung um einen festen Punkt L in die Lage gebracht werden, daß A mit A', B mit B' und C mit C' zusammenfällt. Man wird dann aber die beiden Coordinaten-Dreiecke mit anderen Ecken können übereinander fallen lassen.

Da $m^2 = 1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$, $n^2 = 1 + \cos 2A - \cos 2B - \cos 2C$, $p^2 = 1 - \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C$ und $q^2 = 1 - \cos 2A - \cos 2B + \cos 2C$ ist, so finden wir leicht

$$\pm m = 2\cos\varphi,\ \pm n = 2\cos\alpha\sin\varphi,\ \pm p = 2\cos\beta\sin\varphi;$$
$$\pm q = 2\cos\gamma\sin\varphi;$$

sollen in der Figur m, n, p, q positiv sein, so ist zu setzen

$$m = 2\cos\varphi,\ n = 2\cos\alpha\sin\varphi,\ p = -2\cos\beta\sin\varphi,\ q = 2\cos\gamma\sin\varphi,$$

weil in der Figur der Abstand LB oder LB $> 90^0$ und also $-\cos\beta$ positiv ist; dann haben wir

$$a = \cos AA' = 1 - 2\sin\alpha^2\sin\varphi^2 = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2\cos 2\varphi,$$
$$b = \cos AB' = 2\cos\alpha\cos\beta\sin\varphi^2 - 2\cos\gamma\sin\varphi\cos\varphi$$
$$= -\cos\gamma\sin 2\varphi + \cos\alpha\cos\beta(1 - \cos 2\varphi),$$
$$c = \cos AC' = 2\cos\alpha\cos\gamma\sin\varphi^2 + 2\cos\beta\sin\varphi\cos\varphi$$
$$= \cos b\sin 2\varphi + \cos\alpha\cos\gamma(1 - \cos 2\varphi),$$
$$a' = \cos BA' = 2\cos\alpha\cos\beta\sin\varphi^2 + 2\cos\gamma\sin\varphi\cos\varphi$$
$$= \cos\gamma\sin 2\varphi + \cos\alpha\cos\beta(1 - \cos 2\varphi),$$
$$b' = \cos BB' = 1 - 2\sin\beta^2\sin\varphi^2 = \cos\beta^2 + \sin\beta^2\cos 2\varphi,$$
$$c' = \cos BC' = 2\cos\beta\cos\gamma\sin\varphi^2 - 2\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi$$
$$= -\cos\alpha\sin 2\varphi + \cos\beta\cos\gamma(1 - \cos 2\varphi),$$
$$a'' = \cos CA' = 2\cos\alpha\cos\gamma\sin\varphi^2 - 2\cos\beta\sin\varphi\cos\varphi$$
$$= -\cos\beta\sin 2\varphi + \cos\alpha\cos\gamma(1 - \cos 2\varphi),$$
$$b'' = \cos CB' = 2\cos\beta\cos\gamma\sin\varphi^2 + 2\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi$$
$$= \cos\alpha\sin 2\varphi + \cos\beta\cos\gamma(1 - \cos 2\varphi),$$
$$c'' = \cos CC' = 1 - 2\sin\gamma^2\sin\varphi^2 = \cos\gamma^2 + \sin\gamma^2\cos 2\varphi.$$

Setzt man in diesen Formeln -2φ statt 2φ, so verwandelt sich b in a′ oder AB′ in BA′, c in a″ oder AC′ in CA′ und c′ in b″ oder BC′ in CB′ und umgekehrt; d. h. die beiden Coordinaten-Dreiecke ABC und A′B′C′ werden vertauscht, wie auch anderweitig einleuchtet; denn wenn das Dreieck ABC durch die Drehung $+2\varphi$ in die Lage von A′B′C′ kommt, so muß es durch die Drehung -2φ aus dieser Lage in seine ursprüngliche zurückkommen. Die hier aus den Formeln von Menge hergeleiteten Formeln sind zuerst von Euler gefunden worden.

§. 390.

Sieht man in Fig. 212 die Hauptbogen DA und DA′ sammt dem Winkel D als gegeben an, und setzt man

$$DA = \alpha,\ \text{Winkel } ADA' = \beta \text{ und } DA' = \gamma,$$

so können wieder alle Abstände der Ecken der beiden Coordinaten-Dreiecke von einander durch α, β, γ ausgedrückt werden. Am einfachsten ist nun der Ausdruck für CC′, denn es ist nach §. 384 der Abstand $CC' = D$ und also

1. $c'' = \cos CC' = \cos \beta$.

Ferner ist $\cos BC' = \cos BD \cos C'D + \sin BD \sin C'D \cos BDC'$; weil aber $DC = 90^0$, $BD = 90^0 + \alpha$ und $BDC' = 90^0 + \beta$ ist, so bekommen wir

2. $c' = \cos BC' = -\cos \alpha \sin \beta$.

Es ist $\cos AC' = \cos AD \cos C'D + \sin AD \sin C'D \cos ADC'$ und also

3. $c = \cos AC' = -\sin \alpha \sin \beta$.

Da $\cos CB' = \cos DC \cos DB' + \sin DC \sin DB' \cos CDB'$, und in dieser Formel $DC = 90^0$, $DB' = 90^0 + \gamma$ und Winkel $CDB' = 90^0 - \beta$ ist, so bekommen wir

4. $b'' = \cos CB' = \cos \gamma \sin \beta$.

Die Formel $\cos BB' = \cos BD \cos B'D + \sin BD \sin B'D \cos BDB'$ gibt auf der Stelle

5. $b' = \cos BB' = \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \cos \beta$,

und die Formel $\cos AB' = \cos AD \cos B'D + \sin AD \sin B'D \cos D$ gibt

6. $b = \cos AB' = -\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \cos \beta$.

Ferner ist $\cos CA' = \cos DA' \cos DC + \sin DA' \sin DC \cos CDA'$ oder auch

7. $a'' = \cos CA' = \sin \gamma \sin \beta$;

weiter ist $\cos BA' = \cos BD \cos A'D + \sin BD \sin A'D \cos D$, oder auch

8. $a' = \cos BA' = -\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \cos \beta$, und endlich ist $\cos AA' = \cos DA \cos DA' + \sin DA \sin DA' \cos D$, oder auch

9. $a = \cos AA' = \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta$.

§. 391.

Die Wichtigkeit des Gegenstandes wird es rechtfertigen, wenn wir noch eine neue Art, die Lage der beiden Coordinaten-Dreiecke zu einander zu bestimmen, in Anwendung bringen. Wir verbinden die beiden Ecken A und A′ durch den Hauptbogen $AA' = e$, von dessen Verlängerung die Seiten BC und B′C′ in m und m′ geschnitten werden.

Es sei ferner der Winkel $mAC = m$, also $mAB = 90^0 - m$, und der Winkel $nA'C' = m'$, also $m'A'B' = 90^0 - m'$.

Es ist nun $mF'' = m'F'' = 90^0$, weil Am′ auf beiden Linien senkrecht steht, und da $mC = m$, $m'C' = m'$ ist, so ist also

$CF'' = mB = 90^0 - m$ und $C'F'' = m'B' = 90^0 - m'$. Es ist nun zuerst

1. $a = \cos AA' = \cos e$.

Ferner ist $\cos BA' = \cos Bm \cos A'm + \sin Bm \sin A'm \cos BmA'$, und da der Winkel $BmA' = 90^0$, $A'm = 90^0 - e$, $Bm = 90^0 - m$ ist, so haben wir

2. $a' = \cos BA' = \sin m \sin e$.

Die Formel $\cos CA' = \cos A'm \,.\, \cos mC$ gibt

3. $a'' = \cos CA' = \cos m \sin e$.

Es ist $\cos AB' = \cos AA' = \cos B'A' + \sin AA' \sin B'A' \cos AA'B'$; weil aber $B'A' = 90^0$, und Winkel $AA'B + 90^0 - m' = 180^0$, also $AA'B = 90^0 + m'$ ist, so ist

4. $b = \cos AB' = - \sin e \sin m'$.

Es ist $\cos BB' = \cos BF'' \cos B'F'' + \sin BF'' \sin B'F'' \cos F''$ oder weil $BF'' = 180^0 - m$, $B'F'' = 180^0 - m'$ und $F'' = e$ ist, so ist

5. $b' = \cos BB' = \cos m \cos m' + \sin m \sin m \cos e$.

Es ist $\cos CB' = \cos CF'' \cos B'F'' + \sin CF'' \sin B'F'' \cos F''$ und also

6. $b'' = \cos CB' = - \sin m \cos m' + \cos m \sin m' \cos e$.

Da $\cos AC' = \cos Am' \cos C'm'$ ist, so haben wir

7. $c = - \sin e \cos m'$.

Die Formel $\cos BC' = \cos BF'' \cos C'F'' + \sin BF'' \sin C'F'' \cos F''$ gibt

8. $c' = - \cos m \sin m' + \sin m \cos m' \cos e$.

Aus der Formel $\cos CC' = \cos CF'' \cos C'F'' + \sin CF'' \sin C'F'' \cos F''$ bekommen wir endlich

9. $c'' = \sin m \sin m' + \cos m \cos m' \cos e$.

Werden die gefundenen Werthe in den Formeln 1 und 2 des §. 385 substituirt, so ist

$$x = \cos e \,.\, x' - \sin e \sin m' \,.\, y' - \sin e \cos m' \,.\, z',$$
$$y = \sin m \sin e \,.\, x' + [\cos m \cos m' + \sin m \sin m' \cos e]\, y' + [- \cos m \sin m' + \sin m \cos m' \cos e] \,.\, z',$$
$$z = \cos m \sin e \,.\, x' + [- \sin m \cos m' + \cos m \sin m' \cos e]\, y' + [\sin m \sin m' + \cos m \cos m' \cos e] \,.\, z'.$$

Die umgekehrten Formeln sind

$$x' = \cos e \,.\, x + \sin m \sin e \,.\, y + \cos m \sin e \,.\, z,$$
$$y' = - \sin m' \sin e \,.\, x + [\cos m \cos m' + \sin m \sin m' \cos e]\, y + [- \sin m \cos m' + \cos m \sin m' \cos e]\, z,$$
$$z' = - \cos m' \sin e \,.\, x + [- \cos m \sin m' + \sin m \cos m' \cos e]\, y + [\sin m \sin m' + \cos m \cos m' \cos e] \,.\, z.$$

Noch allgemeinere Formeln dieser Art finden sich in des Verfassers Grundrisse der analytischen Sphärik Seite 17—19.

§. 392.

Die Lage eines Punktes M in Fig. 210 kann auch noch auf eine andere Art in Beziehung auf das Coordinaten-Dreieck ABC bestimmt werden. Man nehme eine Ecke, etwa die Ecke C zum Anfangs-Punkte, die beiden von ihm ausgehenden Hauptkreise CA und CB zu Coordinaten-Axen, die dem Anfangs-Punkte gegenüberstehende Seite AB aber zur Cardinale; der Punkt A heißt der Cardinal-Punkt für die Axe CB und B der Cardinal-Punkt für die Axe AC. Werden nun von den Cardinal-Punkten A und B aus Hauptkreise durch den Punkt M gezogen, wovon die Axen in q und r geschnitten werden, so sind Cq und Cr die beiden Axen-Coordinaten des Punktes M, welche zur Bestimmung der Lage des Punktes M dienen. Wurde früher der Punkt M bestimmt durch die Distanz-Coordinaten cos MA=x, cos MB=y, cosMC=z, so können die Größen Cq und Cr leicht durch x, y, z ausgedrückt werden. Da $\frac{\cos Aq}{\cos Cq} = \frac{\cos AM}{\cos CM}$ und $\frac{\cos Br}{\cos Cr} = \frac{\cos BM}{\cos CM}$ ist, so ist also

$$\text{tng } Aq = \frac{x}{z} \text{ und tng } Cr = \frac{y}{z};$$

setzt man also tng Aq = x und tng Cr = y, so hat man also überall

$$x \text{ für } \frac{x}{z} \text{ und } y \text{ für } \frac{y}{z}$$

zu setzen, wenn man die Lage eines Punktes M, welcher früher durch Distanz-Coordinaten angegeben war, nun durch Axen-Coordinaten bestimmen will. Es gewährt auch eine große Abkürzung im Ausdrucke, wenn man nicht die Linien Cq und Cr die Axen-Coordinaten des Punktes M nennt, sondern gerabezu die Größen x = tang Cq und y = tang Cr also nennt.

Wir fanden früher als Gleichung eines Hauptkreises $ax + by + cz = o$; dividiren wir sie durch z, wodurch sie sich in $a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} + c = o$ verwandelt, und setzen wir nun x für $\frac{x}{z}$ und y für $\frac{y}{z}$, so bekommen wir sogleich

$$ax + by + c = o$$

als neue Form der Gleichung eines Hauptkreises, in welcher nun x = tang Cq und y = tang Cq die Lage des Punktes M bestimmen. Die neue Gleichung hat nun eine große Ähnlichkeit mit der Gleichung einer geraden Linie in der Ebene, und dieser Umstand ist von der größten Wichtigkeit für die analytische Geometrie.

Wir haben hier den Begriff der Axen-Coordinaten gestützt auf den der Distanz-Coordinaten; aber die Axen-Coordinaten können auch dann mit Vortheil angewandt werden, wenn der Winkel C, den die Axen CA und CB mit einander machen, kein rechter ist, in welchem Falle der Gebrauch der Distanz-Coordinaten sehr unbequem ist. Auch dann bewahrt die Anwendung der Axen-Coordinaten ihre Ähnlichkeit mit dem Gebrauche der schiefwinkeligen Coordinaten der Planimetrie in allen correspondirenden Rechnungs-Ausdrücken, wie in des Verfassers Grundrisse der analytischen Sphärik ausführlich gezeigt worden ist. Wir dürfen hier also die weitere Ausführung dieses Gegenstandes weglassen, welche ohnehin zu sehr in die analytische Sphärik selbst ausschweifen würde.

Anhang.

§. 393.

Wenn sich drei Scheitel-Linien eines ebenen Dreiecks in Einem Punkte schneiden, so gibt es eine einfache Relation unter den Theilen dieser Scheitel-Linien, aus welcher eine Relation für die correspondirende sphärische Construction hergeleitet werden kann. Es sei in Fig. 210 ACB ein beliebiges sphärisches Dreieck, und es mögen sich die Scheitel-Linien Ar, Bq und Cp desselben im Punkte M schneiden. Man beschreibe einen Kreis um das Dreieck, dessen Mittelpunkt N sein mag; der Kugelradius des Punktes N steht dann auf der Ebene dieses Kreises, und also auch auf dem Sehnendreiecke senkrecht, welches zum sphärischen Dreiecke gehört; es mag diese Ebene im Punkte $\mathfrak{N}$ schneiden. Die Kugelradien der Punkte p, q, r mögen die Seiten des Sehnendreiecks in $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ und der Radius des Punktes M mag das Sehnendreieck in $\mathfrak{M}$ schneiden. Wird der Mittelpunkt der Kugel mit O bezeichnet, und NA = NB = NC = R gesetzt, so ist nach der ebenen Trigonometrie

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{p}}{C\mathfrak{p}} = \frac{O\mathfrak{M}}{OC} \cdot \frac{\sin Mp}{\sin Cp}, \text{ ebenso}$$

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{q}}{B\mathfrak{q}} = \frac{O\mathfrak{M}}{OB} \cdot \frac{\sin Mq}{\sin Bq} \text{ und}$$

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{r}}{A\mathfrak{r}} = \frac{O\mathfrak{M}}{OA} \cdot \frac{\sin Mr}{\sin Ar};$$

weil ferner $\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{p}}{C\mathfrak{p}} + \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{q}}{B\mathfrak{q}} + \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{r}}{A\mathfrak{r}} = 1$ ist nach einem bekannten

Satze der Planimetrie, und weil $OA = OB = OC = OM$ ist, so haben wir durch Addition der vorigen Proportionen

$$\frac{OA}{O\mathfrak{M}} = \frac{\sin Mp}{\sin Cp} + \frac{\sin Mq}{\sin Bq} + \frac{\sin Mr}{\sin Ar};$$

weil das Dreieck $O\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}$ rechtwinkelig ist, so ist $O\mathfrak{N} = O\mathfrak{M}$ cos MN und weil das Dreieck $O\mathfrak{N}A$ in $\mathfrak{N}$ rechtwinkelig ist, so ist auch $O\mathfrak{N} = OA \,.\, \cos R$, also ist $OA \cos R = O\mathfrak{M} \cos MN$, oder $\frac{OA}{O\mathfrak{M}} = \frac{\cos MN}{\cos R}$, mithin ist immer

$$\frac{\sin Mp}{\sin Cp} + \frac{\sin Mq}{\sin Bq} + \frac{\sin Mr}{\sin Ar} = \frac{\cos MN}{\cos R}.$$

Die Summe der drei Verhältnisse auf der linken Seite ist also nicht immer gleichgroß, sondern hängt ab von dem Abstande des Punktes M vom Punkte N; soll die genannte Summe einen gleichen Werth behalten, so muß der Abstand MN derselbe bleiben, d. h. der Punkt M muß in der Peripherie eines kleinen Kreises fortrücken, welcher concentrisch ist mit dem um das Dreieck ABC selbst beschriebenen Kreise.

Anmerkung. Die so eben bewiesene Relation ist zuerst im zweiten Bande des zu Berlin erscheinenden Journals für die reine und angewandte Mathematik Seite 190 ohne Beweis durch den Herrn Prof. Steiner bekannt geworden.

§. 394.

Eine noch einfachere und wie es scheint, wenig bekannte Relation hat Euler gefunden, die wir kurz so herleiten. Es sei der Winkel

$$AMp = \alpha,\ BMp = \beta, \text{ also } AMB = \alpha + \beta,$$

dann ist nach §. 239 Formel 3

$$\cot Mp \,.\, \sin(\alpha+\beta) = \cot MA \sin\beta + \cot MB \sin\alpha, \text{ ebenso ist}$$
$$\cot Mq \,.\, \sin\alpha = \cot MA \sin\beta + \cot MC \sin(\alpha+\beta) \text{ und}$$
$$\cot Mr \,.\, \sin\beta = \cot MB \sin\alpha + \cot MC \sin(\alpha+\beta).$$

Dividiren wir diese Gleichungen durch $\sin(\alpha+\beta)$ und setzen wir $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = m$, $\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = n$, so sind die Formeln

$$\cot Mp = n \cot MA + m \cot MB,$$
$$m \cot Mq = n \cot MA + \cot MC,$$
$$n \cot Mr = m \cot MB + \cot MC,$$

und wird zuerst die zweite, dann die dritte von der ersten subtrahirt, so erhalten wir

$$m = \frac{\cot Mp + \cot MC}{\cot Mq + \cos MB} \text{ und } n = \frac{\cot Mp + \cot MC}{\cot Mr + \cot MA};$$

werden diese Werthe in der ersten Gleichung substituirt, so entsteht

$$\frac{\cot Mp}{\cot Mp + \cot MC} = \frac{\cot MA}{\cot Mr + \cot MA} + \frac{\cot MB}{\cot Mq + \cot MB},$$

welche schon die gesuchte Relation ist. Wir ändern dieselbe noch ein wenig, weil nämlich

$$\frac{\cot Mp}{\cot Mp + \cot MC} = 1 - \frac{\cot MC}{\cot Mp + \cot MC}$$ ist, so erhalten wir

$$\frac{\cot MA}{\cot MA + \cot Mr} + \frac{\cot MB}{\cot MB + \cot Mq} + \frac{\cot MC}{\cot MC + \cot Mp} = 1;$$

gehen wir zu den Tangenten über, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{\operatorname{tng} Mr}{\operatorname{tng} Mr + \operatorname{tng} MA} + \frac{\operatorname{tng} Mq}{\operatorname{tng} Mq + \operatorname{tng} MB} + \frac{\operatorname{tng} Mp}{\operatorname{tng} Mp + \operatorname{tng} MC} = 1,$$

oder auch

$$\frac{\operatorname{tng} MA}{\operatorname{tng} MA + \operatorname{tng} Mr} + \frac{\operatorname{tng} MB}{\operatorname{tng} MB + \operatorname{tng} Mq} + \frac{\operatorname{tng} MC}{\operatorname{tng} MC + \operatorname{tng} Mp} = 2.$$

Auch diese Relationen können leicht aus der correspondirenden planimetrischen hergeleitet werden; die Ebene muß nun so gelegt werden, daß die Kugel davon im Punkte M berührt wird. Geht man zu den Sinus und Cosinus über, so verwandeln sie die Formeln in

$$\frac{\sin Mr \cos MA}{\sin Ar} + \frac{\sin Mq \cos MB}{\sin Bq} + \frac{\sin Mp \cos MC}{\sin Cp} = 1 \text{ und}$$

$$\frac{\sin MA \cos Mr}{\sin Ar} + \frac{\sin MB \cos Mq}{\sin Bq} + \frac{\sin MC \cos Mp}{\sin Cp} = 2.$$

Euler hat dem Beweise dieser Relation und der correspondirenden planimetrischen eine ganze Abhandlung gewidmet, welche in den Commentariis acad. scient Petropalit. vom Jahre 1812 enthalten ist.

Subtrahirt man die erste Gleichung von der zweiten, so bekommt man noch

$$\frac{\sin (MA - Mr)}{\sin (MA + Mr)} + \frac{\sin (MB - Mq)}{\sin (MB + Mq)} + \frac{\sin (MC - Mp)}{\sin (MC + Mp)} = 1.$$

§. 395.

Wenn zwei Winkel in einem Vierecke rechte sind, so haben die Relationen unter den übrigen Winkeln und den Seiten des Vierecks Ähnlichkeit mit den Relationen unter den Seiten und Winkeln eines Dreiecks. Es sei CADB Fig. 213 das Viereck und die Winkel ADB und ACB in ihm seien rechte Winkel. Verlängert man CA und DA über A hinaus, daß CE = DF = 90° wird, so ist E das Centrum von CB und F das Centrum von DB, daher ist um-

gekehrt B das Centrum von EF und $EF + B = 180^\circ$; ferner ist aus demselben Grunde

Winkel $EFA + DB = 90^\circ$ und Winkel $FEA + BC = 90^\circ$; da nun auch
$FA + AD = 90^\circ$ und $EA + AC = 90^\circ$ ist,

so sind die Bestandtheile der Construction des Vierecks ACBD auf die des Dreiecks EAF zurückgeführt. Weil nun $\cos EF = \cos EA \cos FA + \sin EA \sin FA \cos EAF$ ist, so ist also

1. $-\cos B = \sin AC \sin AD + \cos AC \cos AD \cos A.$

Weil $\cos EAF = -\cos E \cos F + \sin E \sin F \cos EF$ ist, so ist also auch

2. $-\cos A = \sin BC \sin BD + \cos BC \cos BD \cos B.$

Es drücken diese beiden Formeln offenbar einen und denselben Zusammenhang aus; vertauscht man A mit B, so verwandelt sich die eine Formel in die andere.

Weil $\sin FA \,.\, \sin F = \sin EA \sin A$ ist, so bekommen wir $\cos AD \cos DB = \cos AC \cos BC$; diese Formel erhält man aber auch sogleich, indem man beachtet, daß jede dieser Größen $= \cos AB$ ist; denn durch das Ziehen der Linie AB wird das Viereck in zwei rechtwinkelige Dreiecke zertheilt. Fällt man von A ein Perpendikel P auf EF, so ist dieses das Complement von AB, und weil $\sin AE \sin AF \sin EAF = \sin P \sin EF$ ist, so bekommen wir

3. $\cos AC \,.\, \cos AD \sin A = \cos AB \,.\, \sin B$; ebenso ist noch
4. $\cos BD \,.\, \cos BC \sin B = \cos AB \,.\, \sin A.$

Nach §. 148 ist

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(EA+FA) = \frac{\cos \frac{1}{2}(F-E)}{\cos \frac{1}{2}(F+E)} \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} EAF \text{ und auch}$$

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(EA-FA) = \frac{\sin \frac{1}{2}(F-E)}{\sin \frac{1}{2}(F+E)} \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} EAF;$$

da aber $F - E = BC - DB$ und $\frac{1}{2}(F+E) = 90^\circ - \frac{1}{2}(BC+BD)$, ferner $EA - FA = AD - AC$, und $\frac{1}{2}(EF+FA) = 90^\circ - \frac{1}{2}(AD+AC)$ ist, so verwandeln sich die Formeln in

$$\cot \tfrac{1}{2}(AD+AC) = \frac{\cos \frac{1}{2}(BC-DB)}{\sin \frac{1}{2}(BC+DB)} \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} A \text{ und}$$

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(AD-AC) = \frac{\sin \frac{1}{2}(BC-BD)}{\cos \frac{1}{2}(BC+BD)} \,.\, \operatorname{tng} \tfrac{1}{2} A,$$

und wird diese durch die vorige dividirt, so entsteht noch

$$\operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(AD-AC) \operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(AD+AC) = \operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(BC-BD) \operatorname{tng} \tfrac{1}{2}(BC+BD).$$

Die Formeln des §. 147 geben

$$5.\quad \begin{cases} \sin \frac{1}{2}(BC+BD) \sin \frac{1}{2} B = \sin \frac{1}{2}(AC+AD) \sin \frac{1}{2} A, \\ \cos \frac{1}{2}(BC-BD) \cos \frac{1}{2} B = \cos \frac{1}{2}(AC+AD) \sin \frac{1}{2} A, \\ \cos \frac{1}{2}(BC+BD) \sin \frac{1}{2} B = \cos \frac{1}{2}(AD-AC) \cos \frac{1}{2} A, \\ \sin \frac{1}{2}(BC-BD) \cos \frac{1}{2} B = \sin \frac{1}{2}(AD-AC) \cos \frac{1}{2} A. \end{cases}$$

Ueberhaupt verwandelt sich jede Formel, welche von den Seiten und Winkeln des Dreiecks EAF gilt, sogleich in eine Formel für das Viereck ACBD.

§. 396.

Die vorhergehenden Betrachtungen haben uns in den Stand gesetzt, die Aufgabe aufzulösen, welche die Herleitung einer Relation unter den drei Perpendikeln betrifft, die von einem Punkte auf die Seiten eines sphärischen Dreiecks herabgelassen werden. Es sei in Fig. 210 $M\gamma = \gamma$ das Perpendikel auf der Seite AB, $M\beta = \beta$ das Perpendikel auf der Seite AC und $M\alpha = \alpha$ das Perpendikel auf der Seite BC.

Es sei der Winkel $\gamma M \beta = A'$, $\alpha M \gamma = B'$ und $\alpha M \beta = C'$, also $A' + B' + C' = 360^0$, dann ist nach §. 394 Formel 2, wenn die Winkel des Dreiecks ABC mit A, B, C bezeichnet werden

$$-\cos A = \sin\gamma \sin\beta + \cos\gamma \cos\beta \cos A',$$
$$-\cos B = \sin\alpha \sin\gamma + \cos\alpha \cos\gamma \cos B',$$
$$-\cos C = \sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta \cos C',$$

außerdem ist $\cos C' = \cos(A' + B') = \cos A' \cos B' - \sin A' \sin B'$, und also $\sin A' \sin B' = \cos A' \cos B' - \cos C'$, folglich $1 - \cos A'^2 - \cos B'^2 + \cos A'^2 \cos B'^2 = \cos A'^2 \cos B'^2 - 2 \cos A' \cos B' \cos C' + \cos C'^2$ und also

$$1 - \cos A'^2 - \cos B'^2 - \cos C'^2 + 2 \cos A' \cos B' \cos C' = 0.$$

Substituirt man in dieser Gleichung die aus den drei vorigen gezogenen Werthe

$$\cos A' = -\frac{\cos A + \sin\gamma \sin\beta}{\cos\gamma \cos\beta},$$
$$\cos B' = -\frac{\cos B + \sin\alpha \sin\gamma}{\cos\alpha \cos\gamma},$$
$$\cos C' = -\frac{\cos C + \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta},$$

so entsteht die Gleichung

$$\cos\alpha^2 \cos\beta^2 \cos\gamma^2 - \cos\alpha^2 (\cos A + \sin\gamma \sin\beta)^2$$
$$- \cos\beta^2 (\cos B + \sin\alpha \sin\gamma)^2 - \cos\gamma^2 (\cos C + \sin\alpha \sin\beta)^2$$
$$- 2(\cos A + \sin\gamma \sin\beta)(\cos B + \sin\alpha \sin\gamma)(\cos C + \sin\alpha \sin\beta) = 0;$$

wird dieselbe entwickelt, so erhält man nach einigen Reductionen die Relation

1. $$\sin A^2 \sin\alpha^2 + \sin B^2 \sin\beta^2 + \sin C^2 \sin\gamma^2 + 2(\cos C + \cos A \cos B) \sin\alpha \sin\beta + 2(\cos B + \cos A \cos C) \sin\alpha \sin\gamma + 2(\cos A + \cos B \cos C) \sin\beta \sin\gamma = 1 - \cos A^2 - \cos B^2 - \cos C^2 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Diese Formel läßt sich noch zusammenziehen; es ist nämlich, wenn die den Winkeln A, B, C gegenüberstehenden Seiten des Dreiecks ABC mit a, b, c bezeichnet werden,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \text{ und also}$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a, \text{ ebenso}$$

$$\cos B + \cos A \cos C = \sin A \sin C \cos b \text{ und}$$

$$\cos C + \cos A \cos B = \sin A \sin B \cos c, \text{ also}$$

$\sin A^2 \sin \alpha^2 + \sin B^2 \sin \beta^2 + \sin C^2 \sin \gamma^2 + 2 \sin A \sin B \cos c \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin A \sin B \cos b \sin \alpha \sin \gamma + 2 \sin B \sin C \cos a \sin \beta \sin \gamma = 1 - \cos A^2 - \cos B^2 - \cos C^2 - 2 \cos A \cos B \cos C.$

Ferner ist $\cos a = \dfrac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$, also

$$\sin a^2 = \frac{1 - \cos A^2 - \cos B^2 - \cos C^2 - 2 \cos A \cos B \cos C}{\sin B^2 \sin C^2},$$

und weil auch nach §. 136 ist $\sin a^2 = \dfrac{4 W^2}{\sin B^2 \sin C^2}$, so ist

$$4 W^2 = 1 - \cos A^2 - \cos B^2 \cos C^2 - 2 \cos A \cos B \cos C,$$

so wie auch

$$4 w^2 = 1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c.$$

In Anwendung des Zeichens W ist also die Gleichung

2. $\sin A^2 \sin \alpha^2 + \sin B^2 \sin \beta^2 + \sin C^2 \sin \gamma^2 + 2 \sin A \sin B \cos c \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin A \sin C \cos b \sin \alpha \sin \gamma + 2 \sin B \sin C \cos a \sin \beta \sin \gamma = 4 W^2.$

Dividirt man diese Gleichung durch W^2, und bedenkt man, daß nach dem Zusatze 4 zu §. 142 ist

$$\frac{\sin A}{W} = \frac{\sin a}{w}, \quad \frac{\sin B}{W} = \frac{\sin b}{w} \text{ und } \frac{\sin C}{W} = \frac{\sin c}{w},$$

so verwandelt sich die Formel in

3. $\sin a^2 \sin \alpha^2 + \sin b^2 \sin \beta^2 + \sin c^2 \sin \gamma^2 + 2 \sin a \sin b \cos c \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin a \sin c \cos b \sin \alpha \sin \gamma + 2 \sin b \sin c \cos a \sin \beta \sin \gamma = 1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos \alpha \cos b \cos c.$

Werden die von den Ecken A, B, C auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Perpendikel mit P, Q, R bezeichnet, so ist

$$\frac{\sin a}{2 w} = \frac{1}{\sin P}, \quad \frac{\sin b}{2 w} = \frac{1}{\sin Q} \text{ und } \frac{\sin c}{2 w} = \frac{1}{\sin R},$$

daher kann die Relation auch also dargestellt werden

$$4.\ \frac{\sin \alpha^2}{\sin P^2} + \frac{\sin b^2}{\sin Q^2} + \frac{\sin \gamma^2}{\sin R^2} = \frac{2 \sin \alpha \sin \beta \cos c}{\sin P \sin R}$$

$$+ \frac{2 \sin \alpha \sin \gamma \cos b}{\sin P \sin R} + \frac{2 \sin \beta \sin \gamma \cos a}{\sin Q \sin R} = 1.$$

Da $\sin M\alpha = \sin Mr . \sin r$ und $\sin P = \sin Ar . \sin r$ also $\frac{\sin M\alpha}{\sin P}$ $= \frac{\sin Mr}{\sin Ar}$ und ebenso $\frac{\sin M\beta}{\sin Q} = \frac{\sin Mq}{\sin Bq}$, wie auch $\frac{\sin M\gamma}{\sin R} = \frac{\sin Mp}{\sin Cp}$ ist, so verwandelt sich die vorige Formel auch in

$$+ \left(\frac{\sin Mp}{\sin Cp}\right)^2 + \left(\frac{\sin Mq}{\sin Bq}\right)^2 + \left(\frac{\sin Mr}{\sin Ar}\right)^2$$

$$+ 2 \cos c . \frac{\sin Mr}{\sin Ar} . \frac{\sin Mq}{\sin Aq} + 2 \cos b . \frac{\sin Mr}{\sin Ar} . \frac{\sin Mp}{\sin Cp}$$

$$+ 2 \cos a . \frac{\sin Mp}{\sin Cp} . \frac{\sin Mq}{\sin Bq} = 1;$$

sie hat nun Ähnlichkeit mit dem Quadrate der im §. 392 bewiesenen Formel, welche auch zu einer bequemen Combination beider benutzt werden kann. Setzt man $\alpha = \beta = \gamma$, so kommt man auf die Formel für den Radius des in das Dreieck geschriebenen Kreises zurück.

§. 397.

Ähnlichkeit mit den so eben hergeleiteten Formeln hat auch die, welche einen Zusammenhang unter den Distanzen eines Punktes M von den Ecken eines Dreiecks ABC in Fig. 210 ausdrückt. Setzen wir jetzt $MA = \alpha'$, $MB = \beta'$, $MC = \gamma'$, den Winkel $BMC = A'$, $AMC = B'$ und $AMB = C'$, dann ist wieder $A' + B' + C' = 360^0$, also

$$1 - \cos A'^2 - \cos B'^2 - \cos C'^2 + 2 \cos A' \cos B' \cos C' = o,$$

ferner ist $\cos A' = \frac{\cos a - \cos \beta' \cos \gamma'}{\sin \beta' \sin \gamma'}$,

$\cos B' = \frac{\cos b - \cos \alpha' \cos \gamma'}{\sin \alpha' \sin \gamma'}$ und

$\cos A' = \frac{\cos c - \cos \alpha' \cos \beta'}{\sin \alpha' \sin \beta'}$, und werden diese Werthe in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält man schon die gesuchte Formel

$$\sin \alpha'^2 \sin \beta'^2 \sin \gamma'^2 - \sin \alpha'^2 (\cos a - \cos \beta' \cos \gamma')^2$$
$$- \sin \beta'^2 (\cos b - \cos \alpha' \cos \gamma')^2 - \sin \gamma'^2 (\cos c - \cos \alpha' \cos \beta')^2$$
$$+ 2 (\cos a - \cos \beta' \cos \gamma') (\cos b - \cos \alpha' \cos \gamma') (\cos c - \cos \alpha' \cos \beta') = o.$$

Die Ähnlichkeit dieser Formel mit der im §. 395 ist groß; setzt man daselbst $90^0 - \alpha$ für α, $90^0 - \beta$ für β, $90^0 - \gamma$ für γ, $180^0 - a$ für A, $180^0 - b$ für B und $180^0 - c$ für C, so verwandelt sich jene Formel in diese; daraus schließt man aber sogleich, daß sich diese Formel werde reduciren lassen auf

1. $\sin a \cos \alpha'^2 + \sin b^2 \cos \beta'^2 + \sin c^2 \cos \gamma'^2 - 2(\cos c - \cos a \cos b) \cos \alpha' \cos \beta' - 2(\cos b - \cos a \cos c) \cos \alpha' \cos \gamma' - 2(\cos a - \cos b \cos c) \cos \beta' \cos \gamma' = 1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c$;

Da ferner $\cos c - \cos a \cos b = \sin a \sin b \cos C$, $\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cos B$ und $\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A$ ist, so kann die Formel auch also dargestellt werden

2. $\sin a^2 \cos \alpha'^2 + \sin b^2 \cos \beta'^2 + \sin c^2 \cos \gamma'^2 - 2 \sin a \sin b \cos C \cos \alpha' \cos \beta - 2 \sin a \sin c \cos B \cos \alpha' \cos \gamma' - 2 \sin b \sin c \cos C \cos \beta' \cos \gamma' = 4 w^2$.

Dividirt man die Gleichung durch $4 w^2$, und bezeichnet man die von den Ecken A, B, C auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Perpendikel mit P, Q, R, so erhält man

3. $$\frac{\cos \alpha'^2}{\sin P^2} + \frac{\cos \beta'^2}{\sin Q^2} + \frac{\cos \gamma'^2}{\sin R^2} - 2 \cos C . \frac{\cos \alpha' \cos \beta'}{\sin P \sin Q} - 2 \cos B . \frac{\cos \alpha' \cos \gamma'}{\sin P \sin R} - 2 \cos C . \frac{\cos \beta' \cos \gamma'}{\sin Q \sin R} = 1.$$

Wird in der Formel 1 gesetzt $\alpha' = \beta' = \gamma' = r$, so kommt man auf die Formel zurück, die den Radius des um das Dreieck geschriebenen Kreises durch die Seiten desselben ausdrückt, nämlich auf

$$\operatorname{tng} r^2 = \frac{2(1 - \cos a)(1 - \cos b)(1 - \cos c)}{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c + 2 \cos a \cos b \cos c}.$$

§. 398.

Die Formel 1 oder 2 kann auch benutzt werden, um den Radius eines Kreises zu berechnen, welcher drei gegebene Kreise berührt; zu diesem Ende formen wir die Formel 2 zuerst um, indem wir dieselbe mit 2 multipliciren; dann ist $2 \cos \alpha'^2 = 1 + \cos 2\alpha'$, $2 \cos \beta'^2 = 1 + \cos 2\beta'$, $2 \cos \gamma'^2 = 1 + \cos 2\gamma'$, $2 \cos \alpha' \cos \beta' = \cos(\alpha' - \beta') + \cos(\alpha' + \beta')$, $2 \cos \alpha' \cos \gamma') = \cos(\alpha' - \gamma') + \cos(\alpha' + \gamma')$, $2 \cos \beta' \cos \gamma' = \cos(\beta' - \gamma') + \cos(\beta' + \gamma')$, und also $\sin a^2 \cos 2\alpha' + \sin b^2 \cos 2\beta' + \sin c^2 \cos 2\gamma' - 2 \sin a \sin b \cos C \cos(\alpha' + \beta') - 2 \sin a \sin c \cos B \cos(\alpha' + \gamma') - 2 \sin b \sin c \cos C \cos(\beta' + \gamma') = 2 - 2 \cos a^2$

$- 2 \cos b^2 - 2 \cos c^2 + 4 \cos a \cos b \cos c - \sin a^2 - \sin b^2 - \sin c^2 + 2 \sin a \sin b \cos C \cos (\alpha' - \beta') + 2 \sin a \sin c \cos B \cos (\alpha' - \gamma') + 2 \sin b \sin c \cos C \cos (\beta' - \gamma')$.

Der Ausdruck auf der rechten Seite, welchen wir mit λ bezeichnen, läßt sich noch reduciren, wodurch man erhält $\lambda = - 1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 4 \cos a \cos b \cos c + 2 \sin a \sin b \cos C \cos (\alpha' - \beta') + 2 \sin a \sin c \cos B \cos (\alpha' - \gamma') + 2 \sin b \sin c \cos C \cos (\beta' - \gamma')$.

Es seien nun A, B, C die Mittelpunkte der drei gegebenen Kreise und α, β, γ ihre Radien; M sei der Mittelpunkt des gesuchten Kreises und r sein Radius; dann ist

$$\alpha' = r + \alpha, \ \beta' = r + \beta, \ \gamma' = r + \gamma,$$

wenn der Kreis um M die gegebenen Kreise ausschließend berühren soll; hieraus folgt $\cos (\alpha' - \beta') = \cos (\alpha - \beta)$, $\cos (\alpha' - \gamma') = \cos (\alpha - \gamma)$ und $\cos (\beta' - \gamma') = \cos (b - \gamma)$, und es ist mithin

$$\lambda = - 1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 4 \cos a \cos b \cos c + 2 \sin a \sin b \cos C \cos (\alpha - \beta) + 2 \sin a \sin c \cos B \cos (\alpha - \gamma) + 2 \sin a \sin c \cos B \cos (\alpha - \gamma) + 2 \sin b \sin c \cos A \cos (\beta - \gamma)$$

ein Ausdruck, dessen sämmtliche Glieder bekannt sind, oder aus den gegebenen Größen leicht berechnet werden können; die Gleichung selbst ist nun

$$\sin a^2 \cos (2r + 2\alpha) + \sin b^2 \cos (2r + 2\beta) + \sin c^2 \cos (2r + 2\gamma) - 2 \sin a \sin b \cos C \cos (2r + \alpha + \beta) - 2 \sin a \sin c \cos B (2r + \alpha + \gamma) - 2 \sin b \sin c \cos A \cos (2r + \beta + \gamma) = \lambda,$$

und sie kann durch Entwickelung umgeformt werden in eine Gleichung von der Form

$$m \cos 2r - n . \sin 2r = \lambda.$$

Man findet aber durch die wirkliche Entwickelung

$$m = \sin a^2 \cos 2\alpha + \sin b^2 \cos 2\beta + \sin e^2 \cos 2\gamma - 2 \sin a \sin b \cos C \cos (\alpha + \beta) - 2 \sin a \sin c \cos B \cos (\alpha + \gamma) - 2 \sin b \sin c \cos A \cos (\beta + \gamma),$$ und

$$n = \sin a^2 \sin 2\alpha + \sin b^2 \sin 2\beta + \sin c^2 \sin 2\gamma - 2 \sin a \sin b \cos C \sin (\alpha + \beta) - 2 \sin a \sin c \cos B \sin (\alpha + \gamma) - 2 \sin b \sin c \cos A \sin (\beta + \gamma);$$

und berechnet man nicht nur m und n, sondern auch eine Hülfslinie ν nach der Formel

$$\text{tng}\ \nu = \frac{n}{m},$$

so ist $\cos 2r - \text{tng}\ \nu . \sin 2r = \frac{\lambda}{m}$, und also

$$\cos (2r+\nu) = \lambda . \frac{\cos \nu}{m} = \lambda . \frac{\sin \nu}{n}.$$

Nach dieser Formel kann ein Hauptbogen $2r+\nu=\nu'$ berechnet werden, daraus findet man dann sofort $r = \frac{1}{2}(\nu'-\nu)$.

Ist aber der Radius des gesuchten Kreises bekannt, so ist auch die Lage seines Mittelpunktes bekannt.

Soll der Kreis um M die gegebenen Kreise nicht ausschließend, sondern einschließend oder innerlich berühren, so hat man die Gleichungen

$$\alpha' = r - \alpha,\ \beta' = r - \beta,\ \gamma' = r - \gamma;$$

man hat also in den gefundenen Formeln nur überall $-\alpha$ für α, $-\beta$ für β und $-\gamma$ für γ zu setzen; dabei bleiben aber λ und m ungeändert und n verwandelt sich in $-$ n, also ν in $-\nu$; die Gleichung selbst verwandelt sich also in

$$\cos (2r'-\nu) = \lambda . \frac{\cos \nu}{m} = \lambda . \frac{\sin \nu}{n},$$

wenn man den Radius des gesuchten Kreises nun mit r' bezeichnet. Es ist also $2r' - \nu = 2r + \nu$, oder auch

$$\nu = r' - r;$$

die angewandte Hülfslinie ν ist also der Unterschied der beiden unbekannten Radien r und r'; man kann eben deswegen die beiden Formeln auch also darstellen:

$$\text{tng}\ (r'-r) = \frac{n}{m} \text{ und}$$

$$\cos (r'+r) = \lambda . \frac{\cos (r'-r)}{m} = \lambda . \frac{\sin (r'-r)}{n}.$$

Die entwickelten Formeln finden eine vierfache Anwendung, und also außer der schon erwähnten noch eine dreifache; setzt man nämlich in den früheren Formeln $-\alpha$ statt α, so erhält man die Radien r' und r für zwei neue Kreise; setzt man $-\beta$ statt β, so erhält man die Radien eines dritten Paares von Kreisen; setzt man endlich $-\gamma$ statt γ, so erhält man die beiden Radien eines vierten Paares von Kreisen — man erhält also, wie auch schon im §. 326 vorkam, im Allgemeinen acht Radien für ebensoviele Kreise, wovon jeder die drei gegebenen Kreise berührt, die auch zum Theil oder sämmtlich Hauptkreise sein können. Soll der gesuchte Kreis durch einen oder mehrere gegebene Punkte gehen, so kann man sich auch einen solchen Punkt als einen Kreis vorstellen, dessen Radius = o ist. Daher enthalten die entwickelten Formeln die vollständige arithmetische

Auflösung des Problems der Tactionen, soweit es in den Bereich der elementaren Sphärik fällt. Die Formeln für λ, m, n können zur Abkürzung der Rechnungen in bestimmten Zahlen noch viel bequemer dargestellt werden, womit wir uns hier aber nicht aufhalten.

§. 399.

Man kann die im §. 396 entwickelte Gleichung (1) auch noch aus einem anderen Gesichts-Punkte betrachten; faßt man nämlich in Fig. 210 ABMC als ein Viereck auf, dessen Seiten also AB, BM, MC, CA sind, so sind AM und CB die beiden Diagonalen dieses Vierecks, und die hergeleitete Gleichung, die man nun allenfalls noch anders ordnen wird, drückt also auch eine Relation unter den vier Seiten und den beiden Diagonalen eines sphärischen Vierecks aus. Es gibt aber noch andere bemerkenswerthe Relationen, welche die sechs Linien, wodurch vier Punkte mit einander verbunden werden und die Winkel betreffen, unter welchen sie sich schneiden. Es sei in Fig. 214 ein solches Viereck, seine Diagonalen mögen sich in O schneiden. Setzt man der Kürze wegen für den Augenblick $OB = \alpha$, $OA = \beta$, $OC = \gamma$ und $OD = \gamma$, ferner den Winkel $AOB = O$, so ist

$$\cos AB = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos O \text{ und}$$
$$\cos CD = \cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta\cos O;$$
ferner $$\cos AD = \cos\beta\cos\delta + \sin\beta\sin\delta\cos O,$$
$$\cos BC = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma\cos O;$$

entwickelt man die Producte $\cos AB \,.\, \cos CD$ und $\cos AD \cos BC$, so findet man ihren Unterschied $\cos AB \,.\, \cos CD - \cos AD \cos BC = \cos\delta\cos\alpha\,(\cos\gamma\sin\beta + \sin\gamma\cos\beta) \,.\, \cos O + \sin\delta\cos\alpha\,(\cos\gamma\sin\beta + \sin\gamma\cos\beta)\cos O = \sin(\beta+\gamma)\sin(\alpha+\delta)\cos O$, oder auch

1. $\cos AB \,.\, \cos CD = \cos AD \,.\, \cos BC + \sin AC \,.\, \sin BD \cos AOB.$

Die durch diese Formel ausgedrückte Relation ist nun eine allgemeine, d. h. sie gilt immer, wenn man auch irgend zwei von den vier Punkten A, B, C, D in der Formel permutirt, nur müssen dann jede zwei gegenüberstehende Seiten des Vierecks bis zum Schneiden verlängert werden, damit der Scheitel des in der Formel verlangten Winkels construirt werde.

Vertauscht man z. B. A mit B, so erhält man

$$\cos AB \cos CD = \cos BD \cos AC + \sin BC \,.\, \sin AD \cos AO'B,$$

wenn man unter $AO'B$ den Winkel versteht, unter welchem sich BC und AD schneiden.

Es gibt eine ähnliche und ebenso allgemeine Relation unter den Winkeln eines Vierecks. Es sei der Winkel $BAD = A$, $ABC = B$, $BCD = B$, $ADC = D$; ferner sei $DCA = \gamma$ und $BCA = \gamma'$, $DAC = \alpha$, $BAC = \alpha'$, dann ist

$$\cos D = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos AC$$ und
$$\cos B = -\cos\alpha'\cos\gamma' + \sin\alpha'\sin\gamma'\cos AC;$$ ferner
$$\cos O' = \cos\alpha\cos\gamma' + \sin\alpha\sin\gamma'\cos AC$$ und
$$\cos O'' = \cos\alpha'\cos\gamma + \sin\alpha'\sin\gamma\cos AC;$$
aus diesen Formeln erhält man $\cos O' \cos O'' - \cos B \cos D = \sin(\alpha+\alpha')\sin(\gamma+\gamma')\cos AC$ oder

2. $\cos O' \cos O'' = \cos B \cos D + \sin A \sin C \cos AC.$

Die beiden Formeln 1 und 2 oder die dadurch ausgedrückten Beziehungen sind durch das Reciprocitäts-Gesetz mit einander verknüpft, daher läßt sich von der einen auch ein Schluß auf die andere machen.

§. 400.

Werden die beiden Diagonalen AC und BD des Vierecks ABCD halbirt, und werden ihre Mitten durch den Hauptbogen MN mit einander verbunden, so ist das vierfache Product aus dem Cosinus dieser Linie und den Cosinus der halben Diagonalen so groß als die Summe der Cosinus der Seiten des Vierecks.

Zieht man noch die Hülfslinien AN und CN, so ist
$$\cos AB = \cos BN \cos AN + \sin BN \sin AN \cos BNA$$ und
$$\cos AD = \cos DN \cos AN - \sin DN \sin AN \cos BNA,$$
daher erhält man durch Addition
$$\cos AB + \cot AD = 2 \cos \tfrac{1}{2} BD \cos AN;$$ ganz ebenso ist aber auch
$$\cos CB + \cos CD = 2 \cos \tfrac{1}{2} BD \cos CN$$ und
$$\cos AN + \cos CN = 2 \cos \tfrac{1}{2} \cos MN;$$
addirt man aber die beiden ersten Gleichungen, so erhält man vermöge der dritten sofort
$$\cos AB + \cos BC + \cos CD + \cos DA = 4 \cos \tfrac{1}{2} \cos \tfrac{1}{2} BD \cos MN.$$

§. 401.

Sind A, B, C, D in Fig. 215 die vier Winkel eines Vierecks ABCD, dessen Gegenseiten sich in E und F unter den Winkeln AEB = E und AFD = F schneiden, und halbirt man die Nebenwinkel von E und F durch GE und GF, so ist immer
$$\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 4 \sin \tfrac{1}{2} E \sin \tfrac{1}{2} F \cos G.$$

Verlängert man GE, FD und FA, bis sie sich in g und f schneiden, so ist der Winkel $AEf = 90^0 - \frac{1}{2} E$ und also $BEF = 90^0 + \frac{1}{2} E$; ferner $CEA = 90^0 - \frac{1}{2} F$ und $BEG = 90^0 + \frac{1}{2} F$. Es ist nun

$\cos B = - \cos BEf \cos f + \sin BEf \sin f \cos Ef = \sin \frac{1}{2} E$
$\cos f + \cos \frac{1}{2} E \sin f \cos Ef$,

ferner $- \cos A = - \cos AEF \cos f + \sin AEf \sin f \cos Ef$, und also

$$\cos A = \sin \tfrac{1}{2} E \cos f - \cos \tfrac{1}{2} F \sin f \cos Ef;$$

man erhält also durch Addition

$$\cos A + \cos B = 2 \sin \tfrac{1}{2} E \cos f; \text{ ganz ebenso ist}$$
$$\cos C + \cos D = 2 \sin \tfrac{1}{2} E \cos g \text{ und}$$
$$\cos f + \cos g = 2 \sin \tfrac{1}{2} F \cos G;$$

aus den beiden ersten Gleichungen erhält man aber durch Addition $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 2 \sin \frac{1}{2} F (\cos f + \cos g)$, und in Anwendung der dritten Gleichung ist die Summe also $4 \sin \frac{1}{2} E \sin \frac{1}{2} F \cos G$.

Die so eben bewiesene Relation gilt unverändert auch von den Winkeln eines ebenen Vierecks, und ist mit der im §. 400 hergeleiteten durch das Gesetz der Reciprocität verknüpft.

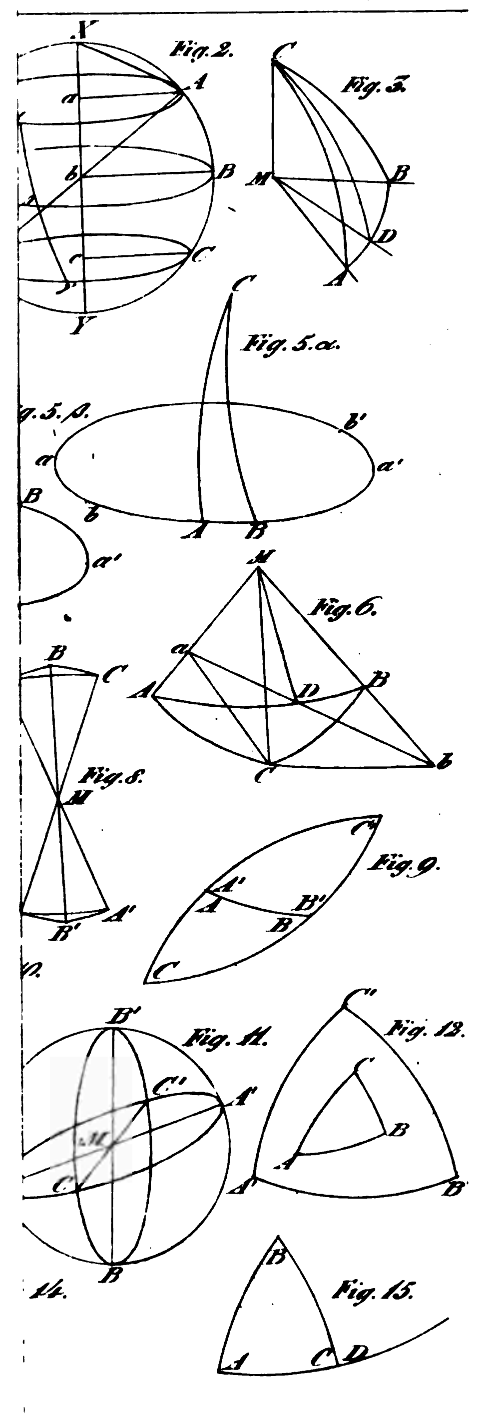
Verzeichniß

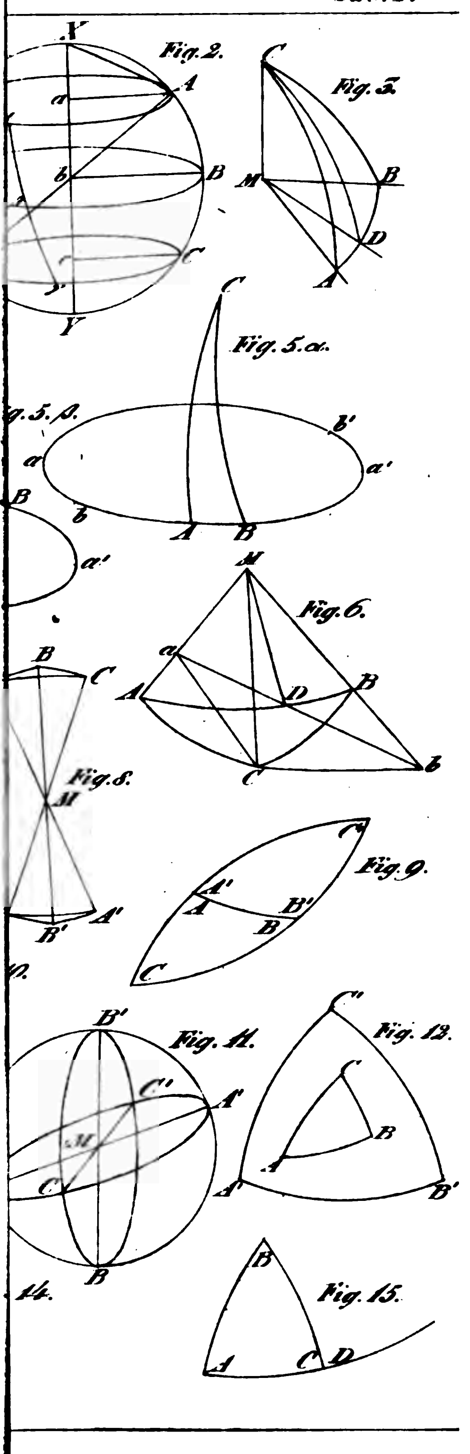
einiger Fehler, um deren Verbesserung der geneigte Leser gebeten wird.

Seite 9 Zeile 11 von unten lies: und B für und A.
„ 10 „ 1 u. 2. v. u. l.: welches später nur in einigen Beispielen vorkommen wird, für: wovon später ausführlich gehandelt wird.
„ 47 „ 11 v. u. l.: in Einem für in einem.
„ 60 „ 6 v. u. l.: welcher die Mitten der beiden
„ 68 „ 11 v. u. l: 90^0 für 90.
„ 80 „ 3 v. o. ist zu ergänzen: verwandelt.
„ 87 „ 13 v. u. l.: $=\sqrt{}$ für $-\sqrt{}$.
„ 100 „ 7 v. o. l.: $\sin\frac{1}{2}(E+B)$ für $tng\frac{1}{2}(+B)$.
„ 102 „ 2 v. o. l.: bewiesene für bewiese.
„ 103 „ 3 v. u. l.: sin für tin.
„ 118 „ 2 u. 3 v. u. l.: $m=\frac{1}{2}(180^0-a+b), n=\frac{1}{2}(180^0-c)$.
„ 120 „ 20 v. o. t.: $tng\frac{1}{2}(t-c)$ für $tng\frac{1}{2}s-c)$.
„ 121 „ 7 v. o. l.: $t-a$ für $s-a$.
„ 121 „ 14 v. o. l.: Viertel-Perimeter für Viertel-Permiter.
„ 121 „ 10 v. u. l.: Zusatze.
„ 125 „ 11 v. u. l.: $\sin\frac{1}{4}\triangle \sin\frac{1}{4}\triangle''$ für $tin\frac{1}{4}\triangle \sin\frac{1}{4}\triangle''$.
„ 131 „ 19 v. u. l.: sin für tin.
„ 139 „ 10 v. u. l.: tng Pq für sin Pq.
„ 187 „ 14 v. o. l.: $\frac{\sin VB}{tng\, Vb}\sin AC=\frac{\sin VA}{tng\, Va}\sin BC+\frac{\sin VC}{tng\, Vc}\sin AB$.
„ 221 „ 8 v. u. l.: $\frac{1}{2}$ für $\frac{2}{2}$.
„ 222 „ 12 v. u. l.: $\frac{1}{2}($ für $\frac{1}{1}$.
„ 222 „ 2 v. u. l: $\frac{1}{2}$ für $\frac{1}{0}$.
„ 229 „ 8 v. o. l.: , also $\frac{1}{2}(\alpha''+\beta'')=90^0$ hinter 180^0.
„ 264 „ 13 v. u. l.: cos r — für cos — r.
„ 287 „ 12 v. o. l.: g für g^2.
„ 287 „ 16 v. o. l.: w für W.
„ 287 „ 17 v. o. l.: $\alpha\beta\gamma\delta$ für $\alpha\gamma\delta$.
„ 287 „ 23 v. o. l.: 3 für 2 vor der Formel.
„ 294 „ 2 v. u. l.: $\sqrt{}$ für $+$ vor $(\alpha'\beta'+\gamma'\delta')$.
„ 302 „ 13 v. u. l.: seine hinter seien.

Durch ein Versehen kommen in den Steindruck-Tafeln die Nummern 210 und 211 zweimal vor, obgleich die vier damit bezeichneten Figuren verschieden sind.

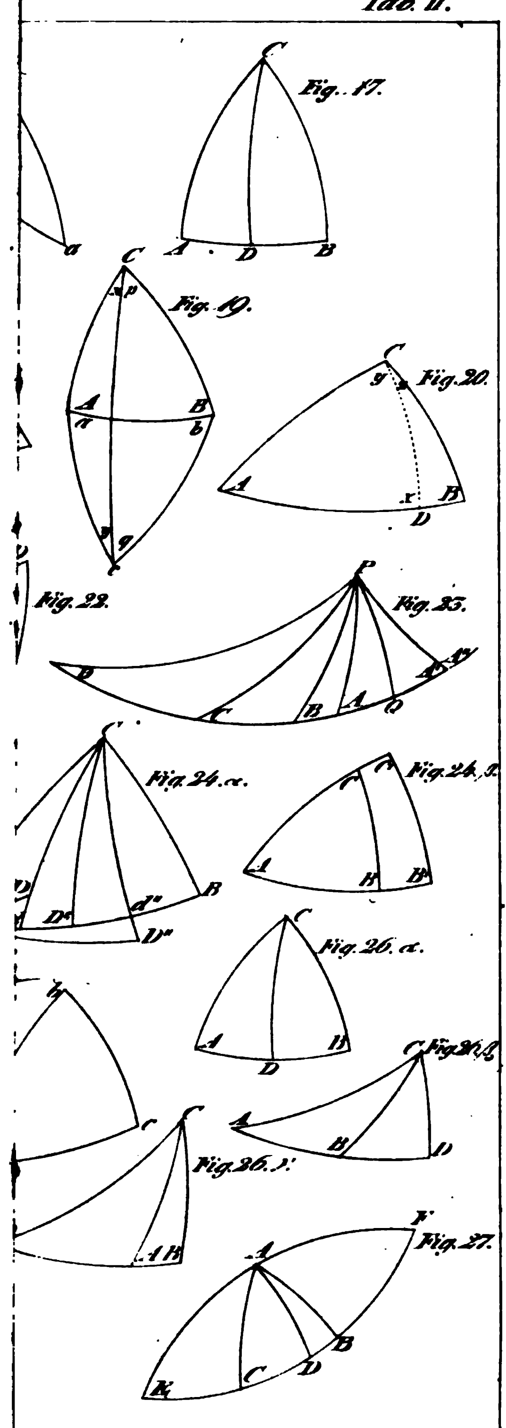
Inhalt.

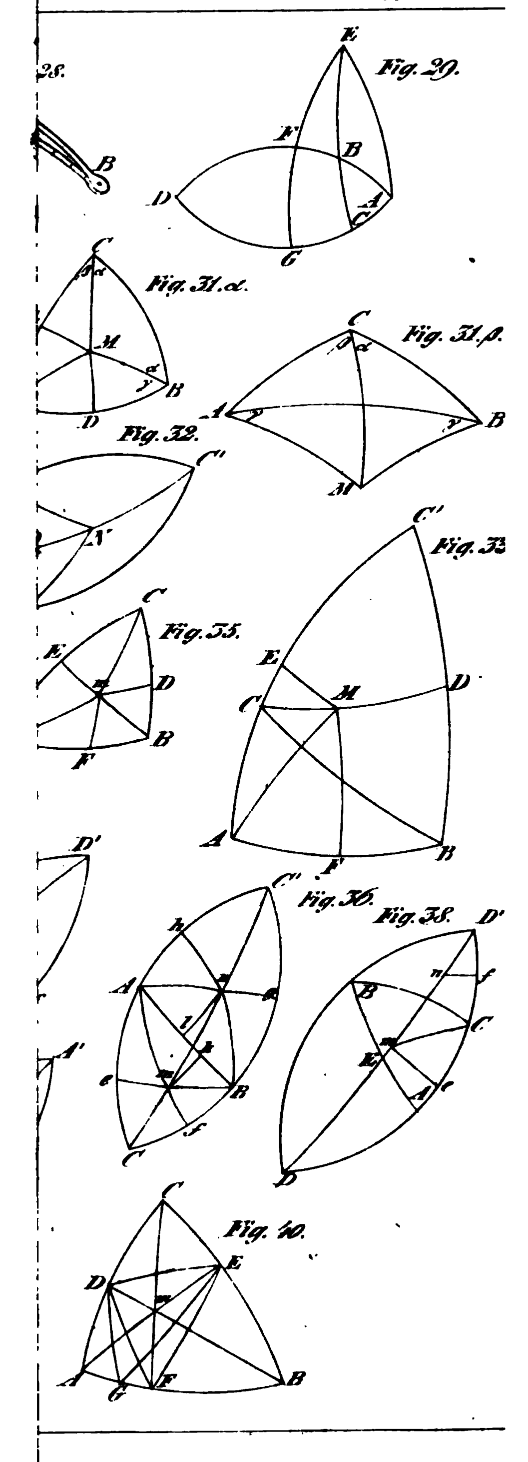

Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5. α.
g. 5. β.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 12.
14.
Fig. 15.



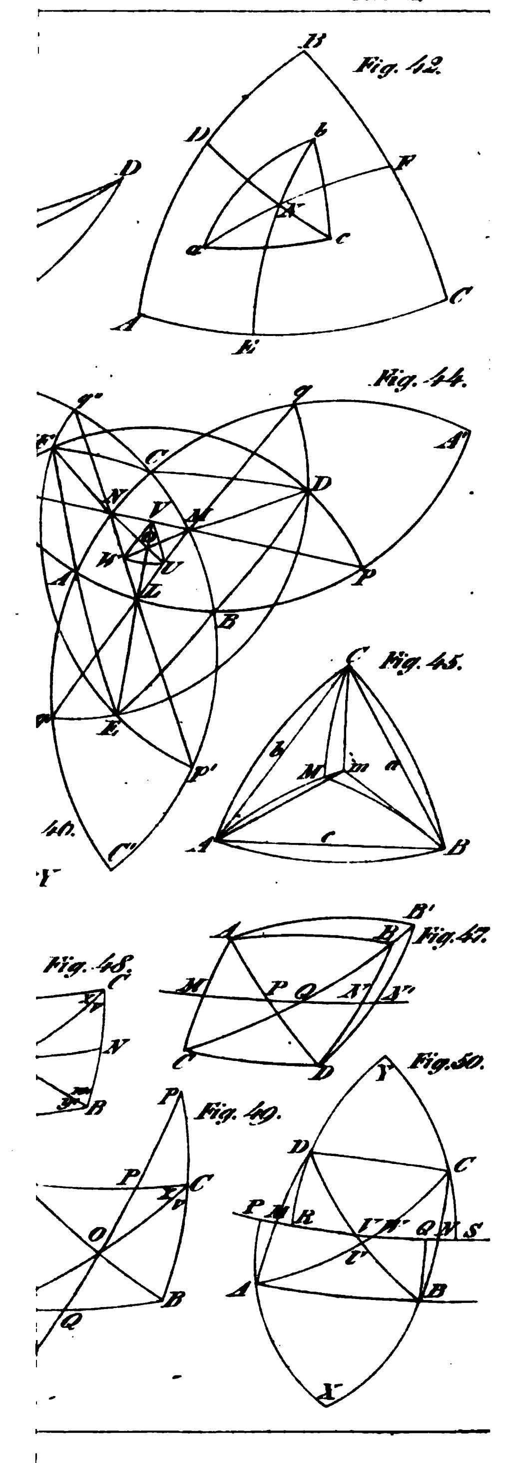
Tab. I.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5. α.
g. 5. β.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 9.
10.
Fig. 11.
Fig. 12.
14.
Fig. 15.

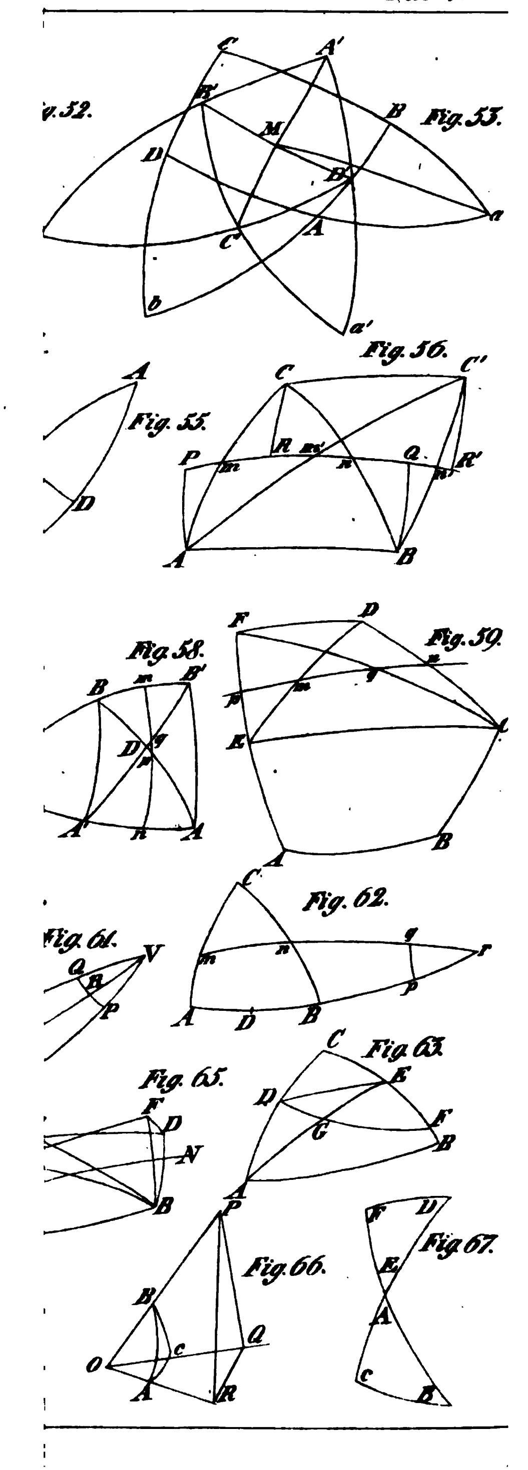
Tab. II.




Tab. III.
28.
Fig. 29.
Fig. 31. α.
Fig. 31. β.
Fig. 32.
Fig. 33
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 38.
Fig. 40.

Tab. IV.





g. 52.
Fig. 53.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.

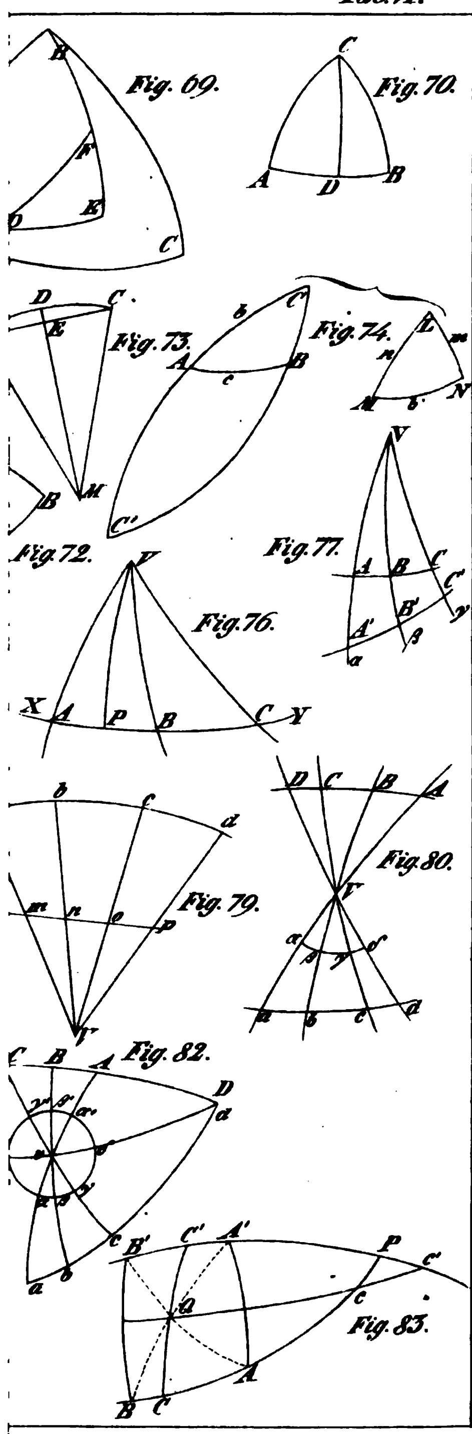

Tab. VI.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 82.
Fig. 83.

Fig. 86.

Fig. 87.

Fig. 89.

Fig. 90.

Fig. 91.

Fig. 93.

Fig. 94.

Fig. 95.

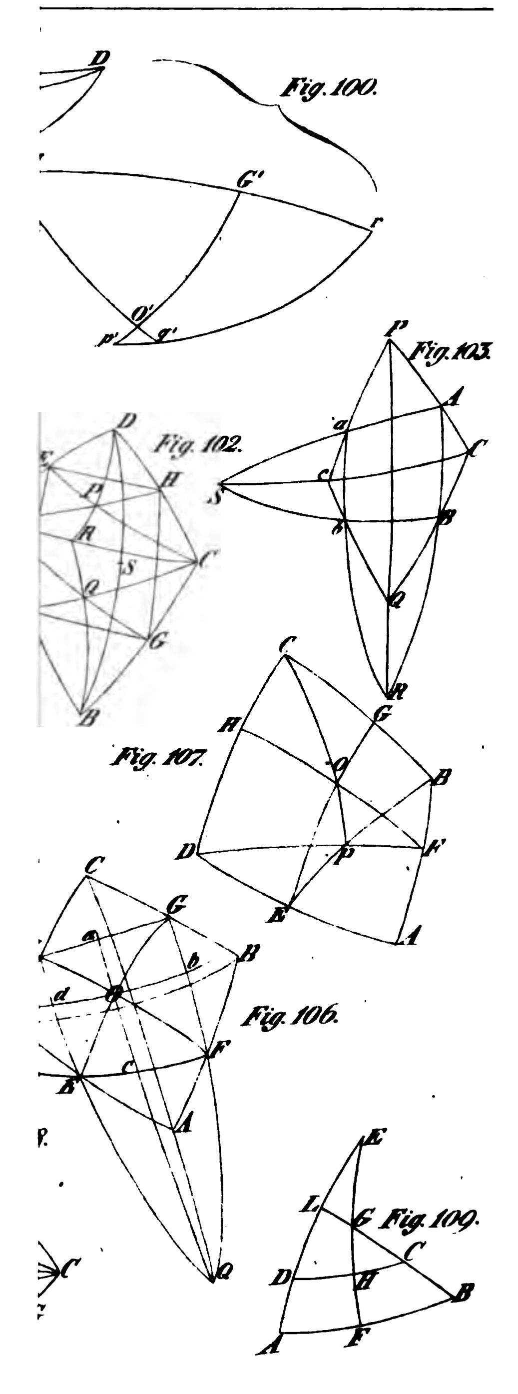
Fig. 96. β.

Fig. 97.

Fig. 98.

Fig. 99. α.

β.


Fig. 100.
D
G'
r
O'
p'
q'
Fig. 103.
P
A
a
C
c
S
b
B
Q
R
Fig. 102.
D
E
H
P
R
C
S
Q
G
B
Fig. 107.
C
H
G
O
B
D
P
F
E
A
Fig. 106.
C
G
a
b
B
d
O
F
E
c
A
Q
Fig. 109.
E
L
G
C
D
H
B
A
F

Tab. IX.

Fig. 110.*

Fig. 111.

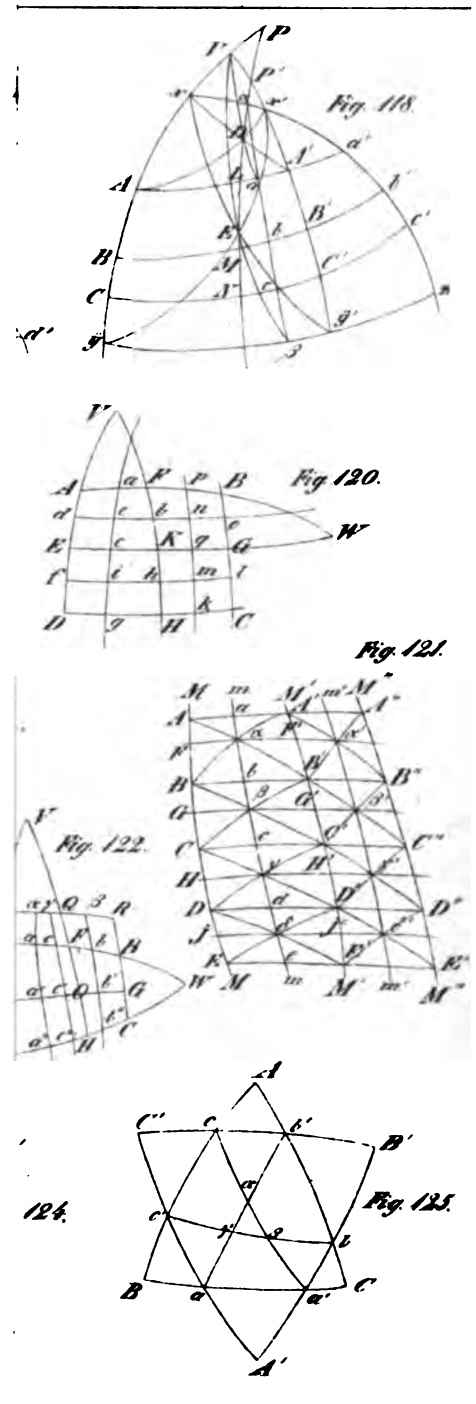
g. 112.

Fig. 113.

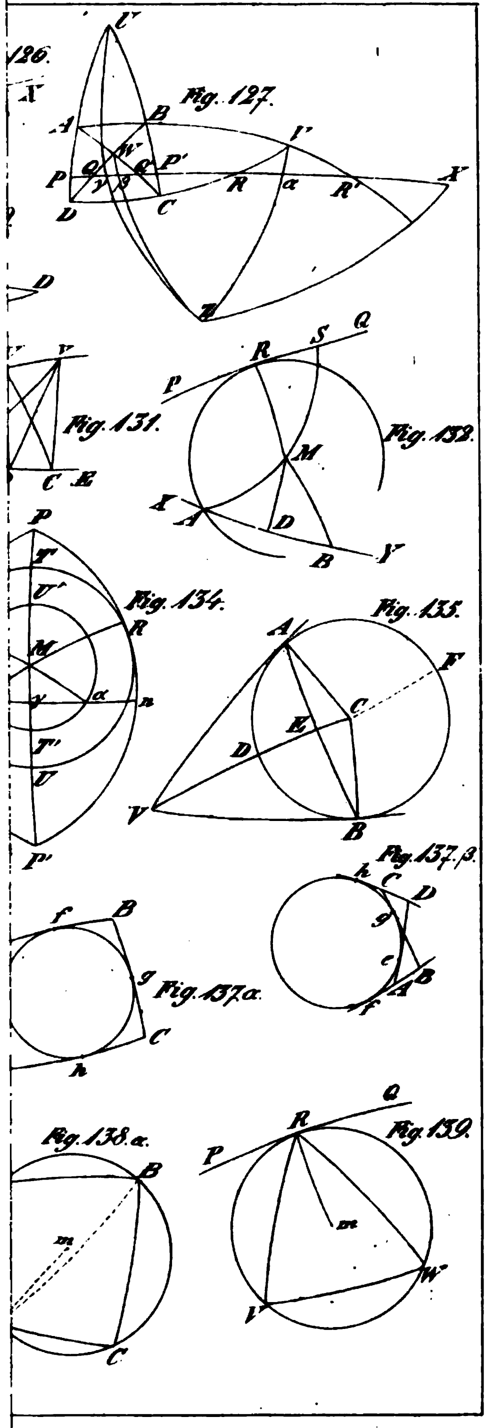
114.

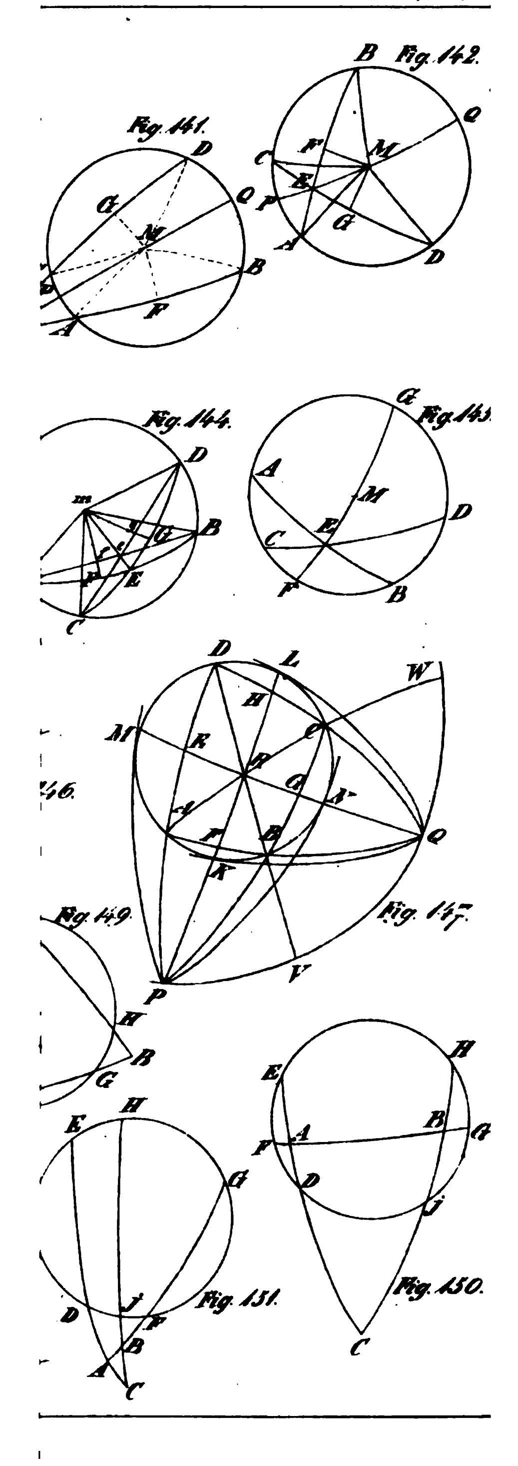
Fig. 115.

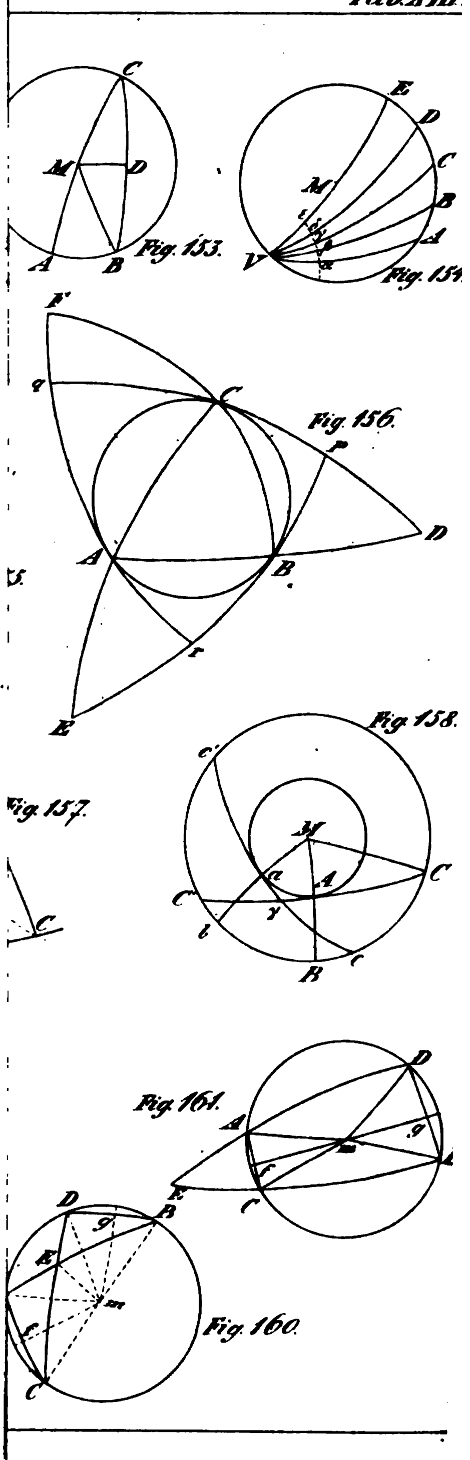
Fig. 116.


Fig. 118.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
124.
Fig. 125.

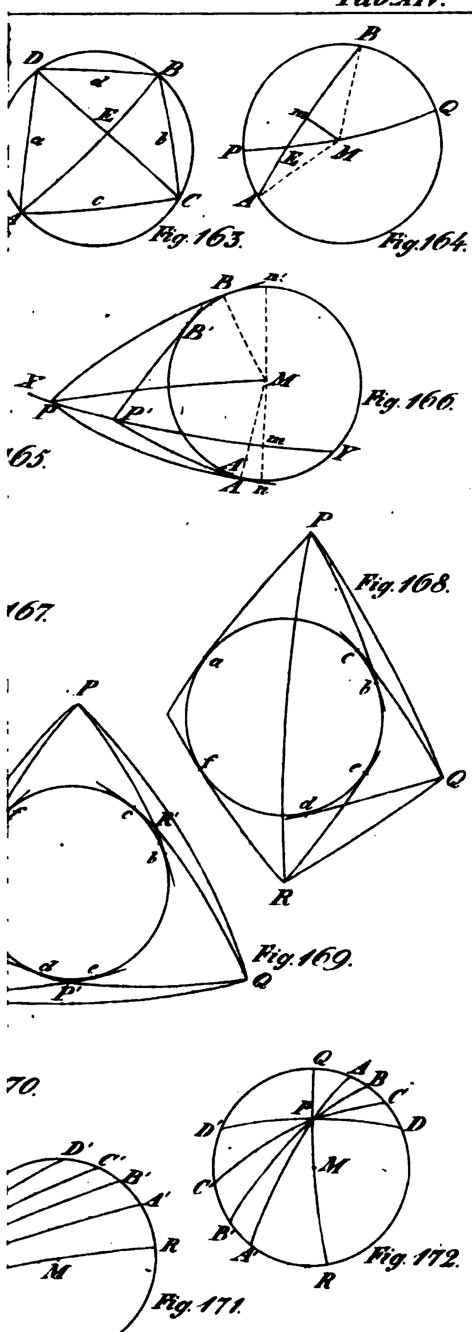
Tab. XI.

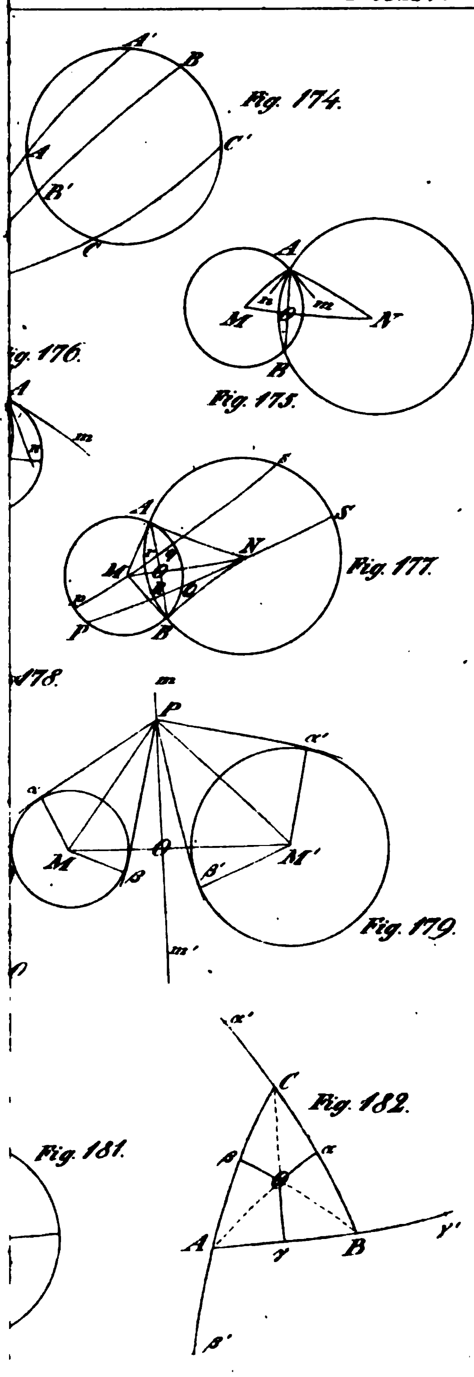

Fig. 127.
Fig. 131.
Fig. 132.
Fig. 134.
Fig. 135.
Fig. 137. β.
Fig. 137. α.
Fig. 138. α.
Fig. 139.

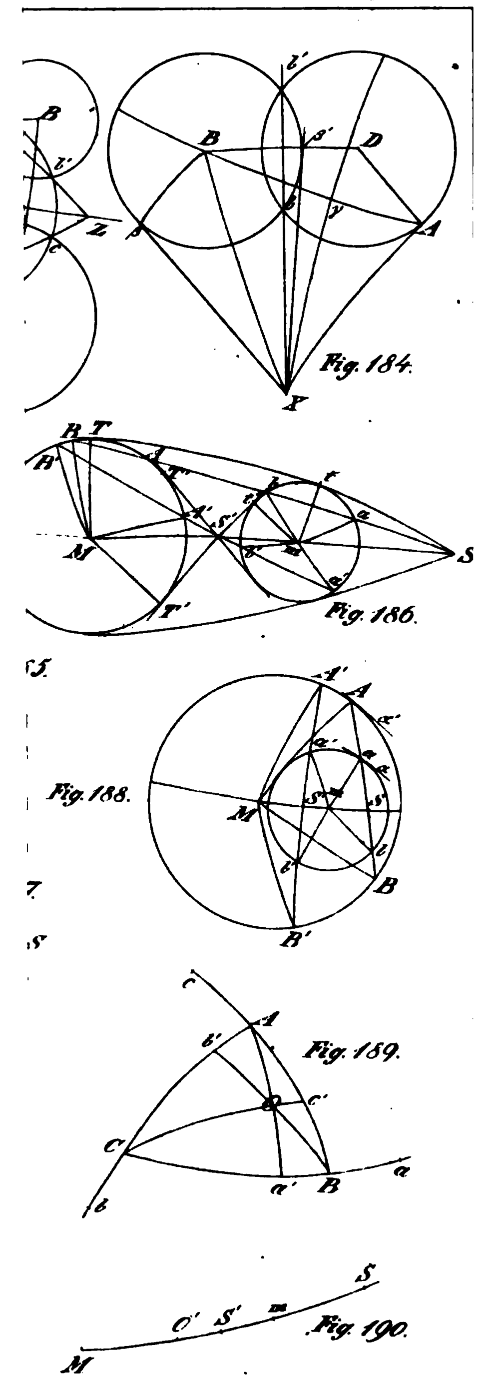

Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.

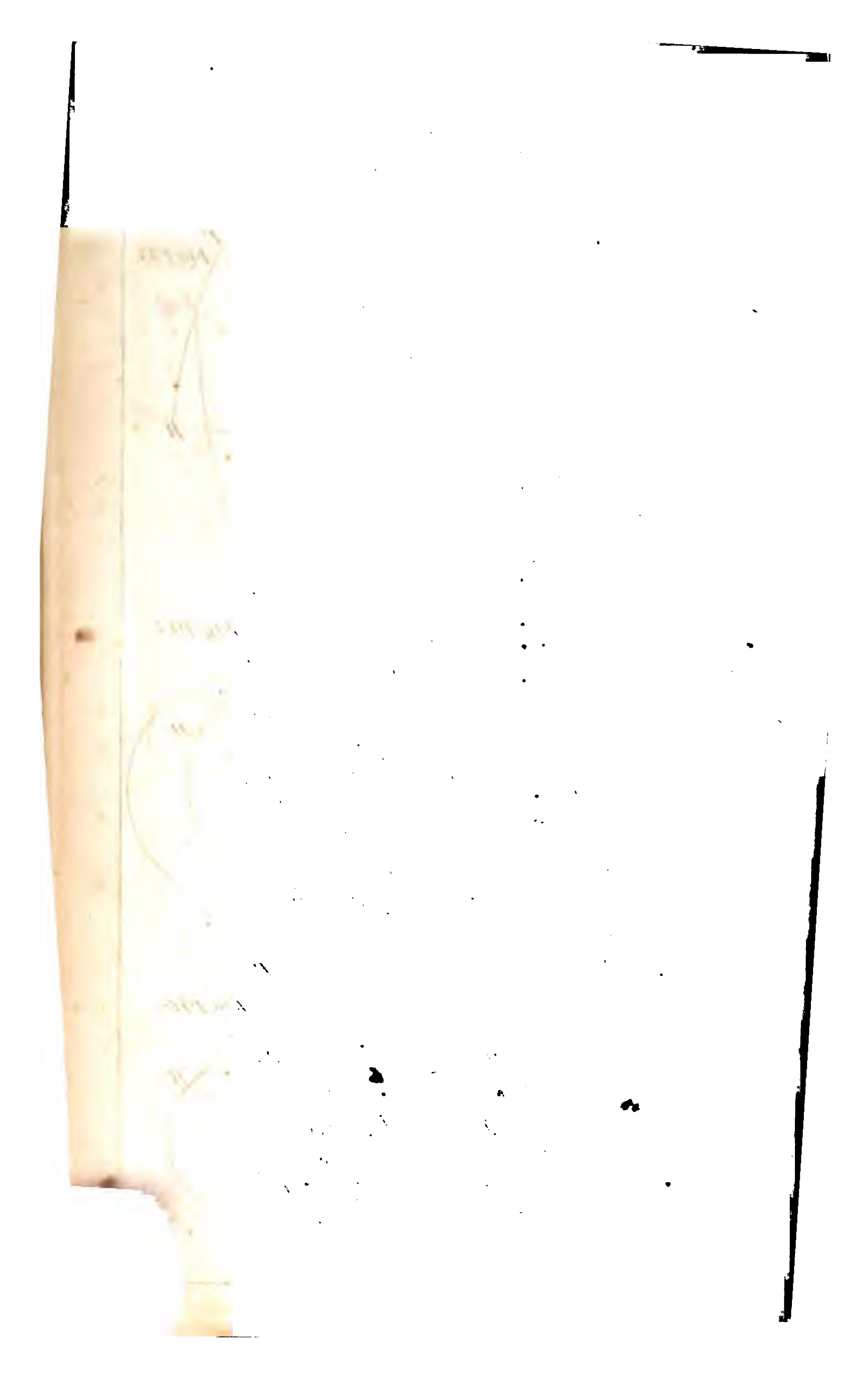

C
M
D
A
B
Fig. 153.
E
D
C
M
B
A
V
Fig. 154
F
q
C
Fig. 156.
p
D
A
B
r
E
Fig. 158.
Fig. 157.
C
M
a
A
C
γ
b
B
c
Fig. 161.
D
A
g
m
f
E
C
D
g
B
E
m
f
C
Fig. 160.

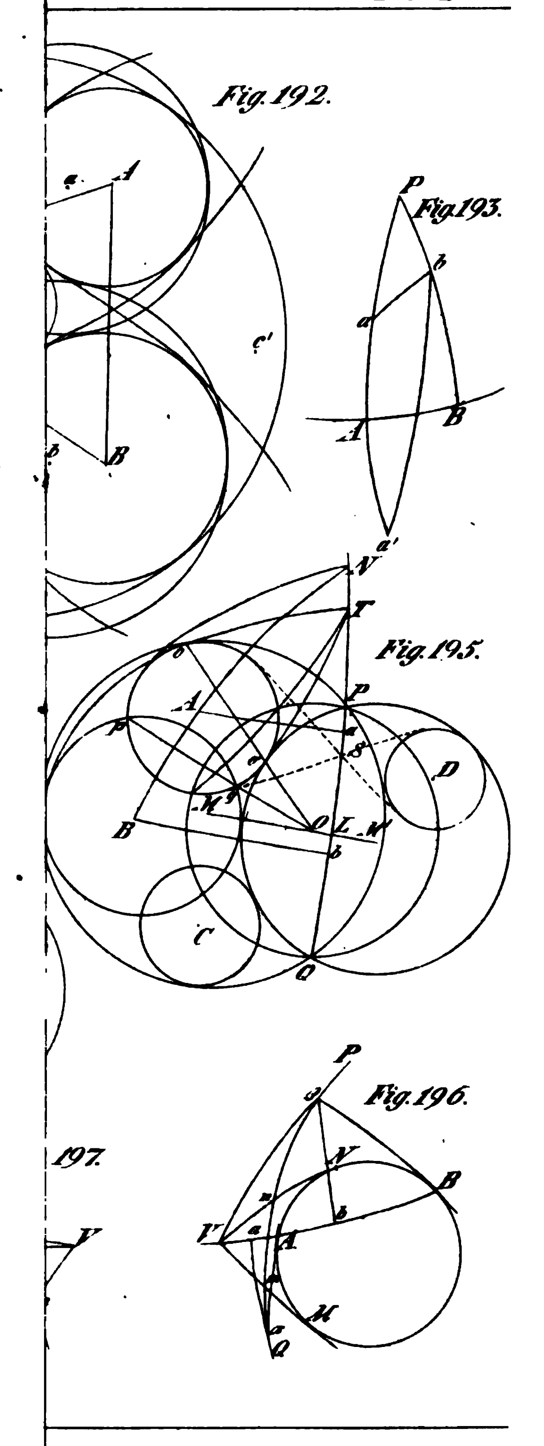
Tab. XIV.

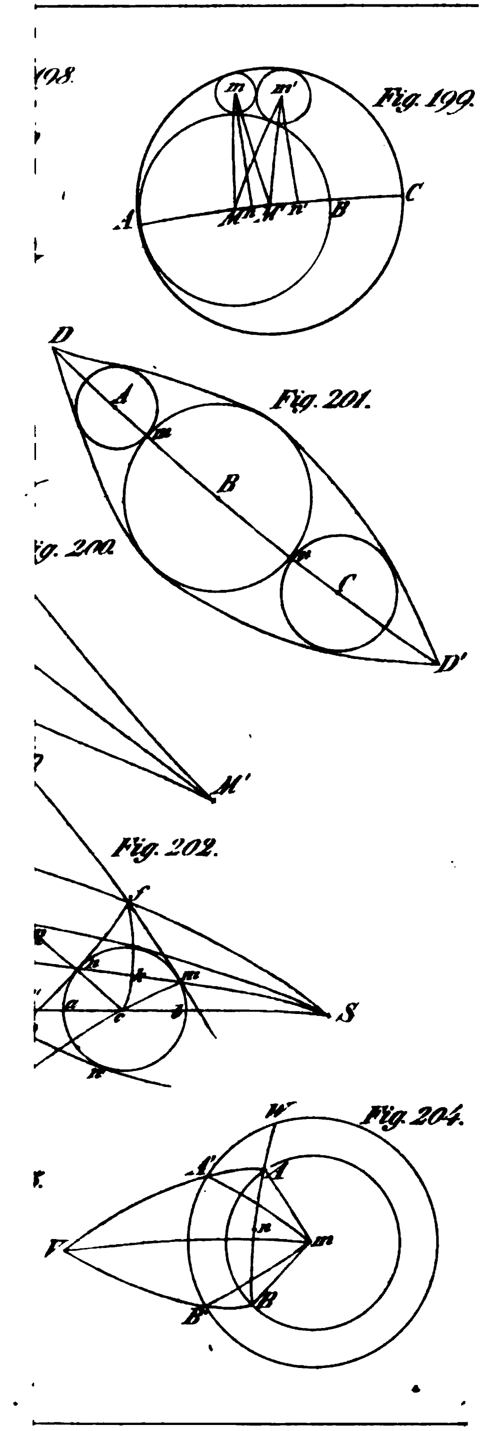

D
B
d
E
a
b
c
C
Fig. 163.
B
Q
m
P
M
E
A
Fig. 164.
B
n'
B'
X
M
P
P'
Fig. 166.
m
Y
165.
A'
A
n
P
Fig. 168.
167.
a
c
b
f
e
d
Q
R
P
c
R'
b
d
e
P'
Q
Fig. 169.
70.
Q
A
B
C
P
D'
D
M
C'
B'
A'
R
Fig. 172.
D'
C'
B'
A'
R
M
Fig. 171.


A'
B
Fig. 174.
A
C'
B'
C
A
n
m
M
O
N
B
Fig. 175.
ig. 176.
A
m
n
s
A
S
N
M
O
Q
R
Fig. 177.
P
B
178.
m
P
α'
α
M
O
β
β'
M'
Fig. 179.
m'
α'
C
Fig. 182.
Fig. 181.
β
α
O
A
γ
B
γ'
β'


B
b'
Z
c
l'
B
D
β'
b
y
A
β
Fig. 184.
Y
R
T
B'
A
T''
A'
S'
t
b
a
t'
m
S
M
b'
a'
T'
Fig. 186.
A'
A
a'
Fig. 188.
M
S'
S
b'
b
B
B'
C
A
b'
Fig. 189.
O
C'
C
a'
B
a
b
S
O'
S'
m
Fig. 190.
M




Fig. 192.
a
A
c'
b
B
P
Fig. 193.
b
a
A
B
a'
N
T
Fig. 195.
o
A
P
p
a
S
e
D
M
g
B
O
L
M'
b
C
Q
P
Fig. 196.
o
N
B
n
b
V
a
A
M
Q
197.
V


Fig. 198.
Fig. 199.
m
m'
A
B
C
Fig. 201.
D
A
B
C
D'
Fig. 200.
M'
Fig. 202.
f
S
Fig. 204.
W
A'
A
V
m
B
B'

Tab. XIX.

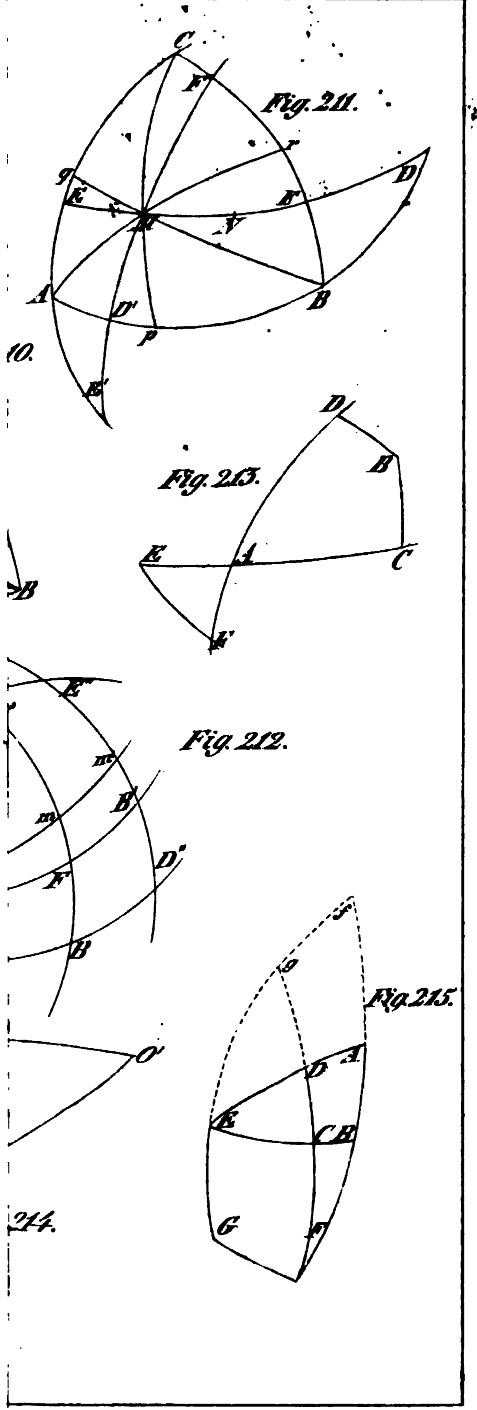
Fig. 210.

Fig. 206.

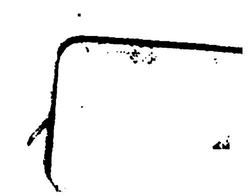
Fig. 211.

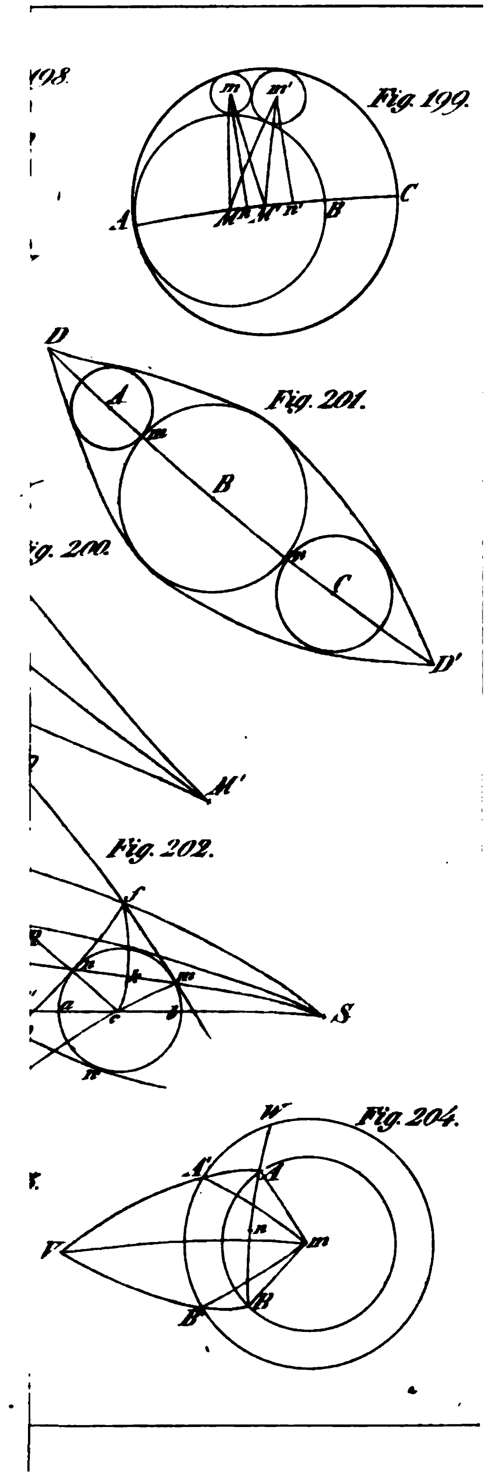
98.

Fig. 207.

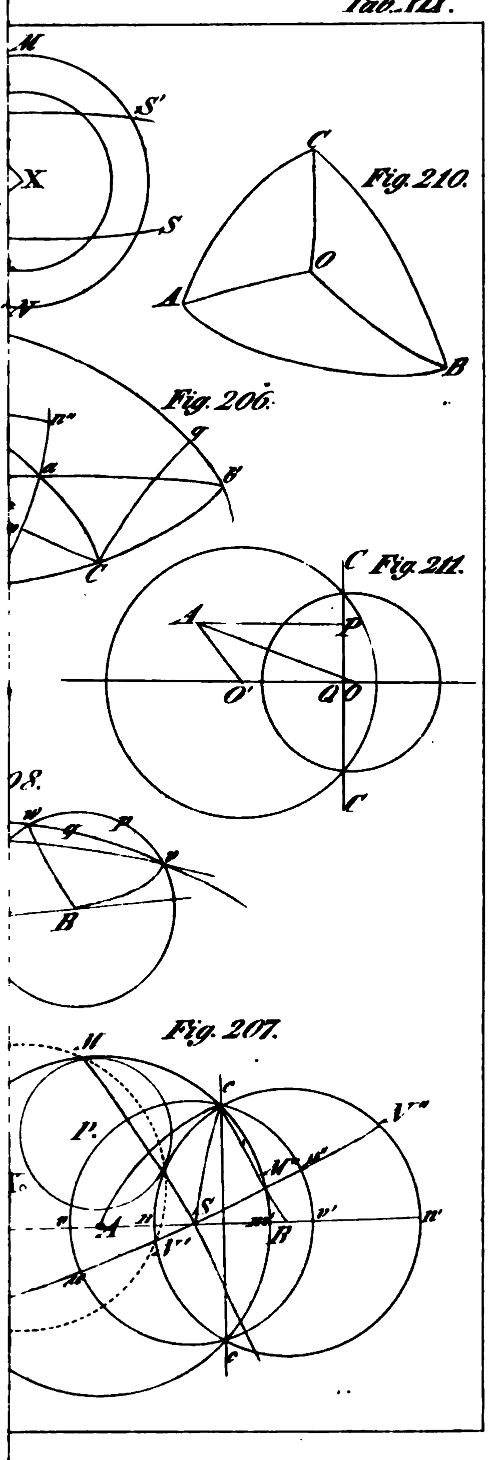


Lith. v. C. Espagne in Münster.





198.
Fig. 199.
m
m'
A
M
n
M'
n'
B
C
D
A
Fig. 201.
m
B
n
C
D'
Fig. 200.
M'
Fig. 202.
f
g
n
h
m
a
c
b
S
n
W
Fig. 204.
A'
A
n
V
m
B'
B


M
S'
X
S
N
C
Fig. 210.
O
A
B
Fig. 206.
q
b'
a
C
C Fig. 211.
A
P
O'
Q O
C
08.
q
p
B
Fig. 207.
M
P.
C
S
A
B
n'